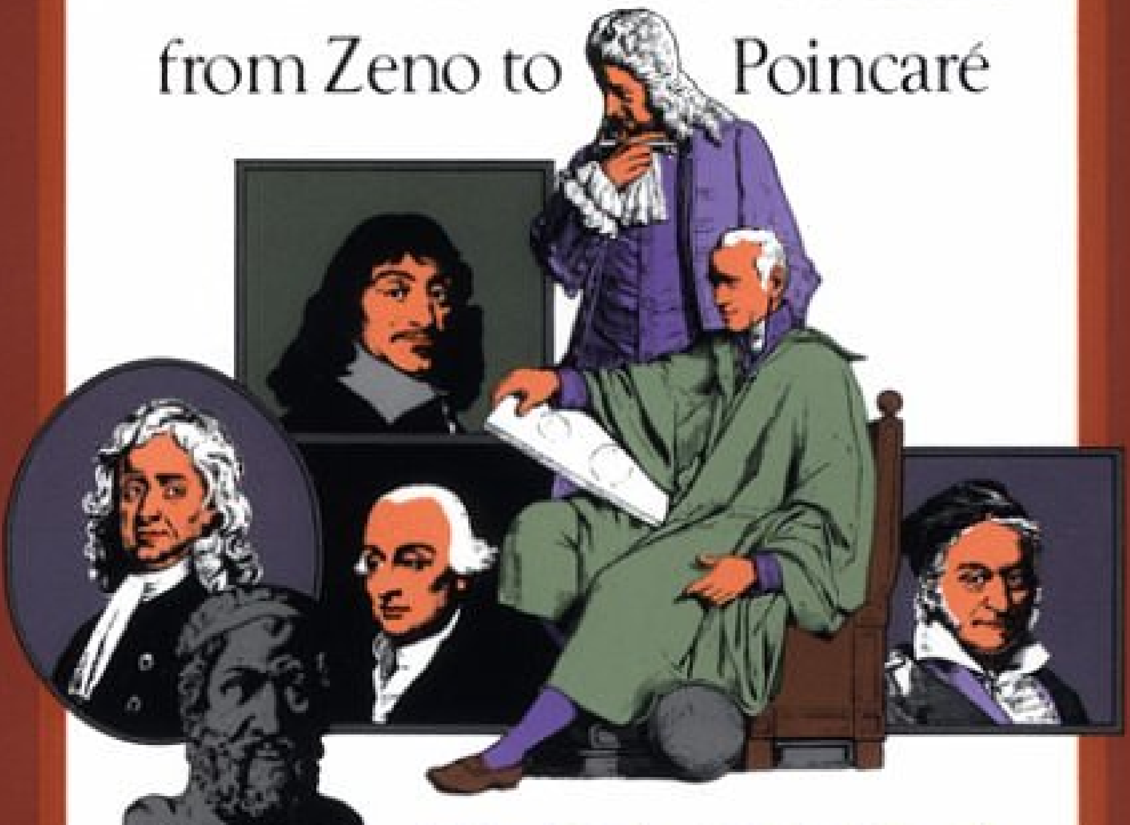
MEN OF MATHEMATICS

The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré



E. T. BELL

目　录

第一章 导言

本章称为导言而非绪言(尽管它确是绪言)，希望能借此吸引习惯于跳过绪言的读者，使他们在认识一些伟大的数学家之前，为了自己的便利，至少读一读直至第一行星号以前的部分。我愿首先着重说明，在任何意义下，本书无意写成数学的历史，或这样一个历史的任何部分。

这里所展示的数学家的生活是为普通读者，以及那些希望了解是哪一种人创造了现代数学的读者而写的。我们的目标最终是要谈到一些统治着当今数学的广泛领域的思想，我们是通过揭示提出这些思想的人们的生活来达到这一目的的。

在选择本书所收入的人物时，依据了如下两个标准：他们的工作对现代数学的重要性，他们的生活及品质对人们的吸引力。有些人在两方面都有资格入选，如帕斯卡、阿贝耳和伽罗瓦，其它人主要是由于第一个标准而当选，如高斯和凯莱，虽然他们两人都有着吸引人的生活经历。当作出一项特殊进展的荣誉有几个待选者，而这两个标准发生冲突或仅只部分一致时，则优先考虑后者，因为我们此处首先关心的是作为人的数学家。

近年来，人们对于科学，特别是物理科学，以及它对我们关于宇宙的、迅速变化的哲学观点的影响，产生了莫大的兴趣。出现了许多尽可能用非技术语言写成的，描述当代科学进展的优秀著述，它们的出现缩小了专业科学工作者和不可能专门从事科学工作的人们之间的差距。在很多这类文章、特别是关于相对论和现代量

子理论的文章中，出现了无法期望普通读者会熟悉的名字，例如，高斯、凯莱、黎曼和埃尔米特。了解了这是些什么样的人，他们在为自1900年以来物理学的爆破性进展进行的准备中所起的作用，并欣赏他们多彩的品格，我们就能对科学的伟大成就有一个更真切的看法，并能领会它们所具有的新的重大意义。

伟大的数学家在科学和哲学思想的演进中所起的作用，可以与哲学家和科学家本身所起的作用相媲美。下面各章的主要目的，在于通过数学大师们的生活勾勒出这种作用的主要特点，并以这些大师所处的时代中出现的一些主要问题为背景来呈现这些特点。重点完全在现代数学，也就是说，在数学思想中那些对现存的、创造性的科学和数学仍然至关重要的伟大而平凡的指导思想。

决不能认为数学——科学的婢女——的唯一职责是为科学服务。数学也被称作“科学的皇后”。即使她偶尔向科学乞讨，她也是一个非常高傲的乞丐。她既不向她的更为富有的科学姊妹请求，也不接受她们的恩赐。她所得到的她必偿付。数学有它自己的见解和智慧，超越它对科学的任何可能的应用。任何瞥见了数学对它本身的意义的聪明的人，它都慷慨地予以奖励。这并非为艺术而艺术的陈旧教条。这是为人类的艺术，毕竟科学的全部目的不仅是为了技术——要知道我们已经有了足够的新发明；科学还探索这样一个领域的奥秘，这个领域人类无论如何想象也永不会涉及，它也不会影响到我们的物质存在。所以我们也将注意那些由于其内在的美而被伟大的数学家认为值得热爱和理解的事物。

据说柏拉图曾在他的学院入口处刻上“不懂几何学者勿入。”此处无需类似的警告，但是一句忠告的话可以使一些过于认真的读者免去不必要的烦恼。本书的要旨在于现代数学缔造者们的生活和品格，而不在于那些散诸于各种教科书中的公式和图表。成

千上万的劳动者据以编织出全部浩瀚而错综复杂的现代数学的那些基本概念是简单而极其广泛的，任何具有正常智力的人都能很好地理解。拉格朗日(稍后我们将论及他)认为，一个数学家，只有当他能够走出去，对他在街上碰到的第一个人清楚地解释自己的工作时，他才完全理解了自己的工作。 5

这当然是一个理想，而且并不是总能实现的，但是人们可能会记起，就在拉格朗日说这番话的几年前，牛顿的重力规律甚至对于受过高等教育的人也是一个难以理解的谜。而昨天，牛顿规律已为一切受过教育的人所接受，并被认为是简单而真实的普通事情；今天爱因斯坦的引力相对论正处在牛顿"规律"在十八世纪早期所处的地位；明天或者后天，爱因斯坦的相对论将如牛顿"规律"之于昨天那样"自然"。随着时间的流逝，拉格朗日的理想并非永远不能实现。

另一位了解自己的困难不亚于他的读者的伟大的法国数学家，劝告认真的人不要在困难的地方过分纠缠，而是"读下去，自会有信心"。简言之，要是偶尔遇到某个过于专门的公式、图表或一段叙述，就跳过它，后面还大有天地。

学习数学的学生都熟悉"慢慢演变"或潜意识消化的现象：初次学习某种新知识时，各种细节似乎过于浩繁而毫无希望地混淆在一起，不能在头脑里留下一个连贯的整体印象。然而，过一段时间再回头看时，就会发现一切都处在适当的位置上——就象一幕生动的电影一样。大多数开始认真研究分析几何的人都有这种经历。另一方面，人们通常很快就掌握了积分学，因为它的目标从一开始就很清楚。甚至专业数学工作者对于其他人的著述也经常是先进行浏览，以便对它有一个全面的理解，然后才注目于他们所感兴趣的细节。尽管清教徒式的教师告诉我们当中的一些人，略读是一

种恶习，但实际上它并非恶习，而是明显的优点。

至于了解本书的全部内容——有些人会明智地略去一些——所需要的数学知识，老实说，我相信高中的数学课程就够了。远远超出这些课程的内容会不断被提到，但是不管它们出现在何处，已经给出了足够的说明，使具有高中数学知识的人能够理解。要了解所论及的与它们的创造者联系在一起的大多数重要的基本概念，例如群、多维空间、非欧几何和符号逻辑，较高中知识略少的数学知识就足够了，所需要的只是兴趣和冷静的头脑。人们将会发现，领略现代数学思想的这些令人鼓舞的概念，就象热天喝冰水那样使人清新，象一切艺术那样令人感奋。

为了方便阅读，重要的定义都在必要时予以重复，并不时引证以前各章的内容以供参考。

读者无需按各章的顺序阅读。事实上，那些长于推理，具有哲学头脑的人可能愿意先读最后一章，除了为适合社会背景而作的一些微不足道的改变以外，各章均按编年史的顺序排列。

要陈述所论及的人物做过的全部工作是不可能的，即使对其中著述最少的人也是如此；在为普通读者写的书中试图这样做也不适宜；况且，甚至过去时代比较伟大的数学家的大量工作也已经包含在更一般的观点中，现在只有历史意义了。因此，本书只根据每个人所做过的工作在现代思想中的独创性和重要性，有选择地论述了一些引人注目的新内容。

在选出来陈述的论题中，我们可以提及下面一些可能会使普通读者感兴趣的部分：无限的现代学说（第 2 章、第 29 章）；数学概率论的起源（第 5 章）；群的概念和重要性（第 15 章）；不变量的意义（第 21 章）；非欧几何（第 16 章和第 14 章的部分内容）；广义相对论的数学起源（第 26 章的最后部分）；普通整数的性质（第 4 章）

及其现代推广(第25章);所谓虚数——如$\sqrt{-1}$的意义和用处(第14章,第19章);符号推理(第23章)。而任何人想要了解数学方法的力量,特别是应用于科学的力量,只要看看积分是怎么回事就行了(第2章,第6章)。

现代数学始于两大进展:分析几何和积分,前者明确形成于1637年,后者约1666年形成,但直到十年后才为公众所接受。虽然分析几何背后的想法简单而幼稚,它所用的方法却非常有力,就连普通十七岁的孩子都可以用这个方法证明出足以使最伟大的希腊几何学者——欧几里得,阿基米德和阿波罗尼奥斯——感到困惑的结果。最后提炼出这个伟大方法的人笛卡儿,度过了特别充实而吸引人的一生。 7

当说到分析几何的创立应归功于笛卡儿时,我们并不意味着说这个新方法全盘出自他一人。他以前的许多人都曾为这个新方法的建立做出过重大贡献,但只是到了笛卡儿才完成了最后一步,确切地提出了这一新方法,使之成为几何证明、发现与发明的有效工具。但即使笛卡儿也必须与费马分享这一荣誉。

对于现代数学的大部分其它进展也可加以类似的评论。一个新概念可能对许多代人都是"在天上"的,直至某一个人——有时是两个或三个人一起——清楚地看到了他的前辈未曾发现的本质细节,这个概念才终于形成。例如,有时人们说,相对论是时间特地为闵可夫斯基的天才保留的伟大发现,但事实上闵可夫斯基并没有创造相对论,创造相对论的是爱因斯坦。如果说,要是情况不是那样,某某人可能已经做了这件或那件事,这种说法是毫无意义的。要是我们和物质世界都与现在不同的话,我们中的任何一个无疑能跳上月球,但事实却是我们并没有做这一跳。

不过,在其它例子中,一些伟大进展的荣誉并不总是公正地归

于应得的人；首次以比创始人更有力的方式应用一个新方法的人，有时会得到超过他所应得的荣誉。例如，非常重要的积分，其情形似乎就是如此。阿基米德就有了积分由之产生的极限和的基本想法，他不仅有了这个想法，而且表明他能应用它。阿基米德在他的一个问题中也用了微积分的方法。当我们接近十七世纪牛顿和莱布尼兹的时候，积分的历史就变得非常复杂了。在牛顿和莱布尼兹使这一新方法成为现实以前，它并非仅只“在天上”；费马实际上已经知道它了。他也独立于笛卡儿而发明了坐标几何的方法。尽8管有诸如此类不容置疑的事实，我们仍将按照传统，给每一个伟大的先驱者以大多数人认为应该归于他的荣誉，即使这样做会给他以超过他所应得的也在所不惜。优先权毕竟渐渐失去了它的令人不快的重要性，这是由于我们在时间上已经远离了那些人，在他们和他们的支持者活着的时候，优先权是剧烈争吵的起因。

* * *

当从未见过数学家的人碰到某位数学家时，他们可能会相当惊讶。因为普通读者对数学家这类人较之对其它任何脑力劳动者了解得更少。与他的堂兄弟科学家相比，数学家极少在故事中担任角色，当他确实在小说或银幕上出现时，他只不过被人们当做完全没有常识的邋遢的梦想者——可笑的配角。他在现实生活中是哪一种人呢？只有详细了解一些伟大的数学家是什么样的人，他们过着怎样的生活，我们才能知道传统的数学家的肖像是多么荒唐而不真实。

说起来似乎很奇怪，并非所有伟大的数学家都是学院或大学的数学教授。相当一部分数学家是职业军人，其它人是从神学、法律和医学进入数学界的。最伟大的数学家之一甚至象不正派的外交官那样，为了他的本国利益而撒谎。有一些根本没有职业。更

为奇怪的是，并非所有的数学教授都是数学家。但只要想想拿着丰厚的薪金的一般诗学教授与在阁楼里冻馁濒死的诗人之间的鸿沟，我们就不会对此感到惊讶了。

数学家所过的生活至少表明，他们与任何普通人一样——有时令人痛苦地感到他们比普通人更普通。他们中的大多数在通常的社会交往中是正常的。当然，数学界也有行为古怪的人，但百分比并不高于商业界或其他行业。就整体而言，大数学家是一些具有多方面才能、精力充沛、机智敏捷、对数学以外的许多事情有着浓厚兴趣的人；在战斗中，他们是坚韧不拔的战士。一般说来，数学家是难不住的人；他们对所接受的通常都能给以优厚的回报。至于其它方面，他们是取得巨大成就的天才，与他们的有天分的同胞之间的区别仅在于想要研究数学的不可抑制的冲动。有时数学家也是(有些数学家在法国仍然是)非常能干的行政官员。 9

大数学家的政治观点，从反动的保守主义直至急进的自由主义无所不包。作为一类人，他们的政治观点略微左倾，这样说或许是正确的。他们的宗教信仰包括从最狭隘的正教——有时落入最黑暗的偏执——直至完全怀疑论的所有派别。他们中的一些人对他们一无所知的事情固执己见、过分自信，但大多数人宁愿重复伟大的拉格朗日的话"我不知道"。

另一个要在这里提及的特点是大数学家的性生活，这是几位作家和艺术家(一些来自好莱坞)要求回答的问题。这些提问者特别希望知道有多少大数学家是堕落者——这或许是一个有些粗鄙的问题，但在关于这些论题已有了一些偏见时，有足够的理由给以一个严肃的回答。答案是：一个也没有。有些大数学家过着独身生活。这通常是由于经济拮据，但是大多数都幸福地结了婚，并以文明的、理智的方式养育自己的孩子。这里不妨顺便提一下，这些

孩子通常天资过人。有几个过去世纪的大数学家还曾有情妇，那是他们所处时代的风气。这里所论及的唯一的一位，他的生活可能会使一个弗洛伊德主义者感兴趣的数学家，是帕斯卡。

暂且回到数学家的银幕形象上来，我们注意到，不整洁的衣服并不是大数学家们的一成不变的服装。在我们知之甚详的漫长的数学史中，数学家们注意自己的外貌恰如任何其它类型的人一样。他们中的一些人讲究服饰，另一些人邋里邋遢，而大多数人穿着得体，不引人注意。如果今天有人一本正经地向你担保他是一个数学家，而他喜欢奇装异服，蓄长发，戴黑色的墨西哥阔边帽或任何其它出风头的标志，那你可以满有把握地打赌，他是一个心理学家变成的命理学者①。

大数学家的心理特征是人们很感兴趣的另一论题。在稍后一章中，庞加莱会告诉我们一些有关数学创造方面的心理学。除非心理学家们要求休战，在他们之间统一看法，否则就这个一般性的问题是没有多少好说的。就整体而言，大数学家们的生活与那些陷于普通辛劳中的人们的生活相比，要更为丰富而有活力，这个丰富并不完全在于爱好智力上的探险。几位较大的数学家曾经历过不寻常的危险和激动，他们中的一些人是难以和解的冤家对头——或者争论专家，这其实还是一样。他们中的许多人在早年就热衷于争吵，这无疑应受严责，但仍然很近人情；由于知道了这一点，他们经历了优柔寡断的人永远体会不到的正如虔诚的基督教徒威廉·布莱克在他的《地狱的箴言》中所说的："诅咒紧张，赞美松驰"。

这把我们引到了这样一个方面，初看上去（从这里所论及的几个人的行为）可能很象数学家的一个重要特点——他们的一触即

① 命理学者指按出生年月日及其它数字测定命运的人。——译者

发的坏脾气。从这儿个人的生活中，我们得到了一个印象：大数学家较常人更容易想象别人正在剽窃或者诋毁他的工作，或者对他不够尊敬，因而就为恢复想象中的权利而争吵。这些理应超越这种争吵的人，似乎特意为争夺发现权而争吵，指责他们的竞争者剽窃。我们将会看到足以使追求真理必然使人诚实这种说法黯然失色的不诚实的行为，但是我们不会找到数学会使人脾气变坏、喜欢争吵的明显证据。

另一个同一类型的"心理"状况更令人不安。嫉妒发展到了更高的程度，甚至在非人格性的纯数学中，狭隘民族主义和国际间的妒忌也严重地阻碍了发现和发明的历史，以致在一些重要事例中，几乎不可能查明事实，或就某个独特的人的工作对现代数学思想的重要意义作出公正的评价。有些人试图不带偏见地记述非本民族或非本国的科学工作者的生活和工作，然而种族的狂热——特别是近年来——使他们的工作变得复杂而难以进行。

对西方数学家的无偏颇的记述，包括对于在错综复杂的发展中某个人和某个国家的贡献的公正评价，只能由中国史学家来写， 11 只有他们具备必要的耐心和超脱名利，去理清楚被离奇古怪地歪曲了的格局，从而发现隐藏在我们西方各种各样的自我标榜中的真实情况。

*　　*　　*

即使把我们的注意力局限于数学的现代阶段，我们也面临着必须设法解决的选择问题。在指出所采取的解决办法之前，先估计一下一段详尽的数学史所需的工作量是有益的，其规模相当于政治史上任何一个重要的时期，比如说，法国大革命或美国南北战争。

当我们开始从数学史中理出一条特殊的线索时，我们很快就会产生一种沮丧的感觉：数学本身就象一个巨大的墓地，不断添进

需要永久纪念的新死者。对这些新来者，如同对五千年前为永久纪念而安葬在里面的那少数死者一样，必须这样展示，以使他们似乎仍保持着生前充沛的活力；事实上，必须造成这样的幻觉：他们的生命从来也没有终止。这种假象必须十分自然，甚至挖掘这一陵墓的最多疑的考古学家也会为之感动，而与活着的数学家们一起宣称：数学真理是不朽的、不可磨灭的；昨天如此，今天如此，永远如此；它们是形成永恒真理的真正材料，是人类在生、死和衰退的循环往复背后瞥见的永恒。事实可能确是如此；许多人，特别是老一代的数学家们，认为正是如此。

但是数学史的单纯旁观者不久就会被数量惊人的数学发现所压倒，这些数学发现对现代工作至今仍然保持着它们的生命力和重大价值。而在其它科学领域里，过去的发现经过几个或几十个世纪后，就不再保持这种生命力了。

包罗法国大革命或美国南北战争的全部重要事件的时间不过一百年；其中，值得记载下来以资纪念的突出人物也不过五百人。但是，当我们回顾历史时，就我们所知，那些对数学至少做过一项确定贡献的人，很快就会成为一大群；六千至八千个名字拥向前来，要求我们以言辞使他们免于泯灭；而一旦认出了其中的主要人物，决定这喧嚷的人群中谁将被允许存留，谁将判定被遗忘，就主要是一个武断的、无意义的立法问题了。

12

在描述物理科学的发展时，这个问题极少出现。物理学的发展也可以追溯到远古，但对它们中的大多数，只需三百五十年的时间就足以包括对现代思想有重要意义的一切了。但是如果有人试图给数学和数学家一个充分、全面的公正评价，他就得运用他可能具有的才能，对六千年的漫长历史中那多达六千至八千的一大群有权利提出要求的人，作出辨别和公正的评价。

当接近我们自己的时代时，这个问题变得更令人绝望了。这并非由于我们对上两个世纪的人更为亲近，而是由于全世界（在专业数学家中）都知道的事实：十九世纪，延续到二十世纪，过去是，现在仍然是世界所知道的数学上最伟大的时代。与光荣的希腊人对数学所做的贡献相比，十九世纪的数学就象廉价蜡烛旁的熊熊篝火。

什么样的线索能指引我们走出众多数学发现的迷宫呢？主线已经指出：它从半被遗忘的过去一直通向那些至今仍统治着广阔的数学王国的主要概念——但这些概念本身可能明天就会被废弃，而让位给更为广泛的概括。沿着这条主线，我们将越过发展者而特别注意创始人。

对于任何科学的进步，发明者和完善者都是必要的。每一个探索者，除了他的“侦察兵”以外，还必须有追随者，由他们去告知世界他发现了些什么。但是对人类的大多数来说，公正与否无关紧要。首先指出新途径的探索者更引人注目，即便他本人只向前蹒跚地跨出了半步。因而我们将追随开创者而非发展者。幸而历史是公正的，数学上大多数开创者也是无可匹敌的发展者。

即使有了这样的限制，那些还没有沿着从过去通到现在的道路行进的人，仍会感到这条道路并非总是明确的，所以我们在这里扼要地说明贯穿整个数学史的主线究竟是什么。 13

从最早的时期开始，两个互相对立、有时又互相促进的趋势就统治着数学全部复杂的发展。粗略地说，这些就是离散和连续。

离散力图以孤立的、可分辨的、单独的元素来描述全部自然和全部数学，这些单独的元素就象墙上的砖块或数字 1, 2, 3, ……。连续则试图按照赫拉克利特①的神秘的公式“万物皆流”来理解自

① 赫拉克利特（约公元前540——公元前480与470之间），古希腊唯物主义哲学家，爱菲斯学派的创始人。——译者

然现象——行星的轨道，电流的运动，潮汐的涨落，以及许多诱使我们认为我们懂得自然的其它现象。今天（如在最后一章将会看到的）"流动"或与之相等的"连续"是如此含糊不清，以至几乎失去了意义。不过，我们暂时不考虑它。

在直觉上我们感到我们知道"连续运动"的意义——如一只鸟或一粒子弹之穿过空气，或者一个雨滴的下落。运动是平滑的；它不是跳跃前进的；它是不断开的。在连续的运动，或更一般地在连续本身这个概念中，孤立的数目1, 2, 3, ……不是确切的数学形象。例如，一条直线段上所有的点就不具有数字序列1, 2, 3, ……所具有的那种鲜明的孤立性，在数字序列中，从一个成员到下一个成员的步长相同（步长是1：1+2=3，1+3=4等等）；因为在直线段上任意两点之间，不管这两个点挨得多么近，我们总能找到或至少想象出另一个点：从一个点到下一个点没有"最短的"步长。事实上，根本没有下一个点。

当后者——连续的概念，"无后继性"——以牛顿、莱布尼兹及他们的后继者的方式发展时，它就导致积分学的广阔领域，以及积分对科学技术，对今天称之为数学分析的一切的数不胜数的应用。另一个，基于1, 2, 3, ……的离散模式，则是代数、数论和符号逻辑的领域。几何学兼有离散和连续两个方面。

14 今天数学的一个主要任务就是要把连续和离散熔为一炉，消除各自的含混之处，把它们包括在更广泛的数学之中。

* * *

强调现代数学思想，而极少提及迈出了第一步、也许是最困难的一步的先驱者们，对我们的先辈可能是不公平的。但在十七世纪以前数学界所完成的一切有用的东西，几乎都遭到了这样两个命运：或者它被大大简化，以致现在成了每个正规中学课程的一部

2 分，或者它早已被吸收为更普遍的工作中的细目。

为发明那些现在视为常识般简单的东西——例如，我们写数字的方式，它的值的"定位系统"，以及符号零的引进，后者最终完善了定位系统——人们花费了难以置信的劳动。甚至更简单的东西，包括最基本的数学思想——抽象和概括，人们一定也经过了多少个世纪的斗争才设想出来；然而，它们的创始人已经湮没无闻，他们的生活和特点没有留下任何痕迹。比如，伯特兰·罗素曾经说过："一定经过了许多年代，人们才发现了一对野鸡和两天都是数字二的例子"。罗素自己的"二"或任何其它正整数的逻辑定义的形成，大约经过了二十五个世纪的文明(将在最后一章论及)。

还有，我们在开始学习几何时就(错误地)认为我们完全了解了的点的概念，它在人类作为一个艺术的、洞穴绘图动物的生涯中，一定出现得很晚。英国的数学物理学家拉姆·霍勒斯就曾想要"为那些把数学点做了最高类型的抽象的无名数学发明者竖一座纪念碑，因为这种抽象从一开始就是科学工作的必要条件"。

那么，究竟是谁发明了数学点呢？在某种意义上是兰姆的被忘却了的人；在另一种意义上，是欧几里得及他的定义："一个点就是既无大小也无长度"；而在第三种意义上是笛卡儿及他的"点的坐标"的发明；直至最后，正如一些专家今天在几何学中所作的，神秘的"点"被一些更为有用的东西——以确定次序写成的一系列数——所替代。它们把被忘却了的人和他全部永久湮没了的神联系在一起。

最后论及的这一点是抽象性和精确性的现代例子，数学不断 15 向这两个方向努力，不过，当达到了抽象和精确时，为了清楚地理解就要求更高程度的抽象和更严格的精确了。我们自己的"点"的概念无疑会发展成为一种更为抽象的东西。事实上，今天用以描

述点的那些"数",约在本世纪初隐隐约约地化入纯逻辑的微光中,接着它又似乎消失在一些更罕见、甚至更不具体的概念中。

因此,如果说亦步亦趋地跟着我们的先辈,是了解他们的、或我们自己的数学概念的唯一途径,这种说法不一定确切。而对导致我们现行观点的这条道路做这样的追溯,它本身无疑就饶有趣味。但是从我们现在所站立的山顶上回顾走过的路程要更为清晰。走错的步子,曲折的行踪,不通到任何地方的道路,都消失在远处,只看见条条宽广的大路笔直地通向过去,在那里,我们在不确定性和猜想的雾中迷失了它们。对于那些高大的身影在迷雾中隐约显现的人们,空间、数、甚至时间之于他们都不象对我们那样重要。

纪元前六世纪的某个毕达哥拉斯学派的人可能吟诵过:"祝福我们吧,神圣的数,神和人皆由汝而生";十九世纪的一个康德学派的人能自信地把"空间"作为"纯直觉"的一种形式;一个数学天文学家能在十年前宣称,宇宙的伟大的创造者是纯数学家。关于所有这些深奥的说法,最值得注意的是,那些并不比我们愚笨的人们竟一度认为它们确有意义。

这些包罗万象的概括的说法,对现代数学家是毫无疑义的。然而排除数学是神与人的全能创造者的说法,数学也得到了更实在的东西,即对于它本身和它为人类创造价值的能力的信念。

我们的观点已经改变——并且仍在改变中。对笛卡儿的"给我空间和运动,我将予你世界"的说法,今天爱因斯坦可能会反驳说,要得太多了,事实上这个要求是毫无意义的:没有一个"世界"——物质——就既不会有"空间"也不会有"运动"。十七世纪莱布尼

16 兹关于神秘的$\sqrt{-1}$说过,"神灵在分析的奇境中找到了一个卓越的出口,那是理念的预兆,其意义在存在与不存在之间,我们称之为负单位的虚[平方]根"。为了消除莱布尼兹这种狂烈的、混乱的

神秘主义，哈密顿在十九世纪四十年代构造了一个任何有天分的儿童都能理解和掌握的数偶，这个数偶之于数学和科学，做了被命错名的"虚数"所曾做过的一切。十七世纪莱布尼兹的"不存在"就如 ABC 那样简单地有了一个"存在"。

这失去了什么吗？或者当一个现代数学家试图通过假想的方法追逐那个难以捉摸的"感觉"时，他失去了什么有价值的东西吗？无线电波的发明者海因里希·赫茨把这种感觉描述为："人无法摆脱这样的感觉：这些数学公式是独立存在的，有他们自己的智能，它们比我们更聪明，甚至比它们的发现者还聪明，我们从它们中得到的超过了原来放进它们的"。

每一个称职的数学家都会了解赫茨的感觉，但他们也倾向于相信，鉴于发现了大陆和无线电波，也就发现了电动机和数学来做我们要它们做的事。我们仍可以梦想，但没有必要有意做恶梦。如果确如查尔斯·达尔文所说"数学似乎赋予人以新的感觉"，这个感觉就是升华了的常识，物理学家和工程师开尔文勋爵曾声称数学就是如此。

与其和柏拉图一起声称"上帝乃几何学家"或与雅可比一起声称"上帝乃算术学家"，不如暂时同意伽利略的说法："自然界的大书是以数学符号写的"，且仅此而已，这难道不更接近于我们自己的思维习惯吗？如果我们以现代科学的批判眼光仔细审视自然界的大书上的符号，我们很快就会发觉，正是我们自己写下了它们。我们之所以用特殊的字体，是因为我们创造了这种字体来适应我们自己的理解力。也许有一天，我们会发现一种较数学更富于表现的速记法，以表达我们对物质世界的感受——除非我们接受了科学神秘主义者的教条，认为一切都是数学的，而不仅只是为了我们的便利才以数学语言描述的。如果象毕达哥拉斯所说"数统治

着宇宙”，数也只是我们对王权的代表，因为我们统治着数。

当一个现代数学家暂时离开他的符号，而与其它人交流数学在他心中激起的感情时，他不会重复毕达哥拉斯和琼斯的话，但他可能引用伯特兰·罗素在四分之一世纪前所说的：“正确的看法是，数学不仅拥有真，而且拥有非凡的美——一种象雕塑那样冷峻而严厉的美，一种不为我们软弱的天性所动的美，一种不具有绘画和音乐那样富丽堂皇的装饰的美，然而又是极其纯净的美，是唯有最伟大的艺术才具有的严格的完美”。

另外一个熟悉自罗素赞扬数学的美以来，我们关于数学的“真”的概念发生了什么情况的现代数学家，可能会提及一些人在试图了解数学的意义时所得到的“坚韧的耐力”，而引用詹姆斯·汤姆森描述丢勒①的卷首插画的诗句(本书即以该诗结束)。如果某个献身者受到责难，因为在许多人看来，他似乎把生命耗费在对一种美的自私的追求上，而这种美在他的同胞们的生活中没有直接的反映，那么他可以重复庞加莱的话“为数学而数学”，虽然人们为这个公式所震惊，但是它恰如为活着而活着一样，即使活着只是受难。

* * *

为了估计现代数学比之古代已经取得了什么样的成就，我们可以先看与1800年前相比，1800年后所做的大量数学工作。最包罗万象的数学史要算莫里茨·康托尔的印刷精确的三大卷《数学史》(第四卷与合作者一起写成，为前三卷的增补)。四卷共约三千六百页。康托尔所写的只是一个发展的概要；没有试图详细叙述所论及的各项贡献；也没有解释技术术语以使局外人能了解全书的内容；传记部分极其精炼；该书系为受过技术训练的人而写。这

① 丢勒(1471—1582)：德国宗教改革运动时期的油画家，版画家，雕塑家，建筑家。——译者

部历史写到1799年——正是现代数学开始其自由发展之前。如果以同样规模撰写十九世纪的数学史纲，估计需要康托尔著作篇幅的十九至二十卷，也就是说，大约一万七千页。按这个比例，十九世纪对数学知识所作的贡献约为以前全部历史上所作贡献的五倍。

1800年以前的没有起点的时期，清晰地分为两部分。这个分期大致发生于1700年，主要归功于艾萨克·牛顿(1642—1727)。牛顿在数学上的最大对手是莱布尼兹(1646—1716)，按照莱布尼兹的说法，到牛顿时代为止的全部数学中，较为重要的一半应归功于牛顿。这个估计是指牛顿的一般方法的力量而不是指他的大量工作。人们至今仍把《原理》视为由单独一个人对科学思想所作出的最大的贡献。

18

回溯到1700年以前的时代，我们发现第一个可以与之相提并论的是希腊的黄金时代——大约间隔了两千年。再回溯到公元前600年以前，我们很快地进入阴影中，直到古埃及时期才短暂地重见光明。最后我们来到了数学上的第一个伟大的时期，约公元前两千年，出现于幼发拉底河流域。

在巴比伦的苏美尔人的后裔，看来是数学上的首批"现代派"，他们对代数方程做出的努力，比之希腊人在他们的黄金时代所作的一切，确实更符合我们所知道的代数精神。较这些古代巴比伦人的注重技巧的代数更为重要的是，他们认识到了——正如他们的工作所表明的——数学上证明的必要性。而直到不久以前，人们还以为是希腊人首先认识到了数学命题需要证明。巴比伦人的这一认识是人类迈出的最重要的一步。不幸的是这一步走得太早了，以致就我们自己的文明而言，它没有做出什么特别的成就——除非希腊人有意识地跟上来，而这点他们完全可以做到。希腊人对他

们的先辈并不是特别慷慨的。

那么数学有四个伟大的时代，巴比伦时代，希腊时代，牛顿时代（给1700年前后这一时期取的名字），和最近的、始于1800年延续至今的时代。称职的裁判者们把最后一个时期称为数学上的黄金时代。

今天，数学发明（要是你愿意的话，也可以说发现）比以往更有力地前进着。显然，唯一能阻止它前进的，是我们乐于称之为文明的事物的总崩溃。如果那一天来到，数学就会如它在巴比伦衰落后那样，一连许多个世纪潜入地下；但是如果如人们所说，历史本身会再现，那么我们可以肯定，在我们和我们的一切愚钝早已被忘却以后，春天必将再度降临大地，比以往任何时候更为清新、洁净。

第二章　古代形体中的现代头脑

芝诺、欧多克斯和阿基米德

……光荣归于希腊，

……辉煌归于罗马。

——E.A. 坡

为了评价我们自己的数学的黄金时代，记住那些很久以前就为我们铺平了道路的天才们的一些伟大而平凡的指导思想是有益的。我们将浏览三个古希腊人的生活和工作，他们是：芝诺(Zeno，公元前495—435)，欧多克斯(Eudoxus，公元前408—355)，和阿基米德(Archimedes，公元前287—212)。欧几里得要到很晚才论及，那时他最好的工作将得到它应得的荣誉。

芝诺和欧多克斯是至今仍然盛行的两大对立的数学思想学派的代表人物。这两个学派是毁灭性的批判学派(Critical-destructive)和建设性的批判学派(Critical-constructive)。二者都具有如他们在十九、二十世纪的后继者所有的那种敏锐的批判头脑。这个说法当然可以倒过来：数学分析——无限和连续的理论——的现代批评家，克罗内克(Kronecker，1823—1891)和布劳威尔(Brouwer 1881—)，如同芝诺一样古老；连续和无限的现代理论的创始人，维尔斯特拉斯(Weierstrass，1815—1897)、戴德金(Dedekind，1831—1916)和康托尔(Cantor 1845—1918)是欧多克斯在智力上的同代人。

阿基米德，古代最伟大的智者，是彻底的现代派。他和牛顿完全可以互相理解。要是阿基米德能活到现在，去听数学和物理的研究生课程，那么他很可能会比爱因斯坦、玻尔、海森堡和狄拉克本人更了解他们自己。今天的大数学家们依据二十五个世纪的艰苦努力赢来的成就，允许他们自己无拘无束地自由思考来铺平他们的道路；而在所有古代人中，唯有阿基米德习惯于这样地自由思考。因为在所有古希腊人中，只有他有足够的才干和力量，去跨过那些因听信了哲学家们的话而吓慌了的几何学家们扔在数学进步道路上的障碍。

全部历史上任何三个"最伟大"的数学家的名单都将包括阿基米德的名字。通常与他相联系的另外两个名字是牛顿(Newton, 1642—1727)和高斯(Gauss, 1777—1855)。要是考虑到在这些巨人各自生活的时代，数学与物理学的相对的富有或贫困，并依据他们所处的时代背景来评价他们的成就，一些人会将阿基米德排在首位。要是古希腊的数学家和科学家追随阿基米德而不是追随欧几里得、柏拉图和亚里士多德，他们可能在两千年前就轻而易举地进入了由笛卡儿(Descartes, 1596—1650)和牛顿在十七世纪肇始的现代数学时代，和由伽利略(Galileo, 1564—1642)在同一世纪开辟的现代物理学时代。

在这三个现代先驱者的背后，隐隐显现毕达哥拉斯(Pythagoras, 公元前569?—500?)半神秘的身影，他是神秘主义者，数学家，竭尽了全力的大自然的研究者，"他十分之一是天才，十分之九是纯粹的呓语者"。他的生活已成为一个神话，充满了种种令人难以置信的传说；但是除了表达他用以推测宇宙的希奇古怪的数——神秘主义(number-mysticism)之外，只有这些对数学发展有重

要意义：他周游埃及，从祭司那里学得了许多，相信得更多；访问了巴比伦，重复了在埃及的经历；在南意大利的克罗顿建立了秘密帮会，从事高度数学思辨和有关物质、精神、道德和伦理的荒谬臆测。由于这一切，他做出了可列入数学史上最伟大之林的两个贡献。根据一种传说，政治上和宗教上的执迷者们鼓动群众反对毕达哥拉斯试图对他们进行的说教，在他的学派中煽起骚动，毕达哥拉斯死于动乱中。*Sic transit gloria mundi*（世界的光荣就如此地消失了——译者）。

在毕达哥拉斯之前，人们并未清楚地认识到证明必须由假定开始。毕达哥拉斯坚持在发展几何时需首先制定“公理”，或称“公设”，其后的全部发展将通过严密的、导向公理的演绎推理来进行。根据长期以来的传统看法，他是这样做的第一个欧洲人。按照现行的用法，我们以后将用“公设”来代替“公理”，因为“公理”与“不言自明的，必然成立的”有一种有害的历史联系，而“公设”没有这种联系；一个公设是由数学家本人而并非由全能的上帝规定的肯定的假设。

21

后来，毕达哥拉斯把证明引入数学，这是他最伟大的功绩。在他之前，几何学主要是凭经验得出的规律，对于这些规律之间的相互联系，没有作任何明确的说明，也丝毫没有猜疑到这些规律能从一些数量相对少的公设推出。证明，现在被普遍认为是理所当然的数学的真正精神，我们甚至很难想象必然先于数学推理的原始阶段是什么。

毕达哥拉斯的第二个突出的数学贡献，使我们了解了至今还存在的各种问题。这就是发现了普通完全数1、2、3、……，甚至对于构造他所知道的数学的初级阶段也是不够的，这使他遭到屈辱和失败。在作出这个重大发现之前，他曾经象一个富有灵感的先

知那样宣称：整个自然界，实际上整个宇宙，物质的、形而上学的、精神的、道义的、数学的一切，都是建立在正整数1、2、3、……的离散模式之上的，只能按照上帝给予的这些砖块来说明它们。他确实宣称过，上帝就是"数"。这里的数，他指的是普通完全数。这无疑是一个卓越的概念，简单而美妙，但它的无用如同柏拉图等人对它的共鸣一样：柏拉图——"上帝乃几何学家"，雅可比——"上帝乃算术学家"，或琼斯——"宇宙的建造者现在开始以数学家的形象出现"。一个顽固的数学矛盾毁坏了毕达哥拉斯的离散哲学、数学和形而上学。但与他的一些后继者不同，他在力图遏制败坏了他信念的发现而未获成功之后，最终接受了失败。

打垮了他的理论的是：不可能找到两个整数，使其中一个的平方等于另一个数的平方的二倍。任何学过几星期代数的人，甚至完全理解了初等算术的人，都能由简单地推理①证明这件事。事实上毕达哥拉斯是在几何中栽的跟头：一个正方形的边与它的一条对角线之比，不能表示成任何两个整数之比。这相当于上述关于整数的平方的陈述。换一种形式，我们可以说2的平方根是无理的，那就是说，它不等于任何整数或十进位分数，或由一个整数除另一个整数所得的整数和十进位分数之和。因此，即便简单如正方形对角线这样的几何概念就打败了整数1,2,3,……，否定了早期毕达哥拉斯派的哲学。我们能很容易地构造出几何上的对角线，但我们不能用有限步去量度它。这个不可能性尖锐而清楚地引出了无理数和无限(无终止)的过程，它们似乎引起了数学家们的注意。因此，二的平方根可以通过中学所教的方法或其它更有力的

① 设$a^2=2b^2$，此处不失一般性，设a,b是没有大于1的公因子(这样一个因子能够从方程中约去)的整数。如果a是奇数，立刻导致矛盾，因为$2b^2$是偶数。如果a是偶数，比如说是$2c$，那么$4c^2=2b^2$，或$2c^2=b^2$，所以b是偶数，因此a,b有公因子2，这又导致了矛盾。

方法计算到所要求的任何有限十进位小数，但这些十进位小数永远不会“重复”(例如，象计算 1/7 那样)，也不会终止。由于这个发现，毕达哥拉斯找到了现代数学分析的主根。

由这个简单的问题引起的争端，至今尚未找到使所有的数学家满意的解决方式。这些问题涉及到无限(无尽的、不可数的)，极限和连续的数学概念，而这些概念是现代数学分析的基础。人们一再认为与这些显然不可缺少的概念一起羼入数学的悖论和巧辩已经最后消除了，但它们在相隔一、两代后又再度出现，改头换面，但仍保持原来的内容。我们将在当代数学中遇见这些问题，它们较以往更为活跃。下面是这种情况的一个极端简单、直觉上很明显的图形。



考虑一段两英寸长的直线，想象一个“点”在它上面“连续”“运动”。引号中的词就是困难所在。不用分析它们我们就能很容易地使自己相信，我们画出了它们表示的意义。现在记直线的左端点为 0，右端点为 2。0 和 2 的中间点自然标以 1；0 和 1 的中间点标以 1/2；0 和 1/2 的中间点标以 1/4，等等。这样做了以后，我们可以同样地标出 1/3、2/3、$1\,{}^{1}/_{3}$、$1\,{}^{2}/_{3}$，然后我们可以对所得到的每一个小线节做更小的等分。最后，“在想象中”，我们能够设想这一过程已经做出了所有的普通分数和普通的大于 0 小于 2 的数；概念化的分点给我们以全部 0 和 2 之间的有理数，它们是无穷的。可是它们完全“覆盖”了整条直线吗？没有。2 的平方根相应于哪一个点呢？没有这样的点，因为这个平方根不能由任一整数除另一整数得到。但是 2 的平方根明显的是某种“数”①，表示它的点落在

① 这样一个假设的固有缺陷是明显的。

1.41和1.42之间的某个地方，我们能尽可能近地限制它。为了盖满整条直线，我们不得不想象或发明出较有理数无限多的"数"。那就是说，如果我们认为直线是连续的，并且要求直线上的每一个点都对应于一个，且仅有一个"实数"的话。同样的想象可以用于整个平面或者更多的方面。但暂时这已经足够了。

诸如此类的简单问题不久就导致了非常严重的困难。鉴于有这些困难，希腊人(如同我们一样)分成了两个不可调和的派别；一个派别停滞在它的数学道路上，拒绝继续前进走向分析学——微积分学，当我们论述到它时，将加以阐述；另一个派别试图克服困难，并且自认为它已经做到了这一点。那些停滞不前的人几乎没有再犯什么错误，但也同样没有发现多少真理；而那些继续前进的人却发现了大量对数学和一般的合理思想都具有高度意义的东西，不过，正象在我们这一代中所发生的一样，其中的一些可能遭到毁灭性的批判。从最早期开始，我们就遇见了这样明显对立的两种类型：一类是自认为谨慎的人，他们由于脚下的大地震动而踌躇不前，另一类是勇敢的先驱者，他们跳过裂罅去寻宝，而在彼岸更为安全。我们首先来看看一个拒绝一跳的人。就其思想的深刻和敏锐方面来说，在我们进入二十世纪遇到布劳威尔以前，我们不会碰到能与他匹敌的人。

24

厄里亚城的芝诺(公元前495—435)是数学家帕门尼茨的朋友，在与他的保护人一起访问雅典时，他发明了四个简单的悖论，把一些自鸣得意的哲学家们震惊得不知所措，他们无法以言辞来消除这些悖论。据说芝诺是一个自学成才的乡村孩子。我们并不想决定他发明这些悖论的目的——权威们对此有各种各样不同的看法——我们将仅仅叙述它们。从这些悖论中可以很清楚地看出，

芝诺会反对我们刚才论及的二英寸长直线的"无限连续"的分割。这反映在他的前两个悖论中。这两个悖论是：两分法悖论(Dichotomy)和阿基里斯(Achilles，希腊的神行太保——译者)悖论。不过，后两个悖论表明，他会同样激烈地反对相反的假设，即直线不是"无限可分"的，而是由可以用 1、2、3、…… 来数尽的离散点组成的。全部四个悖论构成了一堵铁墙，阻挡了一切进步的可能。

第一，二分法悖论。运动是不可能的，因为运动的物体在到达目的地之前必须到达路程的中间点，而在它到达中间点之前，它又必须到达路程的四分之一点，等等，没有穷尽。因此运动甚至永远不能开始。

第二，阿基里斯悖论。奔跳中的阿基里斯永远也不能超过在他前面慢慢爬行的乌龟，因为他必须首先到达乌龟的出发点，而当他到达那一点时，乌龟又向前爬了，所以仍在他前面。重复这个论点，我们很容易看出乌龟总是在前面。

现在看另一方面。

箭的悖论，飞矢在任何瞬间都是既非静止也非运动。如果瞬刻是不可分的，箭就不能运动，因为如果它动了，瞬刻就立即是可分的了。但是时间由瞬刻组成，如果箭在任一瞬刻都不动，它在任何时间内也不能动，因此它总是保持静止。

操场悖论。"为了证明一半的时间可以等于两倍的时间，考虑三行物体，

位置一		位置二	
(A)	0 0 0 0	(A)	0 0 0 0
(B)	0 0 0 0	(B)	0 0 0 0
(C)	0 0 0 0	(C)	0 0 0 0

位置二中的一个(A)静止，而其它两个(B)、(C)以等速向相反方向

运动。当它们都在路程中的同一距离时，(B)通过(A)中的一个物体时就将通过(C)中的两个物体。因此它通过(A)的时间是它通过(C)的时间的二倍。但(B)和(C)到达(A)的位置所需的时间相同。因此两倍的时间等于一半的时间”。(伯内特的译文)。把(A)想象为圆柱形的栅栏有助于理解。

以非数学语言说出的这些问题，就是早期探索连续和无限的人们所碰到的困难。在约二十年前写成的书中，人们认为：就象欧多克斯、维尔斯特拉斯和戴德金发明的“无理”数(诸如2的平方根)那样，由康托尔创立的“无限的正确理论”已经一劳永逸地解决了所有这些困难。这样一个论述在今天无法为数学思想的各个学派所接受。所以，在详细讲述芝诺的同时，我们事实上也正在讨论我们自身。希望进一步了解他的人，可以参阅柏拉图的«巴门尼德篇»，我们要说的只是，芝诺最后由于叛国罪或诸如此类的事丢了脑袋。接下去，我们将论述那些没有由于他的论点丢了脑袋的人。那些仍然支持芝诺的人对数学的进展所作甚微，但是他们的后继者们却做了许多撼动数学基础的事情。

克尼杜斯的欧多克斯(公元前408—355)继承的仅只是芝诺留给世界的一片混乱。和不止一个在数学上留下了印迹的人一样，欧多克斯青年时代饱受极度贫穷之苦。欧多克斯在世时，柏拉图正当盛年，当欧多克斯去世时，亚里士多德年约三十岁。柏拉图和亚里士多德这两位古代最主要的哲学家，对于芝诺注入数学推理中的疑义都很担心；而欧多克斯在他的比例理论——“希腊数学的王冠”——中，试图解释这些疑义，他的解释一直到十九世纪的最后二十五年仍在起作用。

欧多克斯年轻时从太兰吐姆移居雅典，在那里他就学于第一

流的数学家、行政官员、军人阿基塔斯(Archytas, 公元前428—347)。到达雅典后,欧多克斯很快就遇见了柏拉图。由于他很穷,无法住在柏拉图的学园附近,他就每天从比雪埃夫斯往返跋涉。在比雪埃夫斯,鱼和橄榄油很便宜,住处也很容易找到。 26

虽然从技术意义上说,柏拉图不是数学家。但人们称他为"数学家的创造者",无可否认的是,他确实刺激了许多比他高明得多的数学家去创造一些真实的数学。如我们将要看到的,他对数学发展的总的影响可能是有害的。但他确实看出了欧多克斯的才能,并成为他忠实的朋友,只是到了后来他开始对他这个才华横溢的受保护者产生了类似嫉妒的情感,才终断了友谊。据说柏拉图和欧多克斯曾一起去埃及旅行。如果确系如此,那么欧多克斯似乎不象他的前辈毕达哥拉斯那样轻信;然而柏拉图却吞下了大量东方数-神秘主义,并受了它的影响。欧多克斯发现自己在雅典不受欢迎,最后在息稷卡斯(Cyzicus, 小亚细亚北部的地名——译者)定居、教学,并在那里度过余生。他研究医学,除数学之外,还开业行医并担任议员。好象所有这些还不够他忙的,他又认真研究天文学,并作出了突出的贡献。他的科学观较他那些拘泥文字,卖弄大道理的同代人要领先几个世纪。象伽利略和牛顿一样,他轻视无法用观察和经验来验证的关于物理世界的推测。他曾经说过'要是能通过到达太阳去确定太阳的形状、大小和性质,他愿愉快地分享法厄同①的命运,但在此期间他不愿瞎猜。

我们可以从一个很简单的问题了解到欧多克斯都做了些什么。我们用长乘宽来算一个矩形的面积。这虽然听起来明白易懂,但除非这两条边都可以用**有理数**来度量,否则会引起严重的困难。

① 法厄同——希腊神话中太阳神赫利俄斯之子,曾驾驶其父之日轮马车,几将地球毁于大火,最后自己葬身火海。——译者

略过这些特殊的困难，我们在如下一类最简明的问题中以更明显的形式看看它们。这类问题是：求一条曲线的长度，或一个曲面的面积，或者由曲面所围成的体积。

任何想要检验自己的数学才能的年轻天才，可以试着去设想一个方法来解决这类问题。倘若他从来没有在中学里学过怎样作，他如何着手严格地证明已知半径的圆的周长公式呢？不论是谁，只要完全靠自己的力量做到了这件事，就有资格自称为第一流的数学家。一离开由直线或平面所界的图形，我们立刻就闯入了连续的全部问题、无限的谜和无理数的混乱之中。欧多克斯设计了第一个逻辑上令人满意的处理这些问题的方法，欧几里得在他的《原理》第五篇中，为处理这些问题又重新做出了这一方法。欧多克斯在他用于计算面积和体积的穷竭法中，表明我们无需假定"无穷小量"的存在。就数学目的而言，能够通过对一个给定量的连续分割得到尽可能小的量就足够了。

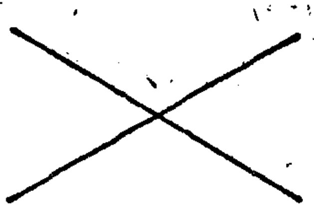
在结束对欧多克斯的论述之前，我们要叙述他关于等比例的划时代的定义，这个定义使数学家们可以象对有理数那样严密地处理无理数。这实际上是无理数的一个现代理论的起始点。

"称四个量的第一个和第二个之比与第三个和第四个之比相等，如果取第一个和第三个量的任何相同的倍数[同一倍数]，第二个和第四个量的任何其它的相同倍数后，从第三个量的倍数大于、等于或小于第四个量的倍数，便有第一个量的倍数对第二个量的倍数的相应关系"。

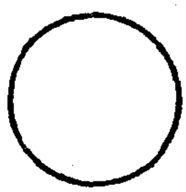
在那些尚未提到的、他们的工作影响到1600年以后的数学的希腊人中，只有阿波罗尼奥斯有必要在这里提及。阿波罗尼奥斯(Apollonius,公元前260?—200?)以欧几里得的方式——至今仍用来教不幸的初学者的方式——发展几何，使它远远超过了欧几里

得(Euclid，公元前330？—275？)留下的状态。阿波罗尼奥斯作为一个这一类型的几何学家——一个综合的“纯”几何学家——在十九世纪的斯坦纳以前是无与匹敌的。

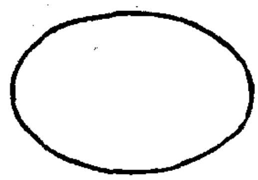
如果用平面去截一个通过它的顶点向两方无限延伸的圆锥，那么平面在锥面上截出的曲线称为圆锥曲线。圆锥曲线有五种可能的类型：椭圆；双曲线，包括两个分支；抛物线，抛射体在空中的轨道；圆；和两条相交的直线。根据柏拉图的公式，椭圆、双曲线和抛物线是“机械曲线”；那就是说，不能只用尺规①画出这些曲线，尽管这些工具可以画出这些曲线中任意一条上的任意数目的点。阿



两条相交的直线



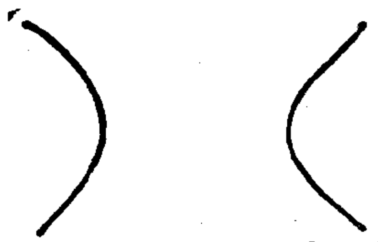
圆



椭圆



抛物线



双 曲 线

波罗尼奥斯及其后继者把圆锥曲线的几何推进到高度完美的境地，在十七世纪和以后的几个世纪的天体力学中，这种几何被证明是最为重要的。确实，尽管开普勒以他关于行星轨道的费力而精

28

① “尺规”两字是按习惯说法译的。这里“尺”的字面意义是“直边”，应理解为没有刻度的尺。——译者

确的计算，为万有引力的出现铺平了道路，但要是希腊的几何学家们没有走在开普勒之前，牛顿就不一定能发现他的万有引力学说。

在后期希腊人和中世纪的阿拉伯人中，阿基米德似乎获得了如同十七、十八世纪牛顿和十九世纪高斯在他们的同代人和追随者中间所获得的同样的敬畏和尊崇。阿基米德是他们中间的无可争辩的首领，是“长老”、“智者”、“大师”、“伟大的几何学家”。回忆他所处的年代，他生活在公元前287—212年。由于普卢塔克，我们对阿基米德的死比对他的生知道得更多。有代表性的历史传记家普卢塔克明显地认为这位数学之王在历史上还不如罗马军人马塞拉斯重要，在他的《传记集》中，关于阿基米德的记述少得就象一大块三明治中的一片薄薄的火腿，这样做或许是不公平的。然而阿基米德正是马塞拉斯今天仍为人们所记忆——和咒骂——的主要原因。在阿基米德的死中，我们将看到愚笨而实际的文明施加于它所毁灭的更为伟大的事物上的第一次影响——已经半摧毁了迦太基的罗马，由于胜利而得意忘形，由于勇猛而披上了帝王的紫袍，进犯希腊，毁坏了它那脆弱的美。

阿基米德在身心两方面都是一个贵族。他是天文学家菲迪阿斯的儿子，出生于西西里的叙拉古，据说他与叙拉古的专制统治者(或称国王)希耶隆二世有亲缘关系。无论如何，他与希耶隆及其子盖隆关系密切，他们两人都对这位数学家之王有很高的赞誉。阿基米德本质上的贵族气质表现在他对今天称为应用科学的学科的态度上。虽然我们认为他即使不是历史上最伟大的机械学的天才，也是最伟大的机械学的天才之一。但作为贵族的阿基米德对自己的种种实用的发明却十分轻视。从某种观点看来，他这样做是有道理的。可以就阿基米德对应用机械学的贡献写出几本书；但从

我们自己对机械学的有偏见的观点看来，这项工作尽管伟大，比之他对纯数学所作的贡献却相形见拙。我们首先来看看关于他的一些已知的事实和关于他的品格的传说。

根据传说，按照伟大的数学家应该是什么样子的流行观念，阿基米德是一个完美的范例。当他沉浸在数学中的时候，他象牛顿和哈密顿一样连吃饭也忘记了。在对待穿着的不经意方面，他甚至超过了牛顿。他在洗澡时，观察到自己浮起的身体，因而作出了他著名的发现：物体在液体中减轻的重量，等于它所排出的液体的重量，于是，他跳出了浴盆，一丝不挂地跑过叙拉古城的大街，高喊着"攸勒卡，攸勒卡！"(找到了，找到了！——古希腊语)。他所发现的就是流体静力学的第一个规律。据说，有一个不忠实的金匠在给希耶隆做的金冠中掺了银，这位暴君怀疑到了这个欺诈行为，就请阿基米德设法鉴定。任何一个中学生都知道如何通过一个简单的实验和一些关于比重的简单计算来解决这个问题。对今天的(美国)海军学校的二年级学生和造船工程师来说，"阿基米德原理"和它大量的实际应用是很有用的，但是第一次看透了这些原理的人却有着非凡的洞察力。人们不确切知道金匠是否有罪；由于这个传说，通常认为他是有罪的。

阿基米德的另一个流传了许多世纪的感叹语是"给我一个支点，我就能移动地球"。(他用的是多里斯地区的希腊方言：πâ βῶ καὶ κινῶ τὰν γâν)。他这样夸口是因为他本人也为自己发现的杠杆原理而深深地感动了。这句话可以成为一个现代科学院的完美的铭文；但奇怪的是它至今没有被采纳。在更准确的希腊语中有另一种译文，但意思是相同的。 30

阿基米德有一个怪癖，与另一个大数学家维尔斯特拉斯相似。据维尔斯特拉斯的姐姐说，当他是一个年轻的中学教师时，要是在

他的视线之内有一平方英尺干净的贴墙纸或者一个干净的袖头，就不能放心地把一支铅笔交给他。阿基米德打破了这个记录。在他那个时候，一片铺满了沙的地板，或满是尘土的坚硬而光滑的地面，就是一种普通的"黑板"。阿基米德有他自己的办法。坐在炉火前，他会把炉灰拨平，在那上面画图。按照当时的习惯，出浴后他在身上涂抹橄榄油，但是这以后他会忘了穿衣服，而沉浸在用指甲在自己涂了油的皮肤上画图。

阿基米德是一只孤独的鹰。他年轻的时候在埃及的亚历山大城上过学，但时间不长，他在那里结交了两个终生的朋友。一个是有才华的数学家科隆，阿基米德对他的人品和才智都很敬重。另一个是厄拉多塞，也是一个优秀的数学家，但非常讲究穿戴。这两个人，特别是科隆，似乎是阿基米德在同代人中觉得唯一可以分享他的思想的人，并且他确信他们会理解他。他通过信件把他最好的工作告诉科隆。在科隆死后，阿基米德就与科隆的学生多西特乌斯通信。

我们暂且不谈阿基米德对天文学和机械发明的贡献，而就他对纯数学和应用数学所做的贡献作一个简略的概括。

他发明了几个求曲线围成的平面图形的面积和求曲面围成的体积的方法，并将这些方法应用于许多特例，包括：圆、球面、抛物弓形、螺线的两条半径和相邻两圈之间的面积，球缺和绕主轴旋转矩形（圆柱），三角形（锥），抛物线（抛物面），双曲线（双曲面）和椭圆（球体）所生成的曲面。他给出了计算 π（圆的周长与直径之比）

31 的方法，并确定出 π 的值在$3^1/_7$和 $3\ ^{10}/_{71}$ 之间；他也给出了近似计算平方根的方法，这些方法显示出他预见到印度人关于连续循环小数的发明。在算术中，他发明了能够写出不论多么大的数的计数系统，这远远超出了希腊人用符号代表数字用以书写或甚至描

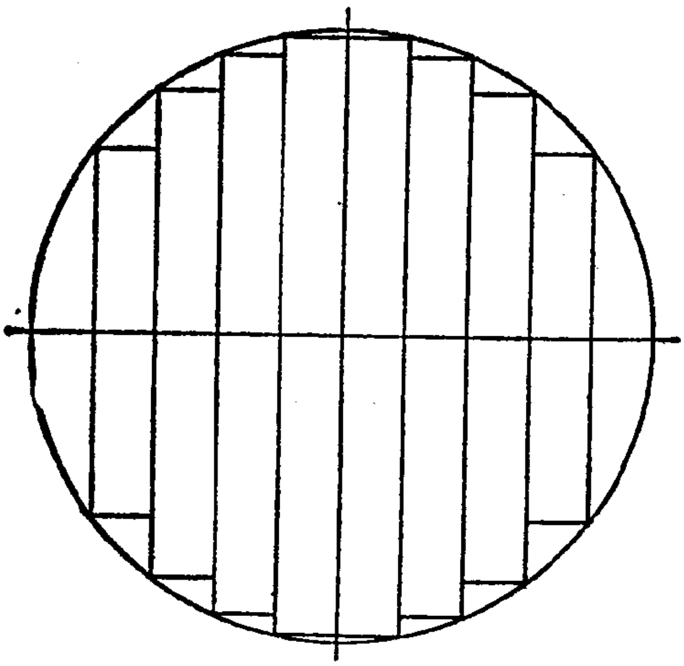
述大数的不科学的计数方法，那种方法实际上是行不通的。在力学中，他建立了几个基本原理，发现了杠杆原理，并把他的力学(杠杆)原理用于计算几个形状各不相同的平面和立体的面积和重心。他创立了整个流体静力学，并把它应用于确定几类浮体的静止位置和平衡位置。

阿基米德不是创作了一件杰作，而是创作了很多杰作。他是怎样做到这一切的呢?他的极其精炼、符合逻辑的说明，没有提供丝毫线索以表明他是通过什么方式得出他惊人的结果的。但是在1906年，希腊数学学者和史学家J. L. 海伯格在君士坦丁堡作出了重大发现，找到了阿基米德寄给他朋友厄拉多塞的一篇直到当时一直被认为已"丢失"了的论文:《论力学定理、方法》。在这篇文章中，阿基米德解释了他怎样通过在想象中比较一个已知面积或体积的图形和立体，和一个未知的图形和立体，从而得到了他要寻求的事实;而一旦知道了事实，那么在数学上证明它，(对他来说)就比较容易了。简言之，他用了他的力学去推进他的数学。这是称他具有现代头脑的原因之一：他用了可以当作武器的一切东西去攻击他的问题。

对于一个现代人，在战争、爱情和数学中，一切都是公平的;而对于许多古代人，数学是按照具有哲学头脑的柏拉图强加于人的一些死板规则来做的愚弄人的游戏。按照柏拉图的说法，在几何中只允许用直尺和圆规作为画图的工具。这就难怪古典几何学家们要为"古代三问题"苦恼许多个世纪了。这三个问题是：三等分一个角;作一个立方体使其体积等于一个已知立方体的二倍;作正方形使其与给定的圆等面积。这些问题都不可能只用尺规解决，不过要证明第三个问题之不可能只用尺规解决十分困难，直到1882年这种不可能性才终于得到证明。所有用其它工具画的图都

32 被称为是"机械的",而这样的图,由于某种只有柏拉图和他的几何化的上帝才知道的神秘的原因,被认为是极其低劣的,在可敬的几何学中是严格禁止的。直到柏拉图死后一千九百八十五年,笛卡儿发表了他的分析几何学时,几何才从柏拉图的束缚中解脱出来。当然,柏拉图在阿基米德出生前六十年或更早就已去世,所以不能指责他没有重视阿基米德方法的灵活有力和运用自如。另一方面,阿基米德没有重视柏拉图的古板守旧的几何概念,他应该得到的只是后人的称赞。

对阿基米德现代性的第二个断定也是基于他的方法。他比牛



顿和莱布尼兹领先两千多年发明了积分学,在他的一个问题中,领先于他们发明了微分学。这二者加在一起就构成了著名的微积分学,它被描述为迄今所发明的用数学探索物质世界的最有力的工具。举一个简单的例子,假设我们要求一个圆的面积。除其它方法以外,我们可以把圆分成许多等宽的平行的长条,切去这些长条的弯曲的两端,使去掉的各个小块的总和达到最小的程度,再垂直

切割这些长条，然后把所得出的所有矩形都加起来。这就给出了所求面积的一个近似值。通过无限增加条的数目并取和的极限值，我们就得到了圆的面积。这个(粗略描述的)取和的极限值的过程就称做积分；实现这样求和的方法称做积分学。在求抛物线弓形的面积和其它问题中，阿基米德所用的正是这个积分。

33

他在其中用到微分学的问题是，在他的螺线上任意给定点上作出切线，如果切线与任意给定的直线之间的夹角为已知，切线就很容易作出，因为要画出通过一个给定点与给定直线相平行的直线的方法很简单。用几何语言描述，找出所提到的夹角(对于任意的曲线而不仅限于螺线)就是微分学的主要问题。阿基米德就他的螺线解决了这一问题。他的螺线是一个点在一条直线上匀速移动的轨迹，这条直线同时绕其上的一个定点以等角速度旋转。要是某个没有学过微积分学的人认为阿基米德的问题是容易的，不妨测定一下他自己解决这个问题要用多少时间。

要是阿基米德能够完成他所想到的一切，那么他的一生就会象数学家应该度过的一生那样平静。他一生的全部冲突和悲剧都集中在他生命的尽头。公元前二一二年，第二次布匿战争正在激烈进行。罗马和迦太基鏖战正酣，阿基米德所在的叙拉古城就诱人地坐落在罗马舰队的航线附近，为什么不围攻它呢？他们围攻了。

罗马军队的执政官马塞拉斯由于自负而趾高气扬，他相信他的卓越的“战备”而不相信他的谋士们，他期望着速战速胜。他满怀信心引以自豪的东西，是拴在一起的八条大木船支撑着的竖琴形高台上的一门原始的大炮。如果是些比较胆怯的居民看到这个闻名的混合舰队降临城下，他们就会将城市的钥匙供手送给马塞拉斯，但希耶隆不会那样做。他对战争也是有准备的，并且是以一

种讲求实际的、马塞拉斯做梦也想不到的方式准备的。

看来阿基米德尽管藐视应用数学，但是在和平时期还是曾向希耶隆的不断的请求让步，并曾向这位专治统治者满意地证明过，数学有时能够成为非常实用的。为了使他的朋友相信，数学的能力不仅限于抽象的推理，阿基米德曾经应用他的杠杆和滑轮的原理，去操纵一艘满载的船，他只用一只手就亲自使船下水了。当战争的乌云开始不祥地逼近时，希耶隆记起了这件事，就请求阿基米德为马塞拉斯准备一个适当的迎击。阿基米德再次离开他的研究工作去满足他朋友的请求，他亲自组成了一个迎击委员会以挫败鲁莽的罗马人。当罗马人到达的时候，他那巧妙的魔法正可怖地等着迎接他们。

竖立在八艘有五行挠的大划船上的那个竖琴形状的、不起作用的东西，与马塞拉斯的名声一起毁灭了。由阿基米德的巨型投石机抛出的一连串每个重达四分之一吨的石块，砸毁了这个笨重无用的玩意。象起重机上的吊钩那样的钩子和铁爪，从城墙上伸向驶近的船只，抓住它们，把它们旋转着抛出去，使它们沉入海底或撞碎在峭壁上。陆上军队被阿基米德的大炮扫杀着，情况也不妙。马塞拉斯向后退却，以便与他的谋士们商量对策，而官方的公报把他的溃败掩饰成后退到后方的预定地点。由于不能再集合起他骚乱的部队去对可怕的城墙进行强攻，这位著名的罗马执政官撤退了。

最后马塞拉斯总算还稍微有点军事常识，当天没有再次发布苦战的命令，放弃了一切正面进攻的打算；他在后方占领了麦加拉，最后从后面偷袭了叙拉古。这一次他走运了。愚蠢的叙拉古人正在举行宗教庆典，为向女神阿耳特弥斯①表示敬意而狂饮。战

① 月亮和狩猎女神。——译者

争和宗教总是造成一些令人厌恶的、没有教养而又冒充绅士的人，正在欢宴作乐的叙拉古人实际上是很虚弱的。他们一觉醒来，发现正在激烈进行大屠杀。阿基米德在屠杀中丧生。

当一个罗马士兵的影子落在了阿基米德画在炭灰地上的图形上时，他才知道城市已经被占领了。一种传说是，那个士兵踩在图上了，阿基米德气冲冲地向他厉声喊道："别弄乱了我的这些图！"另一种说法是，阿基米德拒绝服从士兵要带他去见马塞拉斯的命令，他要首先解出他的问题。不管是哪一种情况，那个士兵勃然大怒了，拔出了他那光荣的剑，刺死了这位手无寸铁的七十五岁高龄的几何学家。阿基米德就这样死了。

正如怀特海①所说："没有一个罗马人由于全神贯注于对一个数学图形的冥想而丧生。"

① 怀特海(Alford North Whitehead, 1861—1947)，英国唯心主义哲学家、数学家。——译者



笛卡儿

第三章 绅士、军人和数学家

笛 卡 儿

〔解析几何学〕远远超出了笛卡儿的任何形而上学的推测，它使笛卡儿的名字不朽；它构成了人类在精确科学的进步史上所曾迈出的最伟大的一步。

——约翰·斯图尔特·米尔

"我只要求安宁与平静"。这些话是这样一个人说的，他要把数学领向新的途径，改变科学历史的进程。勒内·笛卡儿在他活跃的一生中，经常不得不在军营里去寻找安宁，不得不避开好奇而苛求的朋友们，去寻找他渴望的、在孤独中冥思的平静。这个仅仅要

求安宁与平静的人，1596年3月31日出生在法国、靠近图尔的拉埃耶，生在重建宗教和政治的阵痛中陷于战火中的欧洲。

他所处的时代并非与我们的时代不同。旧秩序正在迅速地消亡；新秩序尚未建立起来。中世纪掠夺成性的贵族、国王和皇家子弟繁衍出大群的统治者，他们有着公开抢劫的盗贼的政治伦理，而且大多数只有马厩小厮的智慧。只要我的臂膀强壮有力，能够把你的东西抢过来，那末即便公理认为是你的东西也是我的。这大概就是欧洲历史上称为文艺复兴后期的那个辉煌时期的一幅准确的图画，然而它与我们自己对文明社会的实际情况的不断变化的判断相当一致，这种判断则是出自我们的个人经历。

在笛卡儿的时代，掠夺性的战争之上还沉积着大量的宗教的偏执和不容异端，这种偏执孵化出了更多的战争，并使公正(不带偏狭的)的科学研究变成非常危险的工作。而在这一切之上，还得加上对基本卫生常识的普遍无知。从卫生的角度看，富人的公馆就象穷人在肮脏和愚昧中挣扎的贫民窟一样污浊；一再发生的瘟疫完全不顾人口状况，帮助一次次的战争，把有生育能力的人口减少到了不能再少的限度。过去的日子就写到这里。 36

在非物质的、永恒的一面，情况要好得多。笛卡儿所处的时代确实是斑斑驳驳的文明史上最伟大的智力时期之一。这里只提出几个生活时期部分与笛卡儿交叠的杰出人物。我们回想起，费马和帕斯卡是他在数学上的同代人；莎士比亚辞世时笛卡儿二十岁；笛卡儿比伽利略多活了八年，笛卡儿卒年牛顿八岁；密尔顿出生时笛卡儿十二岁，血液循环的发现人哈维比笛卡儿多活了七年，而当奠定了电磁学基础的吉尔伯特去世时，笛卡儿七岁。

勒内·笛卡儿出生在一个古老的贵族家庭。虽然勒内的父亲并不富有，但他境遇还算宽裕。他的儿子注定要从事的是绅士的

事业——履行贵族的义务——为法国服务。勒内是他父亲和前妻让娜·布罗夏尔生的第三个、也是最后一个孩子，母亲在他出生后几天就去世了。这位父亲看来是一个极有理智的人，做了力所能及的一切以弥补孩子们失去的母爱。一个极好的乳母代替了母亲的位置，再次结婚的父亲一直以关注而明智的眼光注视着他的"小哲学家"，这个小哲学家总想知道阳光下万物的本原，和乳母给他讲的天国的奥秘。笛卡儿并不真是一个早熟的孩子，但是他脆弱的健康状况迫使他把活力用在智力的探索上。

由于勒内体质脆弱，父亲对他的功课也就听其自然。不过这孩子自己主动地学了下去，他的父亲也明智地由他自便。当笛卡儿八岁时，他的父亲认为正式教育不能再延迟了。经过多方聪明的查询，他选择了在拉弗莱什的耶稣会学院作为他儿子的理想学校。

院长夏莱神父立刻就喜欢上了这个面色苍白、信赖人的小男孩，特别考虑了他的情况。院长看出要教育这孩子的心智，必须先增强他的身体，并且注意到笛卡儿似乎比同龄的孩子需要更多的休息，于是告诉他，他早晨想躺到多晚就可以躺到多晚。除非他想去教室和伙伴们在一起，他不必离开自己的房间。从此以后，除了临近他生命终点的那一段不幸的时期以外，笛卡儿终生保持着这个习惯，当他想要思考时，他就躺在床上度过他的早晨。他在中年时期回顾在拉弗莱什的学生生活时，曾经断言，那些在寂静的冥思中度过的漫长而安静的早晨，是他的哲学和数学思想的真正源泉。

他的功课很好，成了一名娴熟的古典学者。按当时的教育传统，他特别注重拉丁文、希腊文和修辞学。但这些只是笛卡儿学到的一部分知识。他的教师们自己就是出入上流社会的人，他们的工作就是把他们所负责的学生训练成为"绅士"——在这个降了格的字眼的最好的意义上——般的人物。当笛卡儿十七岁，于1612

年8月离开学校时，他已经与夏莱神父成了终身的朋友，并且几乎能在社会上站住脚了。夏莱只是笛卡儿在拉弗莱什结交的许多朋友中的一个；另一个，著名的业余科学家和数学家梅塞内（后来的神父），一直是他的老朋友，以后成了他的科学代理人和使他免于烦恼的主要保护者。

笛卡儿特殊的才能，在他离开学校很久以前就显露出来了。早在他十四岁，躺在床上冥思时，就开始怀疑他正在学习的"人文学科"，相对来说对人类并无重大意义，肯定不是那种能使人类控制自己的环境，指导自己的命运的学问。而要他盲目接受的那些哲学、伦理学和道德学的权威性教条，也开始显得只不过是些毫无根据的迷信了。笛卡儿坚持他幼年的习惯，决不因为是权威的东西就接受，他开始直截了当地对所谓的证明和诡辩逻辑提出疑问，而这些正是好心的耶稣会会士们要善于推理的他相信的。由此他很快转变到激励他毕生事业的基本疑点：我们如何理解事物？还有，也许是更重要的，要是我们不能确定地说我们知道点什么，我们又何从发现我们可能有能力理解的那些事物？

离开了学校以后，笛卡儿比过去更长时间、更努力、更忘我地思考着。他冥思的第一个果实是他领悟了一个异端的真理，即逻辑本身——中世纪烦琐哲学家们的伟大方法，至今仍在人文学教育中继续沿用着——对任何创造性的人类目标都贫乏而毫无用处。他的第二个结论与第一个密切相关：哲学、伦理学、道德学中的证明，与数学的证明相比，花哨而虚假。他之喜欢数学，就象一朝发现了自己的翅膀的鸟儿之喜欢天空。他问道，那么我们怎样去发现事物呢？答案是：通过科学的方法，不过笛卡儿并没有这样称呼它，他说的是：通过控制下的实验并对这样实验的结果应用严格的数学推理。

38

人们可能要问，从他的理性怀疑主义中他得到了什么。只得到了一个事实，仅仅一个："我存在。"如他所说就是"Cogito ergo sum"(我思故我在)。

十八岁时，笛卡儿彻底厌恶了他已经花费了这样多辛勤劳动的、枯燥无味的研究。他决定去见见世面，从有血有肉的活生生的生活中学习，而不仅从纸张和油墨中学习。幸而他境况优裕，他想做的都能去做。由于在童年和少年时代阻止他正常生活的健康状况明显改善，他现在尽情享受适于他那种年龄和地位的年青人的欢乐，并迫不及待地攫取这种欢乐。他抛开了父亲庄园里那种使人沮丧的有节制的生活，与其他几个渴望过荒唐生活的轻浮子弟一起，在巴黎住了下来。赌博是那个时代的绅士们的一种本事，笛卡儿也热情地去赌了——并且赢了不少。不管他干什么，他都全力以赴。

这种状况并未持续多久。笛卡儿厌倦了他那些淫秽下流的伙伴，他悄悄离开了他们，在现在的圣—日耳曼郊区租了简朴而舒适的房间，在那里住下来，连续两年埋头于数学研究。但是他的放荡行为最终暴露了他，他那些浮躁的朋友们突然喧闹着去拜访他。这个勤勉的年轻人抬起头来，认出了他的朋友们，也看出他们全都是令人无法容忍的讨厌鬼。为了得到安宁，笛卡儿决定去从军。

他的第一段军人生活就这样开始了。他首先去了荷兰的布雷达，在显赫的奥兰治亲王莫里斯麾下学习这一行当。笛卡儿原本希望在亲王率领下参加战斗，失望之余，他厌恶地离开了军营的平静生活，因为那种生活正在变得象巴黎的喧闹那样难以忍受，于是他赶到德国去了。在他生涯的这一时刻，他首次显露出一个可爱的弱点，这个弱点他始终也没有丢掉。象小孩子一个村子、一个村子地跟踪马戏团一样，笛卡儿抓住每一个可能的机会去观看炫丽的大场面。现在一个这样的场面就要在法兰克福出现了，斐迪南二世

要在那里举行加冕礼。笛卡儿及时赶到，观看了全部洛可可式①的盛况。他大为高兴，再次寻求他的职业，加入了巴伐利亚选帝侯②的军队，当时这支军队正在对波西米亚作战。

军队驻守在多瑙河岸靠近诺伊堡的小村庄的冬营里。在那里，笛卡儿找到了他一直在寻找的东西：安宁与平静。他独处自省，他发现了自己。

笛卡儿的"转变"——如果可以这样叫的话——的故事是非常奇特的。在1619年11月10日，圣马丁之夜，笛卡儿做了三个生动的梦。他说这些梦改变了他的全部生活进程。他的传记作者(巴耶)记述了在庆祝圣马丁节的盛宴上有过狂饮的事实，他认为笛卡儿离开时，还没有完全从酒气中恢复过来。笛卡儿自己则把他的梦归之于完全不同的原因，他特别强调在升华阶段以前，他有三个月没有碰过酒。没有理由怀疑他的话。这些梦是奇异地联在一起的，完全不象狂饮暴食之徒、特别是胃里灌满了酒精的人做的梦(根据专家的看法)。表面上看来，它们可以很容易地解释为：做梦人下意识地解决了他追求理性生活的热望，与他对自己实际生活之无益的认识，这二者之间的矛盾。无疑，弗洛伊德主义者已经分析过这些梦了，但是，看起来似乎任何维也纳方式的古典分析，也无法进一步阐明解析几何的发明，而这一点正是我们此处的主要兴趣所在。几个神秘的或宗教的解释，似乎也不大可能在这方面有所裨益。

在第一个梦中，笛卡儿被邪恶的风从他在教堂或学院的安全

① 洛可可式——欧洲十七、八世纪建筑、艺术等的一种风格，其特点是纤巧、浮华、烦琐。——译者

② 选帝侯——德意志有权选举神圣罗马帝国皇帝的诸侯。——译者

居所，吹到风力无法摇撼的第三个场所；在第二个梦中，他发现他自己正用不带迷信的科学眼光，观察着凶猛的风暴，他注意到一旦看出风暴是怎么回事，它就不能伤害他了；在第三个梦中，他在朗诵奥索尼厄斯的诗句，首句为“*Quod vitae secatabor iter?*”（我将遵循什么样的生活道路？）

还有很多其它的东西。在这一切之中，笛卡儿总是说他充满“热情”（也许是指一种神秘的意义），并说，如在第二个梦中那样，梦境向他揭示了一把魔钥匙，这把钥匙能打开大自然的宝库，并使他掌握至少是所有科学的真正基础。

这把神奇的钥匙是什么呢？笛卡儿自己似乎没有明确地告诉任何人，但是人们通常认为，这正是代数之应用于几何，简言之，就是解析几何，更一般地说，就是运用数学来探索自然现象，今天的数学物理就是这方面最高度发展的例子。

那么1619年11月10日就是解析几何的公认的诞生日，因此也是现代数学的公认的诞生日了。到这个方法公诸于世还需要十八年。这期间笛卡儿继续他的军人生涯。数学应该代表他感谢战神，因为在布拉格的战斗中，没有半粒子弹打掉他的脑袋。将近三个世纪以后①，二十来个有希望的年轻数学家就没有这样幸运了，而这要归之于笛卡儿的梦所激发的那门科学的进展。

这个二十二岁的年轻士兵现在认识到了他过去从未认识到的事情：如果他要发现真理，他就必须首先完全抛弃从别人那里得来的观念，而依靠他自己的头脑孜孜不倦的探索，给自己指明道路。他从权威那里接受的一切知识都必须抛在一边；他所继承的道德和智力观念的全部结构都必须毁掉，唯有人类理智中原始的、世俗

① 指1914年第一次世界大战时。——译者

的力量，才能把它们更永久地建造起来。为了抚慰他的良心，他祈求圣玛利亚在他异端的计划中予以帮助。他一面期待着她的援助，许愿去罗莱特圣母大殿朝圣，一面立刻着手对宗教中人所共知的事实作了极其挖苦的、破坏性的批评。然而，他一找到机会就及时履行了他这方面承担的契约。

41

同时，他继续他的军人生涯，1620年春天在布拉格战役中体验到了真正的战斗。笛卡儿与其余的胜利者们一起，谢天谢地地进入这座城市。在吓坏了的难民中，有时年四岁的伊丽莎白公主①，她后来成了笛卡儿最喜爱的弟子。

最后，在1621年的春天，笛卡儿餍足了战争。他与另外几个放荡的老爷兵一起，伴随着奥地利人进入特兰西瓦尼亚，他寻找光荣，并找到了它——不过是在另一方面。但是，如果说他现在和战争打交道已经够了，就哲学而言他还欠成熟。巴黎的瘟疫和对胡格教派的战争，使得法国比奥地利更缺少吸引力。北欧却是和平而干净的，笛卡儿决定去访问北欧。一切都进行得很顺利，笛卡儿辞去身边的人，只留下一个扈从，乘上了开往东弗里斯的船。这对那些凶残的船员可真是天赐良机，他们决定袭击这个富有的乘客，劫掠他，把他的尸体扔去喂鱼。对他们的计划来说，不幸的是，笛卡儿懂他们的语言。他突然拔出他的剑，强迫他们把船划回岸边，解析几何再次逃脱了战斗、谋杀和突然的死亡等等灾难。

接下来的一年，笛卡儿访问荷兰和他父亲的住处雷恩，过得相当平静。这一年年底他回到了巴黎，而在那里，他那沉默寡言的态度和多少有些神秘的容貌，立刻使他被指责为罗希克鲁斯②会员。

① 莱因地区巴勒登的选帝侯、波西米亚的国王腓特烈的女儿，英格兰詹姆斯一世的外孙女。

② 罗希克鲁斯会员(Rosicrucian)——自称系十七与十八世纪流行的一种秘密结社的会员，此秘密团体有各种秘传之知识和力量，并宣扬宗教的神秘教义。——译者

笛卡儿无视这些流言蜚语，他象哲学家般的动脑筋，玩弄权术，想为自己在军队中谋得一项任命。当他失败时，他也并不真的失望，因为他可以自由自在地去游览罗马，他在那里欣赏到了他从未见过的最华丽的场面，由天主教教会主持的每二十五年一次的庆典。有两方面的原因，这次意大利之行对笛卡儿的智能发展有重要意义。他的哲学，迄今还不为普通人所理解，这是由于这位被弄得不知所措的哲学家，看够了从欧洲的各个角落聚集来接受罗马教皇祝福的无知的人群，总是对下等人抱有偏见。同样重要的是笛卡儿未能会见伽利略。要是这位数学家身上的哲学家成分更多一些，能够在这位现代科学之父的脚下坐上一、两个星期，那么他自己对物质世界的思索就不会那样异想天开了。笛卡儿从他的意大利之行中得到的只是对他这位举世无双的同代人的恶意嫉妒。

42 笛卡儿在罗马休假之后，立即与萨瓦公爵一起参加了另一场血腥的战斗，在这场战斗中他表现出众，因而被授与中将称号。但是他有足够的理智，拒绝了这项任命。笛卡儿回到了红衣主教黎塞留和爱闹事的达塔尼昂①——后者近乎虚构，而前者还不如吹牛夸口可信——的巴黎，安顿下来，沉思了三年。尽管他有那些崇高的思想，他可不是一个穿着脏罩衫的老学究，而是一个衣冠楚楚、穿着讲究的上等人。他身着时髦的塔夫绸，佩带一把与他的绅士身份相称的剑。为了给他漂亮的外貌最后修饰一下，他给自己冠上了一顶硕大、宽边、插着鸵鸟毛的帽子。这样装扮起来，他就可以对付出没于教堂、公共场所和大街上的凶手们了。有一次，一个喝醉了酒的乡巴佬侮辱笛卡儿带着的妓女，这个发怒的哲学家纯粹是以达塔尼昂的疾速的方式，追逐着这个卤莽的傻瓜。笛卡儿打

① 达塔尼昂为大仲马名著《三个火枪手》中的人物。该书描写黎塞留当政时期的法国。——译者

飞了醉鬼的剑，却饶了他的性命，并不是因为这醉鬼是一个无用的剑客，而是因为他太肮脏了，没法在一位美丽的女人面前杀死他。

既然已经提到了笛卡儿的一位女相好，我们可以再提一提另外两个，其它的就不必说了。笛卡儿很喜欢女人，甚至与一位妇女生过一个女儿。那孩子的夭折深深地影响了笛卡儿。他始终没有结婚的原因，可能如他对一位期待着与他结婚的妇女说的那样，他宁可要真理而不要美女，但似乎更可能是因为他太精明了，不会把他的安宁与平静抵押给某个胖胖的、富有的荷兰寡妇。笛卡儿的经济状况不过中等水平，但他知道什么时候就够用了。为此他曾被说成是冷酷而自私的。但是这样说似乎更公正一些：他知道他要去干什么，他了解他的目标的重要性。他对自己的爱好是适当的、有节制的，可并不吝啬，他从来不强迫家里的人接受他偶尔为自己规定的、斯巴达式的养生之道。他的仆人非常爱他，他们离开他很长时间以后，他还关心他们的福利。在他临终前跟着他的小厮，为失去了他的主人悲伤了许久。所有这些听起来都不象是自私。

笛卡儿还曾被人们指责为不信神。没有什么比这更不真实了。尽管他在理性上是个怀疑主义者，他的宗教信仰是真正不折不扣的。他确实把宗教比作他的乳母，他就是从她那里接受的宗教，并说他发现依靠宗教和依靠他的乳母同样可以得到安慰。一个有理性的头脑，有时是世界上合理性与不合理性的最莫名其妙的混合物。

43

还有一个怪癖影响着笛卡儿的全部行为，只是在军队的粗暴的训练下，他才渐渐摆脱了它。在他娇弱的童年时代那些必要的溺爱，使他总是怀疑自己有病，多年来，对死亡的难以忍受的恐惧使他意气沮丧。这无疑是他进行生物学研究的渊源。他到中年时，才能够衷心地说，大自然是最好的医师，而保持健康的秘密就在于丢开对死亡的恐惧。他不再焦急地去寻找延年益寿的方法了。

笛卡儿在巴黎平静冥思的三年，是他一生中最幸福的时期。伽利略用他粗糙的望远镜作出的辉煌的发现，使半数欧洲的自然哲学家都把时光打发在透镜上。笛卡儿也以这种方法自娱，但没有作出什么惊人的新发现。他的才智主要在数学和抽象思维。他在这个时期作出的一项发现，即力学中的有效速度原理，至今仍然有重要的科学意义。这确实是第一流的工作。他发现没有什么人理解或重视这项发现，就放弃了抽象的问题，转向他认为所有研究中最高深的对人的研究。但是，正象他冷淡地说的那样，他不久就发现，懂得人是什么的人数，与自认为懂得几何学的人数相比，是微不足道的。

直到此时，笛卡儿还什么也没有出版过。他那迅速增高的名声又招来了大群赶时髦的外行，笛卡儿再次到战场上去寻找安宁与平静，这次是跟着法国国王去围攻拉罗谢尔。在那里，他碰上了那个迷人的老流氓黎塞留红衣主教，给他留下深刻印象的不是红衣主教的狡诈多谋，而是他的神圣虔诚，此人后来倒为笛卡儿做了好事。战争胜利结束了，笛卡儿毫发无伤地回到了巴黎，这次他要经受第二次转变的磨难，并永远抛弃无益的生活。

他现在(1628年)三十二岁了，只是他那不可思议的好运道保护了他，使他的躯体免遭毁灭，使他的思想免于泯灭。在拉罗谢尔的一颗流弹就可能轻而易举地剥夺笛卡儿想为人们所记忆的全部要求，他终于认识到，如果他要达到目的，那么现在正是该上路的时候了。两个红衣主教，德·贝律尔和德·巴涅，把笛卡儿从他那消极淡漠、无所作为的状态中唤醒，诱导他公开他的思想，为此，科学界应该永远感激这两个人，特别是第一个。

44

那个时代的天主教的教士们从事并热爱科学，这与狂热的新

教徒形成了令人欣慰的对照，那些新教徒的偏执使科学在德国销声匿迹。笛卡儿与德·贝律尔和德·巴涅结识后，在他们和蔼的鼓励下，就象玫瑰花一样怒放了。特别是在德·巴涅的晚会上，笛卡儿对一位叫M.德·尚多的人(他后来因为伪造罪被吊死，但愿这不是笛卡儿的那些关于诡辩的课程的结果)直率地讲了他的新哲学。为了解释区别真理与谬误的困难，笛卡儿着手提出了十二个无可反驳的论据，说明任何不容置疑的真理的谬误性，反之，对任何公认的谬误的真理性，他也提出了同样无可反驳的论据。被弄得莫名其妙的听众问道，那么仅仅依靠人怎样把真理和谬误区分开呢？笛卡儿透露：为了作出所需要的区分，他有了(他认为他有了)一个不会出错的、从数学中得出的方法。他说，他希望并且计划表明他的方法是如何通过机械创造的手段，应用于科学和人类的福利。

德·贝律尔被尘世间全部王国的幻影深深地打动了，笛卡儿就是用这个幻影从哲学思辩的高峰引诱他的。他明明白白地告诉笛卡儿，与世人分享他的发现是他对上帝应负的责任，他威胁笛卡儿，要是他不这样做，等待他的将是地狱之火——或者至少也要失去进天堂的机会。笛卡儿是一个虔诚的天主教徒，他无法拒绝这样一个恳请。他决定出版。这是他的第二次转变，时年三十二岁。他立刻隐居到荷兰去实现他的决定，那里寒冷的气候对他更为适宜。

此后的二十年，他在整个荷兰游荡，从来没有在一个地方呆很久。他是一个在无名小镇、乡村旅店和大城市的偏僻角落隐居的沉默的隐士，他以一定的方式与欧洲的主要学者有过许多关于科学和哲学的通信，这些信件都通过他在拉弗莱什上中学时的可靠的朋友梅塞内神父代转，只有梅塞内在任何时候都知道笛卡儿的秘密地址。距离巴黎不远的小兄弟会修道院的会客室成了交换(通过梅塞内)观点、数学问题、科学和数学理论、异议和答案的场所。

笛卡儿在荷兰长期漂泊期间，除了他的哲学和数学之外，还进行了大量的其它研究。光学、物理学、解剖学、胚胎学、医学、天文观察和气象学，包括对虹的研究，都在他不停的活动中占有一席之地。在今天，任何一个把精力分散在这样多性质不同的学科上的人，只能算作一个无事穷忙的半瓶醋。但在笛卡儿的时代却不是这样，一个有才干的人仍然可以期望在几乎所有他感兴趣的科学分支中发现一些有趣的东西。笛卡儿对碰到的一切机会都能充分利用；去英国的一次短短的旅行，他就通晓了磁针的秘密功效；于是磁学立刻就得被包括在他那包罗万象的哲学中了。关于神学的种种推测也引起了他的注意。在他整个推理过程中，他的头脑一直被他早年所受教育的恶梦笼罩着，而即使他能摆脱它，他也不会那样做的。

笛卡儿收集和想出的一切，都要写进一部宏伟的论著《论世界》中。1634年，笛卡儿三十八岁，这部论著已到了最后修改阶段，它将作为送给梅塞内神父的新年礼物。巴黎的学者都急于看到这部杰作。梅塞内已经得到了许多精选出来的部分，但是还没有看到这部匠心之作的全貌。可以这样描述《论世界》而没有什么不敬：如果《创世记》的作者知道的科学和哲学象笛卡儿知道的那样多，那末他可能就会写出这样一本书。笛卡儿试图用他的解释来弥补上帝创造世界这一说法的不足，也就是说，为之提供一个合理的原理，一些读者在圣经中六天创造世界的故事中已经感觉到了这种不足。从三百年后的今天看来，在创世记和笛卡儿之间似乎没有什么好选择的。要我们理解何以象《论世界》这样一本书，竟会使一个主教或罗马教皇严厉而杀气腾腾地大发雷霆，是有些困难的。事实上谁也不理解；笛卡儿看到了这一点。

笛卡儿知道教会法官的判断力。他也知道伽利略的天文学研究和这个无所畏惧的人对哥白尼体系的支持。事实上，笛卡儿在最

后完成他的著作以前，正焦急地等待伽利略最新著作的出版。然而 46
他收到的不是一位朋友答应寄给他的这部著作，而是令人晕眩的消息：伽利略尽管已届七十高龄，并与有势力的托斯卡纳公爵交情甚厚，却被送上了宗教法庭，并被迫(1633年6月22日)下跪，发誓放弃哥白尼日心说这个异端。要是伽利略拒绝发誓放弃他的科学知识，他会发生什么意外，笛卡儿只能猜度了。不过布鲁诺、瓦尼尼和康帕内拉的名字又浮现在他的脑海里。

笛卡儿吓坏了。在他自己的书中，他理所当然地阐述了哥白尼的体系。在他这方面，他比哥白尼和伽利略有机会做到的要更大胆得多，因为他对于使神学科学化感兴趣，而他们对此不感兴趣。他已经使自己满意地证明了既存的宇宙秩序，并且他认为他已经指出，不管上帝曾经创造了多少特殊的宇宙，这些宇宙在"自然规律"的作用下，必定或迟或早符合宇宙秩序，并演变成为实际存在的这个宇宙。简言之，笛卡儿声称，由于他的科学知识，他所知道的大自然及上帝的意向，比之不论《创世记》作者所知道的、还是神学家们所曾梦想的都要多得多。如果伽利略因为他那温和而保守的异端被迫下跪，那么笛卡儿还能指望些什么呢？

如果说笛卡儿没有出版《论世界》只是因为害怕，那就忽略了事实真相中更重要的部分。他不只是害怕——任何精神健全的人都会害怕：他是被深深伤害了。他确信哥白尼体系的真实性，就象他确信自己的存在一样。但是他也确信罗马教皇之绝无谬误。现在教皇正因为反对哥白尼而使自己象头蠢驴。这是他首先想到的。他受过的诡辩的教育帮了他的忙。用某种办法，通过一些神秘的、不可思议的、超人的拼合，罗马教皇和哥白尼还会被证明是正确的。从这个尚未显示出来的毗斯迦山①，笛卡儿确实希望并且盼望着有一天

① 毗斯迦山(*Pisgah*)，在约旦河以东，《圣经》中谓摩西曾从此山眺望上帝赐给亚伯拉罕的伽南地方。——译者

能够在哲学的平静中俯视到明显的矛盾，并看着它消失在和解的光辉中。要他放弃罗马教皇或是哥白尼实在不可能。所以他不出版他的书，既保持他对教皇之绝无谬误的信仰，也保持他对哥白尼体系之真实性的信仰。为了抚慰他下意识的自尊心，他决定《论世界》应当在他死后出版：到那时也许教皇也死了，矛盾就自行消失了。

笛卡儿不出版《论世界》的决定也波及到他的全部著作，但在1637年，笛卡儿四十一岁时，他的朋友们说服了他，使他答应出版他的杰作，书名译为《关于科学中正确运用理性和追求真理的方法论的谈话。进而，关于这一方法的论文，屈光学、气象学、几何学》。这部著作被简称为《方法谈》，出版于1637年6月8日。那么这一天就是解析几何诞生于世的日子了。在说明解析几何在哪些方面优于古希腊的综合几何之前，我们先随着它的创作者走完他的人生道路。

在说明了笛卡儿推迟出版他的著作的原因之后，现在该是来谈谈这个故事的另一面，也是较光明一面的时候了。

笛卡儿一直害怕而实际上从未反对过他的教会，现在非常慷慨的来帮助他了。黎塞留红衣主教给了笛卡儿以出版的特权，他可以在法国或在国外出版任何他想写的东西。(不过，我们可以顺便问一下，黎塞留红衣主教，或者任何其它的人，通过什么样的权利、神意或其它什么东西，竟能指挥一个哲学家、科学家什么应该出版，什么不应该出版呢？)但是在荷兰的乌得勒支，信奉新教的神学家们粗暴地指责笛卡儿的著作是无神论的，对那个称为“国家”的神秘的实体是危险的。开明的奥兰治王子则把他的权重置于笛卡儿这一边，尽全力支持了笛卡儿。

从1641年秋天起，笛卡儿一直住在荷兰境内靠近海牙的一个

安静的小村子里，被放逐的伊丽莎白公主，当时是一个酷爱学习的年轻女子，也和她的母亲乡居于此。公主似乎确实是一个学习的天才，她在掌握了六门外语，并消化了许多文学著作之后，又转向数学和科学，希望能在其中找到更滋补的饮食。有一种说法，认为这个引人注目的年轻女子这种非同寻常的对知识的渴求，是由于对爱情的失望。不论是数学还是科学都没有能让她满意。后来她读到了笛卡儿的书，她知道她已经找到了她所需要的、用以填补她那痛苦的空虚之感的东西——笛卡儿。于是安排了与这位哲学家的会晤，笛卡儿多少有些不大情愿。

很难确切知道后来发生了什么事。笛卡儿是一位绅士，他有着在那个壮丽的、皇家支配的时代中，绅士对于哪怕最不重要的王子和公主的全部畏惧和尊敬。他的书信是谦恭谨慎的典范，但是不知怎样，听起来总不十分真实。一句偶然写下来的轻蔑的话，也许比他所有那些写给或是写到伊丽莎白公主的大量聪明灵巧的阿谀谄媚之词，更能说明他对他这个热心的学生的智力的真实看法，这个学生一只眼睛盯着他的风采，一只眼睛盯着在他死后的出版权。 43

伊丽莎白坚持要笛卡儿给她上课。在公开场合，他宣称"在我所有的学生中，只有她完全懂得我的著作。"无疑，他是以一种父亲般的、平等的方式真正喜欢她的，但是如果相信他所说的意味着对事实的科学陈述，可就轻信之极了，当然，除非他意味着对他自己哲学的一个苦涩的评注。伊丽莎白可能已经懂得太多了，因为似乎事实上只有哲学家才完全懂得自己的哲学，尽管任何一个傻瓜都会认为他懂得。不管怎样，他没有向她求婚，就目前所知道的，她也没有向他求婚。

在他详细给她讲授的他的哲学中，包括解析几何的方法。初等几何中有一个确定的问题，可以用纯几何的方法相当简单地解决，

这个问题看起来很容易,但是要按严格的笛卡儿坐标的形式,用解析几何去处理,它就是真正的魔鬼了。这就是作出一个与任意给出的三个圆相接触(相切)的圆,而那三个圆的中心不在一条直线上。这个问题有八种可能的解法。它是那种不适于基本的笛卡儿坐标几何的粗糙暴力的一个实例。伊丽莎白用笛卡儿的方法解决了它。他让她去作这件事是相当残忍的。当他看到她的解答时,他的评论使每一个数学家都知道那是怎么回事了。这可怜的姑娘,她对她的功绩还非常自豪。笛卡儿说,他不会试图用她的解答,花一个月时间去实际构造出所求的相切圆。如果这件事没有说明他对她的数学能力的估价,那就不可能说得更清楚了。这是一个不仁慈的举动,特别是因为她搞错了,而他明明知道她会搞错,就更是如此了。

伊丽莎白离开荷兰后,与笛卡儿保持通信差不多到他去世那天。他的信包含着许多美好和真诚的词句,但是我们宁愿他没有被王族的气息熏得如此颠三倒四。

1646年笛卡儿在荷兰的埃格蒙德过着愉快的隐居生活,他沉思、侍弄小花园,与欧洲的学者们通了非常多的信。他的最伟大的数学工作已经作出来了,但他仍旧思考着数学,总是有洞察力、有创见地思考着。一个他考虑过的问题是芝诺的阿基里斯和乌龟。他对这个悖论的解答在今天不会被所有的人接受,但在那个时代却是天才的解答。他现在五十岁,已是世界闻名了,事实上比他所曾希望的还要有名得多。可他仍然没有抓住他终生祈求的安宁与平静。他继续做着伟大的工作,但不会让他安安静静地做出他想到的一切了。瑞典的克里斯蒂娜女王已经听说到他了。

这个多少有些男子气的年轻女子那时十九岁,已经是一个有能力的统治者,被尊称为一个很好的古典学者(这要更晚些),一个有着撒旦那种身体耐力的、肌肉发达的运动员,一个无情的女猎

人，一个老练的女骑手，她可以满不在乎地骑十个小时的马而一次也不休息，最后才是一个倔强的、稍微有点妇女气质的女性，她就象瑞典的伐木工人那样不怕冷。除此之外，她对那些皮不这样厚的人的软弱，却特别迟钝。她自己吃得很节省，她的侍臣吃得也很节省，她能象一只冬眠的青蛙，在瑞典的隆冬一连几个小时坐在没有生火的图书馆里。她的随从们透过冷得打架的牙齿，请求她把所有的窗户打开，让令人愉快的雪花飘进来。她注意到她的内阁总是同意她的意见，而她并没有感到于心不安。她知道所有应该知道的事情，她的大臣们和导师告诉她要如此。由于她每天只睡五个小时，她使她的谄媚者经受一天十九个小时的磨难。这个神圣的暴君在看到笛卡儿哲学的那一刻，就决定她一定要把这个可怜的瞌睡虫弄来，做她的私人教师。所有她到目前为止学到的东西，只是使她感到空虚和渴望学习更多的东西。她就象有学问的伊丽莎白一样，知道只有由哲学家本人灌注的丰富的哲学，才能缓解她对知识和智慧的强烈渴求。

要不是由于他性格中那种不幸的势利气质，笛卡儿可能就顶住了克里斯蒂娜女王的奉承，一直到他九十岁，没有了牙齿，没有了头发，没有了哲学，没有了一切的时候。笛卡儿一直没有答应，直到 1649 年春天，女王派海军上将弗莱明带船来接他。全班人马都慷慨地由这位不心甘情愿的哲学家自由支配。到十月份，笛卡儿妥协了。于是他依依不舍地最后环视了一次他的小花园，锁上门，就此永远离开了埃格蒙德。 50

他在斯德哥尔摩受到的欢迎是极其热烈的，更不用说庄严盛大了。笛卡儿没有住进王宫；这大大拯救了他。然而，纠缠不休的好心的朋友夏尼一家，粉碎了他想要保持一点儿清静的最后一线希望。他们坚持要他和他们住在一起。夏尼是笛卡儿的同胞，实

际上他是法国大使。本来一切都可能很如意，因为夏尼一家确实很周到，可是感觉迟钝的克里斯蒂娜那僵死的头脑中，忽然冒出了这样一个念头，她认为对于象她这样一位繁忙、强壮的年轻妇女，凌晨五点是学习哲学的适当时间。笛卡儿宁愿用基督教国家的所有刚愎任性的女王来交换一个月在拉弗莱什的梦乡，还有开明的夏莱体贴地在旁边守着，不让他起得太早。不过，他还是很尽责地在那个邪恶的时间，在黑暗中从床上爬起来，爬进派来接他的马车，穿过斯德哥尔摩最萧瑟、最多风的广场赶往王宫，在那儿，克里斯蒂娜不耐烦地坐在冰冷的图书馆里，等着她的哲学课在早晨五点钟准时开始。

斯德哥尔摩最老的居民说，在他们的记忆中从来没有过象这样严酷的冬天。克里斯蒂娜看来既缺乏一个正常人的皮肤，又没有正常人的神经。她什么也没有注意到，只是要笛卡儿不畏缩地信守可怕的约定时间。他试图在下午躺下弥补他的休息。她不久就连这一点休息也给他剥夺了。一个瑞典皇家科学院正在她多产的活动下处于孕育之中，笛卡儿又被从床上拖起来替她助产。

朝臣们不久就明白了，笛卡儿和他们的女王在这些冗长的会晤中，谈到了许多超出哲学的事。疲倦的哲学家现在才了解到他已经双脚踏进了一个挤得满满的繁忙的黄蜂窝。不管什么时候，什么地点，只要有机会，他们就螫他。女王或许是太麻木不仁，没有注意到对她这位新来的宠臣正发生些什么事，或许她很聪明，正通过她的哲学家去螫她的朝臣。不论是哪种情况，为了平息关于“外国影响”的恶意的流言蜚语，她决定使笛卡儿成为瑞典人。女王下令封给他一块地产。他为了摆脱这种困境而作的每一次绝望的努力，只是使他陷得更深。到1650年元月初，他已经陷到脖子了，只有令人惊奇的粗暴之力能够实现他解救自己的渺茫的希望。

51

但是由于他那种与生俱来的对王室的恭敬，他不能让自己说出能使他飞回荷兰的魔咒，虽然他在给他忠实的伊丽莎白的一封信中，谦恭而有礼貌地说了许多。笛卡儿偶尔中断了一门用希腊语讲的课程，他目瞪口呆地发现，自称为古典学者的克里斯蒂娜正在跟语法的儿戏拼命，而这种简单的语法，他说他在孩童时期就自己掌握了。从此以后，他对她智力的评价看来虽然显得恭敬，实际上却很低了。这个评价没有因为她坚持要他为一次宫廷庆典排一出芭蕾舞剧来款待她的客人们而有所提高。笛卡儿坚决拒绝这样做，不愿意在他那个年龄去掌握瑞典舞蹈那种庄严的跳跃，把自己弄成一个江湖骗子。

不久，夏尼患了非常严重的肺炎，笛卡儿照料他。夏尼康复了，笛卡儿染上了同样的病。女王惊慌了，派来了医生。笛卡儿命令他们都从房间里出去。他的情况越来越糟。他虚弱得分不清谁是朋友，谁是讨厌的家伙，最后他同意让一名最百折不挠的医生给他放血，这位医生也是他的一位朋友，一直在附近徘徊着，等着要他来试试。这几乎要了笛卡儿的命，但还差一点儿。

他的好朋友夏尼，看到他病得很厉害，建议他接受最后的圣礼。他表示要见他的心灵上的慰藉者。笛卡儿把他的灵魂托付给上帝的仁慈。平静地对待着死亡，他说他正在自愿奉献出他的生命，这也许可以赎他的罪。直到最后，拉弗莱什还紧紧地抓住他。心灵的慰藉者要他表示是否愿意接受临终祝福，笛卡儿睁开了眼睛，又闭上了。给他作了临终祝福。他就这样，在1650年2月11日死去了，享年五十四岁，作了一个刚愎自用的丫头过分的虚荣心的牺牲品。

克里斯蒂娜伤心了。十七年之后，这时她早已放弃了她的王冠和信仰，笛卡儿的遗骨回到了法国（除过右手骨被法国财政大臣

保留起来，用以纪念他在管理财政事务方面的熟练技巧），并在巴黎现在称为潘提翁的地方重新安葬。本来要举行公开的演讲，但国王匆匆下令禁止，因为笛卡儿的学说仍然被认为太激进，不能在公众面前宣讲。在评论笛卡儿的遗骨回归他的故土法国时，雅可比说："占有伟人们的骨灰，通常比在他们活着的时候占有他们本人更方便。"

52

笛卡儿死后不久，他的书就被列入教会的《禁书目录》，而教会在这些书的作者活着的时候，接受了红衣主教黎塞留的开明建议，曾经允许它们出版。"言行一致，你真是无价之宝！"但是虔诚的教徒并不为言行一致操心。"没脑子的怪物"——言行不一的死顽固的害人精。

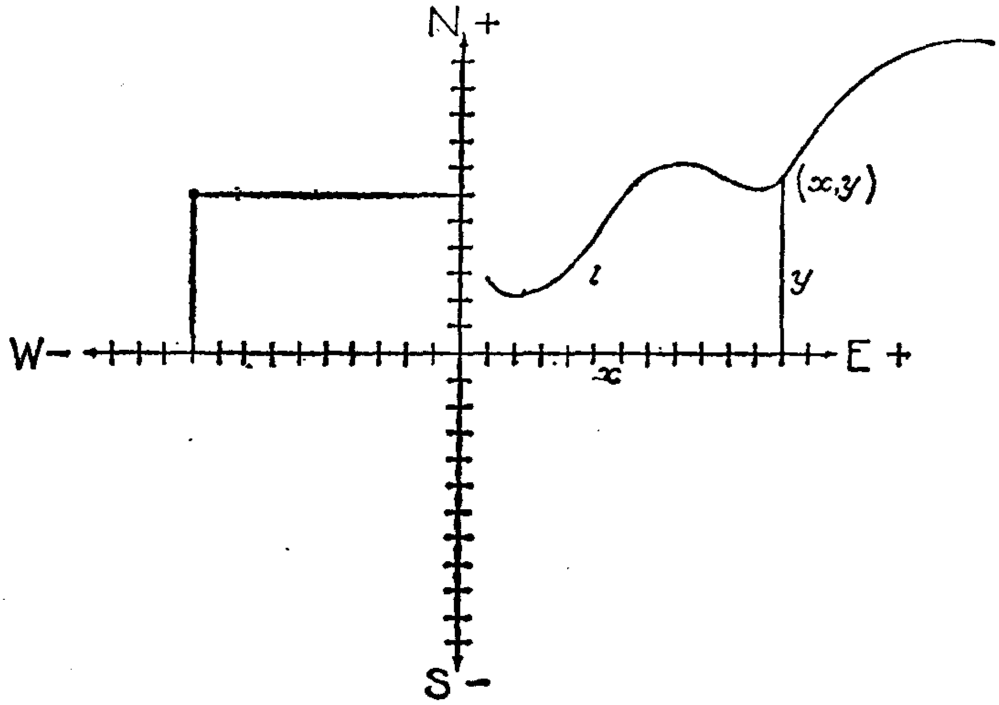
这里我们不考虑笛卡儿对哲学作出的不朽贡献。他在实验方法的发端中所具有的辉煌地位，也不能使我们留步。这些东西远远超出了纯数学的领域，而他最伟大的工作或许正在纯数学中。极少有人能刷新人类思想的一个完整的方面，笛卡儿就是那极少数中的一个。为了不使他最伟大贡献的闪闪发光的简朴失色，我们将单独予以简短的叙述，而把他在代数，特别是代数记号和方程论中作过的很多优美的工作放在一边。这个贡献属于最杰出之列，在有史以来对数学作出的全部半打左右最伟大的贡献中，它以其感人的简单而引人注目。笛卡儿再造了几何学，并使现代几何成为可能。

就象数学中所有真正伟大的东西一样，基本概念简单到了近乎一目了然的程度。在平面上放上任意两条相交的直线。一般说来，我们可以假定这两条线互成直角。现在想象在美国的规划图上有一个城市，林荫路由南到北，大街从东向西，整个规划的布置，相对于一条林荫道和一条大街，称为轴，这些轴相交于称作原点的

地方，从原点出发，街道和林荫路的数字连续数下去。这样，没有图也很清楚126西大街1002号在什么地方，只要我们注意到，数字1002所包括的十条林荫路是向西度量的，也就是说，在地图上向原点的左边量度就行了。这是非常清楚的，我们立刻就可以想象出任何特殊地址的位置。林荫道的数字和大街的数字以及必需补充的更小的数字(如上面所说"1002"中的"2")，使我们能够通过给出一个数对来确切而唯一地确定任何点相对于轴的位置，这个数对表示了点落在轴的东还是西，南还是北，称之为点(相对于轴的)坐标。 53

现在假定一个点在图上移动，那么它在上面移动的这条曲线上的所有点的坐标(x, y)就与一个方程联系在一起(从来没有根据数据做过图的读者，应当把这看作是理所当然的)，这个方程称为曲线的方程。为简单起见，现在假定我们的曲线是一个圆。我们知道它的方程。用它来做什么呢?代替这个特殊的方程，我们可以写出同一类型的最一般的方程(例如，在这里是二次方程，没有交叉乘积项，坐标的最高次幂的系数相等)，然后着手从代数上巧妙地处理这个方程。最后，我们把所有我们用代数处理的结果，还原到按图形上各个点的坐标得出的相等的结果，在这以前，我们故意不提及这些点坐标。与希腊方式的初等几何中那些蜘蛛网般的线相比，代数更容易表达。我们所作的就是用我们的代数去发现和研究关于圆的几何定理。

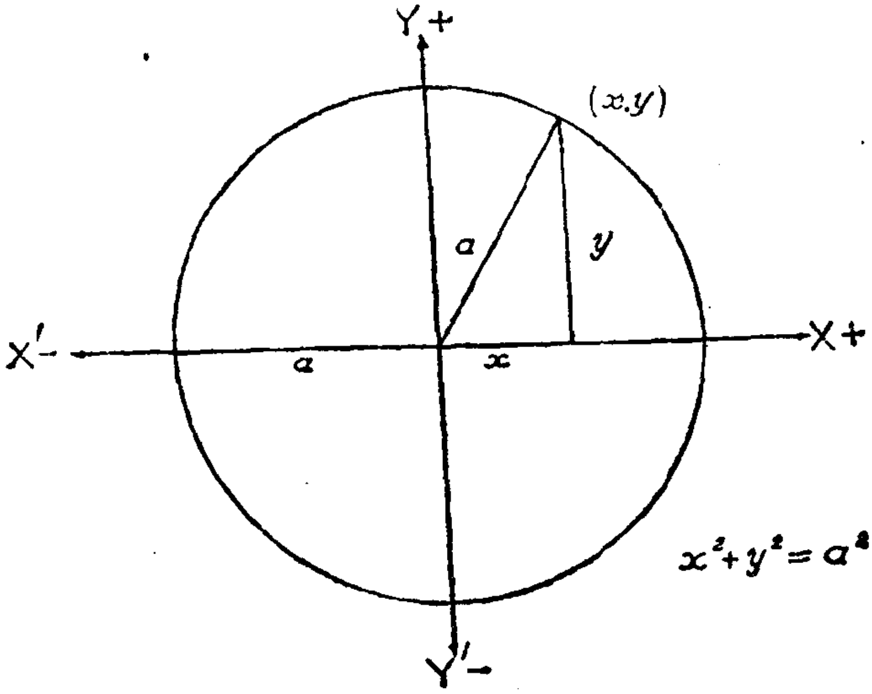
对于直线和圆，这似乎不是很令人兴奋的事情；我们以前就知道怎样用另一种方法，希腊人的方法，来做到这些事。现在让我们来看看这个方法的真正力量是什么。我们从具有所需要的或所提出的任何复杂度的方程出发，从几何上说明它们的代数和分析性质。这样我们就不仅不再以几何作为我们的舵手；而且在把它扔 54



下船时，还给它的脖子上系了一袋砖头。今后，代数和分析就是我们驶向未探明的"空间"及其"几何"之海的舵手。我们已经做的一切，只消一步都能扩展到具有任何维数的空间；对于平面，我们需要两个坐标，对于通常的"固体"空间，需要三个，对力学和相对论的几何，需要四个坐标，最后，对于数学家感兴趣的"空间"，既可以有几个坐标，也可以有象所有的数字 1，2，3，……那样多的坐标，或是象直线上所有的点那样多的坐标。这胜过了阿基里斯和乌龟的赛跑。

笛卡儿并不是修正几何，他创造了几何。

由一位笛卡儿的同胞、健在的著名数学家来说结束语，看来是适宜的，所以我们要引用雅克·阿达玛的话。他第一个指出，单单坐标的发明不是笛卡儿的最伟大的功绩，因为坐标已经"被古代人"做出了——这种说法并不确切，除非我们把没有表明的意思解释为未完成的事业。地狱就是用"古人"们烤得半熟的概念铺就的，他



们永远无法用他们自己的力量把那些概念完全烤熟。

“认识[如在坐标的应用中]一个一般的方法，和信守它表示的概念，完全是另一回事。这个功绩，每一个真正的数学家都知道它的重要性，它确实是笛卡儿在几何中的非常卓越的功绩；正是由此，他被导向了……他在几何中真正伟大的发现；即，坐标方法的应用不仅把几何上已经定义了的曲线转变成方程，而且，从完全相反的角度看，给越来越复杂的曲线预先下了定义，因此，越来越一般……

“数学科学的研究对象的全部概念，发生了彻底变革，直接促成这一变革的是笛卡儿本人，而后来。人们在下一个世纪，在相反的方向又间接地促进了这一变革。笛卡儿确实完全知道他所作出的发明的重要性，他夸口说，就象西塞罗的修辞学超过了ABC一样，他到目前为止已经超过了在他以前的全部几何学，他这样说是正确的。”



费马

第四章　最杰出的业余爱好者

费　　马

我已经发现了大量极其美妙的定理。

——P. 费马

并不是所有我们的鸭子都能成为天鹅；所以在把笛卡儿作为有史以来最伟大的数学家之一展现给读者之后，我们不得不为下面这个经常提到而且极少被反驳的断言辩护，这个断言就是，十七世纪最伟大的数学家是笛卡儿的同代人费马(1601?—1665)。这

当然把牛顿(1642—1727)排除在我们的考虑之外了。但是人们可以争辩说，费马作为一个纯数学家，至少与牛顿相当，而且不管怎么说，牛顿一生将近三分之一的时间是在十八世纪，而费马完全生活在十七世纪。

牛顿似乎把他的数学主要当作科学探索的工具，并且把他的主要精力放在科学探索上。而费马则不然，他虽然在将数学应用于科学、特别是光学方面也作了值得注意的工作，但纯数学对他具有更强的吸引力。

随着笛卡儿在1637年公布了解析几何，数学刚刚进入它的现代状态，很多年内仍将处在这样的初级阶段，因而一个有天赋的人当然有理由希望在纯数学和应用数学领域里都作出有益的工作。

牛顿作为一个纯数学家，在发明微积分中达到了他的顶点，莱布尼兹也独立作出了这一发明。稍后我们对此还要多说一些，而现在，可以说费马在牛顿出生前三十年，莱布尼兹出生前十七年，就想出并应用了微分的主要概念，虽然他没有象莱布尼兹那样，把他的方法归结为一套甚至傻瓜都能用来解决问题的、单凭经验来做的方法。

至于笛卡儿和费马，他们各自都完全独立地发明了解析几何。他们在这个问题上旗鼓相当，但这并未影响到上述断言。笛卡儿的主要努力在于各种各样的科学研究，对他的哲学的苦心经营，以及他那荒谬的太阳系"漩涡理论"——很长时期，甚至在英国，它也是极其简单的、并不玄奥的、牛顿宇宙万有引力理论的一个重要对手。费马似乎从来没有象笛卡儿和帕斯卡两人那样，为狡诈而富于诱惑力的关于上帝、人和作为整体的宇宙的哲学探讨所吸引；所以，在解决了微积分和解析几何中他感兴趣的部分，并过着平静的、一直为居家度日而努力工作的生活之后，他仍能自由地把他的

57

剩余精力奉献给他最喜爱的消遣——纯数学，并完成了他最伟大的工作，奠定了数论的基础，他那无可争辩而又不可分割的不朽的名声就建立在上面。

不久我们就会看到，费马和帕斯卡分享了概率的数学理论的创造，如果所有这些第一流的成就还不足以使他在纯数学上居于他的同代人之首，那么我们要问，谁做得更多？费马是生就的创造者。在业余这个字的最严格的意义上，就他的科学和数学而论，他也是个业余工作者。无疑地，他在科学史上即使不是第一个，也是最重要的一个业余爱好者。

费马的一生是安静、勤勉、过得很平静的，但是他从中得到了很多东西。他平静生涯中的重要事实很快就能讲完。数学家皮尔·费马是博蒙的第二领事、皮鞋商多米尼克·费马和一个议会法官家庭的女儿德隆·克莱尔的儿子，1601 年 8 月(准确的日子不清楚，受洗礼的日子是 8 月 20 日)，出生在法国的博蒙-德-洛马内。他最早是在他出生的小城市接受家庭教育；后来，为担任地方行政官员作准备的学习是在图卢兹继续进行的。由于他一生过着平稳和安静的生活，避开无益的争执，也由于他没有一个象帕斯卡的吉尔伯特那样溺爱他的姐姐，把他少年时代的天才记录下来留给后人，因此他的学生时代几乎没有什么材料留下来。不过那一定是非常出众的，这从他成年后取得的成绩和成就就可以明显地看出来；在要求严格的学问方面没有坚实基础的人，不可能象费马那样成为古典学者和文学家。他的关于数论和数学的出色的著作，一般说来不能追溯到他所受的教育，因为他在其中作出他最伟大的工作的领域，在他作学生的时候还没有打开，他学习的东西几乎不可能对他有所启发。

58

在他的实际生活中，唯一值得提及的那些事件是，他三十岁

(1631年5月14日)在图卢兹就职，任晋见接待官；同年6月1日他与他母亲的表妹德隆·路易丝结婚，他们生了三个儿子，其中克莱芒-萨米埃尔成了他父亲的科学执行人，还有两个女儿都当了修女；1648年他升任图卢兹地方议会的议员，他在这个职位上体面、正直、非常称职地干了十七年——他从事工作的全部三十四年的时间都在勉力为国家服务；最后，1665年1月12日，处理完在卡特雷城的一件案子之后两天，他在该城去世，终年六十五岁。"故事吗?"他可能会这样说："上帝保佑你，先生！我没有什么故事。"然而这个度过平静的一生的、诚实、和气、谨慎、正直的人，有着数学史上最美好的故事之一。

他的故事就是他的工作——更确切地说，是他的消遣——他做这工作纯粹是出于对它的爱好，它的最好的部分是如此简单(只是说来如此，完成或仿效就不同了)，甚至一个智力正常的小学生都能了解它的性质，并欣赏它的美。过去三个世纪中，这个业余数学家之王的工作，对所有文明国家的数学业余爱好者都有着无法抗拒的吸引力。这个称为数论的理论也许是这样一个数学领域，今天有天赋的业余爱好者可以希望从中找出一些有意思的东西。我们将首先看看他的其它贡献，不过是在顺便提一下很多人称之为人文学的领域中他"独特的学识"之后。他对主要的欧洲语言和欧洲大陆的文学，有着广博而精湛的知识，希腊和拉丁的哲学由于几个重要的订正而得益于他。用拉丁文，法文，西班牙文写诗是他那个时代绅士们的素养之一，他在这方面也表现出了熟练的技巧和卓越的鉴赏力。如果我们把他描绘成一个和蔼的人，不因受到批评而发怒或生气(象牛顿晚年那样)，不骄傲，但有些自负，我们就能了解他的平稳好学的一生了。他在各方面的对立面笛卡儿形容他的自负说："费马先生是个加斯科尼人，我可不是。"这里提到的加斯

科尼人，大概是指一些法国作家(例如罗斯丹在《贝日拉克的西哈诺》第二幕，第七场中)笔下的加斯科尼人所具有的一种可爱的吹牛习气。在费马的信中可能有一些这样的吹牛的话，但总是相当天真和不触犯人的。即使他的头脑已经膨胀得象气球那样大了，也从没有涉及他对自己的工作可能持有的公正看法。至于笛卡儿，我们应该记得，他确实不是一个公正的裁判者，我们马上就会指出，在他与这位"加斯科尼人"关于极其重要的切线问题的长期争论中，他自己那军人般的固执怎样使他败在了对方手里。

一些人在考虑到费马的公职的艰难费力的性质和他完成的大量第一流数学工作时，对于他怎么能找出时间来做这一切感到迷惑不解。一位法国评论家提出了一个可能的答案：费马担任议员的工作对他的智力活动有益而无害。议院评议员与其它的——例如在军队中的公职人员不同，对他们的要求是避开他们的同乡，避开不必要的社交活动，以免他们在履行职责时因受贿或其它原因而腐化堕落。这样，费马就找到了大量的空闲时间。

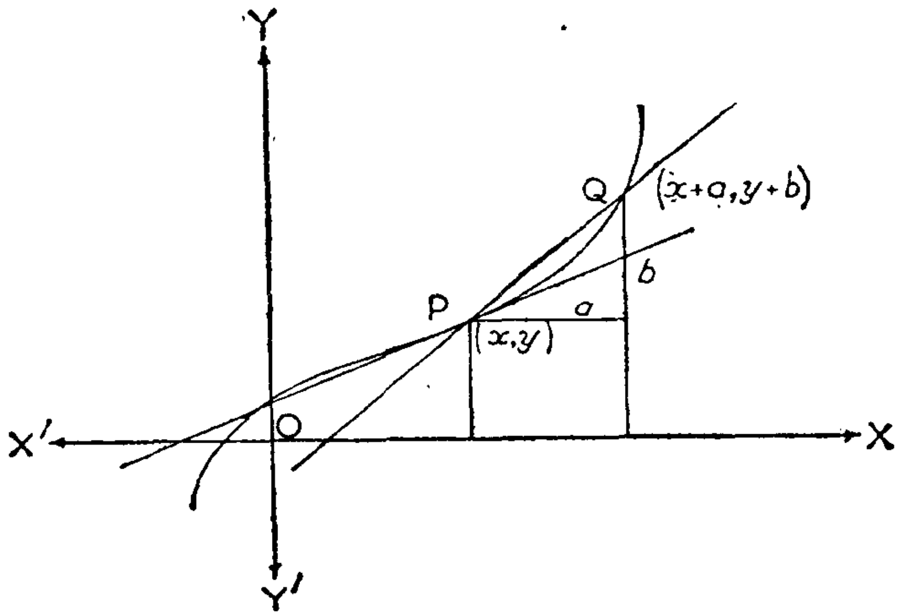
我们现在扼要叙述一下费马在微积分的发展中所起的作用。如我们在关于阿基米德那一章中说过的。微分的与几何对等的基本问题是画一条直线，在给定的点相切于一条曲线上的给定的、非闭的连续弧。此处对"连续"的意义的一个非常接近的描述是"光滑，不断开或没有突然的跳跃；"给出一个确切的、数学的定义，需要写出长长几页的定义和极细微的区别，这些定义和区别肯定会使微积分的发明者，包括牛顿和莱布尼兹困惑而吃惊。也不难想象，如果那两位创造者知道了现代学生要求知道的全部细微区别，那么可能就永远也不会发明微积分了。

包括费马在内的微积分的创造者们，都依赖几何和物理(多为

运动学和动力学)的直观以取得进展：对于一条"连续曲线"的图形，他们注视着自己头脑中的想象，描绘出画一条直线在曲线上的点 P 处相切于曲线的过程，这个过程是，取另一个也在曲线上的点 Q，画连接 P 和 Q 的直线 PQ，然后，在想象中让点 Q 沿着曲线弧滑向 P，直到 Q 与 P 重合，当弦 PQ 在上面所描述的极限位置时，它就成了曲线在点 P 的切线 PP——这就是他们要寻找的东西。

60

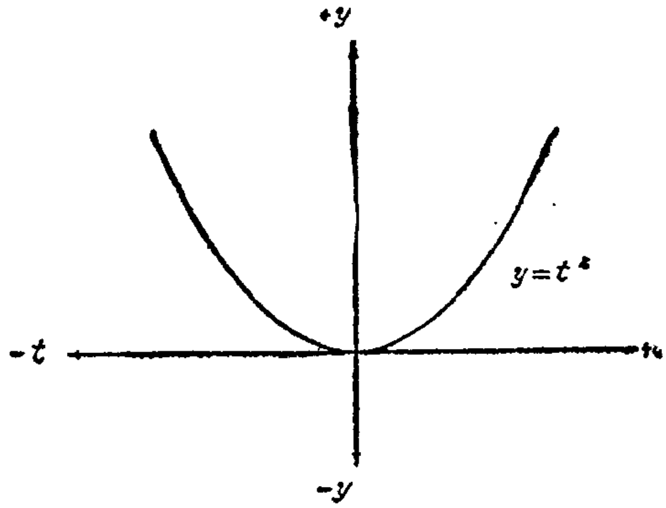
下一步是把所有这些翻译成代数或分析的语言。他们在 Q 开始滑动去与 P 重合之前，先知道了图上点 P 的坐标 x, y 和 Q 的坐标，比如说 $x+a$, $y+b$，然后他们审视着图，看出弦 PQ 的斜率



等于 b/a——显然是弦相对于 x 轴(x 的距离在其上量度的直线)的"倾斜度"的一种度量；这个"倾斜度"就是精确的斜率的意义所在。由此就很清楚了，点 P 处所求切线的斜率(在 Q 已经滑动到与 P 重合之后)就应该是当 b 与 a 同时趋近于 0 时，b/a 的极限值；因为 Q 的坐标 $x+a$, $x+b$，最终成了 P 的坐标 x、y，这个极限值就是所需要的斜率。有了斜率和点 P，他们现在就能画出切线了。

这并不就恰好是费马画切线的过程，但是他的过程大体上与上面描述的过程相同。

为什么这一切值得一个有理智和注重实际的人认真考虑呢？这是一个很长的故事,此处只需略为提一提；当我们讨论到牛顿时，再详细论述，动力学的基本概念之一是一个移动的粒子的速度。如果我们相对于时间的单位数画出粒子在单位时间内通过的距离的单位数,我们就得到了一条线，无论是直线还是曲线，它画出了粒子在瞬间的“运动”，而这条线在其上任意点处的切线明显地给我们以粒子在瞬时相对于点的速度；粒子运动得越快,切线的斜率

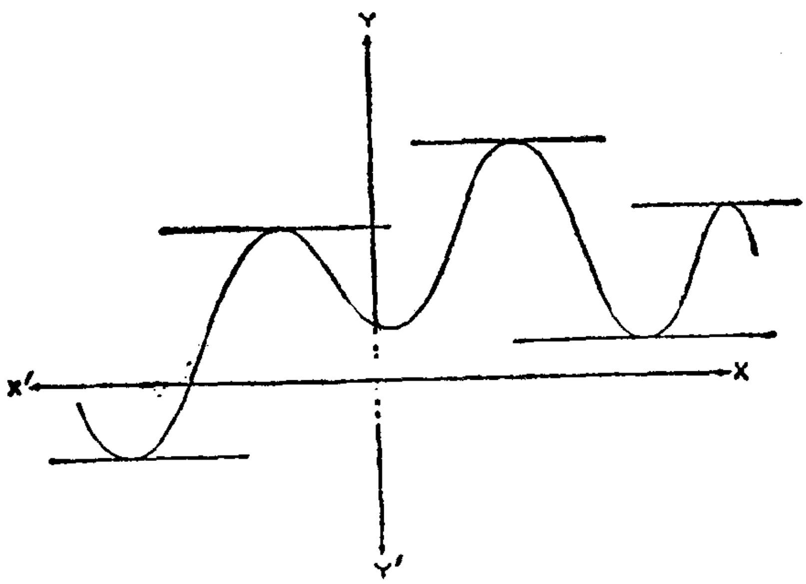


越陡。事实上，这个斜率确实测量了粒子在运动路径中任何点的速度。运动中的问题当转换为几何问题时，确实就是找出一个曲线在给定点的斜率的问题。也有与曲面的切平面(在力学和数学物理中也有重要的解释)对应的类似的问题，这些问题都要用微分学来着手解决——而微分学的基本问题，我们已经试图以它出现在费马和他的后继者面前的样子加以描述了。

这个微积分的另一个用途可以从已经说的这些表示出来。假定有一个量 y 是一个量 t 的“函数”，写成 $y=f(t)$，意为当任意确

定的数，比如说 10，用来代替 t，使我们得到$f(10)$——"10 的函数 f"时，我们就能够从假定已经给出的 f 的代数表达式，计算出 y 的对应值，此处 $y=f(10)$。为了更明确起见，假定 $f(t)$ 是在代数上用 t^2，或$t\times t$表示的 t 的特定函数。那么，当$t=10$，我们得到$y=f(10)$，因而此处对于 t 的这个值，$y=10^2=100$；当 $t=1/2$，$y=1/4$，等等，对于 t 的任意值。

凡是不是在三十或四十年前结束初级中学教育的人，对所有这些都是熟悉的，但是一些人可能已经完全忘了他们孩童时期在算术中做过些什么，正象其它人不能拒绝拉丁文的圣饼以拯救他们的灵魂。但甚至最健忘的人也会看出，我们能够对任何 f 的特别形式，画出$y=f(x)$的图形（当$f(x)$是 t^2时，图形是一个象翻转过来的拱那样的抛物线）。想象一下画出来的图形。如果在图形上面有极大（最高）或极小（最低）点——比它们紧邻的那些点更高或更低的点——我们观察到在每一个这样的最大和最小点处，切线平行于 t 轴。那就是说，在我们正在画的$f(x)$的这样一个极值（极大或极小值）处，切线的斜率是零。这样，如果我们正在寻找一个给定函数



$f(t)$的极值，我们不得不再次对特别的曲线$y=f(t)$解决我们的斜率问题，在找到一般点t, y处的斜率后，让这个斜率的代数表达式等于零，以找出相对于极值点的t的值。这大体上就是费马在他的极大极小方法中所做的，这个方法是他在1628—1629年发明的，但直到十年后才半公开，那时他通过梅塞内把这个方法的一份说明送给笛卡儿。

这个简单的设想在科学上的应用——当然，为了考虑比上面描述的复杂得多的问题，经过了充分而细心的构思——是多种多样并十分广泛的。例如在力学中，拉格朗日发现，有某个问题中所考虑的物体的位置(坐标)和速度的"函数"，取一个极值，这个函数就给我们提供了所论系统的"运动方程"，这些反过来又使我们得以决定在每一给定时刻的运动——即完全地描述了这个运动。在物理学中有很多类似的函数，在问题中的函数必须是一个极值函数①的简单要求下，这些函数中的每一个都概括了数学物理的一个广阔的分支；希耳伯特在1916年为广义相对论发现了一个这样的函数。所以当费马在辛苦的法律事务的余暇，以研究极大和极小的问题作为消遣时，他并不是在浪费时间。他本人把他的原理应用于光学，做得又漂亮又令人惊奇。

附带说一下，可以注意到的是，这个特殊的发现已经被证明是从1926年起人们精心构作的新的量子理论的萌芽——在它的数学方面，指"波动方程"。费马发现了通常所谓的"最小时间原理"。称它为"极值"(最小或最大)比称为"最小"①要更准确些。

根据这个原理，如果一束光线从一个点A射向另一个点B，途

① 这个说法对目前的考虑是足够精确了。实际上，要求的是使问题中的函数平稳(粗略地说，既不增加也不减少)的变量(坐标和速度)的值。一个极值点是平稳点；但是一个平稳点未必是一个极值点。

中经过各种各样的反射和折射("折射",也就是弯曲,就象光线从空气进入水中那样,或是光线通过不同密度的胶状物那样),那么它经过的路程——所有由于折射的扭转和转向,由于反射的难于捉摸的向前和退后——可以由从A到B所需的时间为极值这个单一的要求计算出来(但注意前面的脚注)。

由这个原理,费马推出了折射和反射的熟知的规律:入射角(在反射中)等于反射角;从一个介质到另一个介质的入射角(在折射中)的正弦是反射角的正弦的一个常数倍。

我们已经提到过解析几何;费马首先把它应用于三维空间。笛卡儿满足于二维。今天所有的学生都熟悉这个推广,但它即便对一个有才能的人来说,也不是从笛卡儿的发展中不证自明的。也许可以说,要找到把一种特殊的几何有意义地从二维推广到三维,通常比把它从三维推广到四维或五维……,或n维困难得多。费马在一个基本论点上(曲线由它们的阶分类)修正了笛卡儿的理论。多少有些爱发怒的笛卡儿竟会与沉着冷静的"加斯科尼人"费马争吵起来,看来是很自然的,因为这个军人在关于费马的切线方法的争论中通常是急躁而易怒的;而这位心平气和的律师还是照样彬彬有礼。就象通常发生的那样,不发怒的人在争辩中占了上风。但是费马是注定要胜利的,这不是因为他更会辩论,而是因为他是正确的。

64

顺便提一下,我们推测,牛顿应该听到过费马用过微积分,并且应该感谢过这个信息。但直到1934年以前,没有关于这个结论的明显证据公布出来,但就在这一年,L. T. 莫尔教授在他写的牛顿的传记中,记述了一封至今未被人们注意的信,在那封信里,牛顿清楚地说,他从费马画切线的方法中得到了微分法的提示。

我们现在转向费马最伟大的工作，所有的人，不论是数学家还是业余爱好者，都同样能了解这项工作。这就是所谓的“数论”，或者叫“高等算术”，或者最后，用一个不卖弄学问的名称，叫算术，这个名称对高斯来说就足够好了。

希腊人把我们在初级课本中收集在“算术”名下的杂类分成了两个单独的部分，即逻辑学和算术，其中的第一部分是关于计算在一般商业和日常生活中的实际应用，第二部分就是在费马和高斯意义下的算术，他们力图照这样去发现数的性质。

算术在它的最终的，也许是最困难的问题中研究一般整数 1, 2, 3, 4, 5……的相互关系，这些数我们差不多一会讲话就能说。在为说明这些关系的努力中，数学家不得不去发明代数和分析中的那些微妙而深奥的定理，这些定理中森林般的术语遮蔽了最初的问题——那些关于 1, 2, 3, ……的问题，但它们的真正作用就是解答那些问题。同时，这些表面上无用的研究的副产品，丰富地报偿了从事这些研究的人，向他们提出了大量可应用到与物理世界有直接联系的其它数学领域的有力的方法。我们只举一个例子，代数的最新的阶段，今天由专业代数学家开垦并正在给代数方程理论指出全新的途径，它的起源就直接追溯到解决费马的简单的**最后定理**的努力(在给最后定理做好了准备后，就会陈述它)。

65

我们从费马关于素数的一个陈述开始。一个正的素的数，或简称为素数，是任何比 1 大、且除数(没有余数)只是 1 和它本身的数；例如 2, 3, 5, 7, 13, 17 是素数，而 257, 65537 也是素数。但是 4294967297 不是一个素数，因为它以 641 为一个除数，18446744073709551617 也不是素数，因为它可以被 274177 整除；641 和 274177 都是素数。当我们在算术中说一个数以另一个数为除数，或者说可以被另一个数除时，我们意味着整除，即没有余项。

这样14可以被7除，而15就不能。上面那两个大数是故意写出来的，原因马上就会清楚了。回忆起另一个定义，一个给定的数，比如说N，它的n次幂是n个N乘在一起，写做N^n；这样，$5^2=5\times5=25$，$8^4=8\times8\times8\times8=4096$。为一致起见，$N$本身可以写做$N^1$。再如，象一个塔形的$2^{3^5}$意味着我们首先要计算$3^5(=243)$，然后"提升"2到这个幂上，$2^{243}$；答数有74位。

下一个论点在费马的一生中是非常重要的，在数学史上也是如此。考虑数3, 5, 17, 257, 65537，它们都属于一个特殊类型的"序列"，因为他们都是用同一个简单的过程(由1和2)生成的，这可以从

$$3=2+1,\ 5=2^2+1,\ 17=2^4+1,\ 257=2^8+1,\ 65537=2^{16}+1$$

看出来，如果我们愿意检查计算过程，我们很容易看出上面写出过的那两个大数是$2^{32}+1$和$2^{64}+1$，它们也是这个序列中的数。这样，我们就有了属于这个序列的七个数，这些数的前五个是素数，但后两个不是素数。

观察一下这个序列是如何构成的，我们注意到"指数"(指出2取什么样的幂次的上角那些数)，是1, 2, 4, 8, 16, 32, 64，并且我们观察到这些数是1(如果我们愿意的话，为一致起见，它可以象在代数中那样，写成2^0)，2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6。也就是说，我们的序列是$2^{2^n}+1$，而n的范围是0, 1, 2, 3, 4, 5, 6。我们无需在$n=6$停止；取$n=7$, 8, 9, ……，我们可以无限地继续这个序列，得到越来越多的巨大的数。　66

假定我们希望找出这个序列中的一个数是否素数。虽然有很多捷径，可以通过检验剔除试验除数的整个类；虽然现代算术限制了需要尝试的试验除数的类型，我们问题的吃力程度仍然与用小于给定数的平方根的相续素数2, 3, 5, 7, ……来除给定数的吃

力程度相当。如果这些数都不能整除给定的数，则该数就是素数。不用说，甚至对于象n为100这样小的数，即使用已知的捷径，这样一个试验所需要的工作量也会大得无法完成。（读者可以试着解决$n=8$的情形，以明确这一点。）

费马宣称，他相信序列中所有的数都是素数。如我们已经看到的，所列出的数（相应于$n=5,6$）与他的结论相矛盾。这是我们希望说明的有历史意义的一点：费马猜错了，但是他并没有说已经证明了他的猜测。若干年之后，他确实对他已经做的工作做了一番费解的陈述，一些批评家由之判断他弄错了。我们继续讲下去，这个事实的重要性就会出现。

出于心理上的好奇，可以提到美国的速算神童齐拉·科尔伯恩，当人们问他费马的第六个数（4294967297）是否素数时，经过一会儿心算，他回答不是，因为它有641作为除数，他不能解释他得出正确结论的过程。本书中科尔伯恩还会再出现（与哈密顿联系在一起）。

在离开"费马数"$2^{2^n}+1$之前，我们要向前看看十八世纪的最后十年，在那十年中，整个漫长的数学史上的两个或三个最重要的事件之一，要部分归因于这些神秘的数。有一个时期，一个十八岁的年轻人一直踌躇着——按当时的传统——是把他极好的天赋奉献给数学还是奉献给语言学，他在这两方面都同样有才华。使他作出抉择的是一个美妙的发现，这个发现与每一个中学生都熟悉的初等几何中的一个简单问题有关。

67 一个n边正多边形的所有n个边都相等，所有n个角也相等。古希腊人早就发现了如何只用尺规画3, 4, 5, 6, 8, 10, 15边的正多边形，用同样的工具由给定的正多边形画出边长两倍于它的正多边形也很容易作到。那么下一步就是寻找7, 9, 11, 13, ……

边的正多边形的尺规画法。很多人找过，但都没有找到，因为这样的画法是不可能的，只是他们不知道它不可能罢了，在间隔了两千二百多年后，那个在数学和语言学之间踌躇的年轻人向前迈出了下一步——大大的一步。

正如已经指出的，只要考虑奇数边的多边形就足够了。这个年轻人证明了用尺规画奇数边的正多边形是可行的，不过只有当边数或者是一个费马素数(就是形式为 $2^{2^n}+1$ 的素数)，或者是由不同的费马素数乘在一起组成的数时才有可能。这样，3、5 或 15 边的正多边形就象希腊人知道的那样，画出来是可能的，但是 7，9，11 或 13 边的正多边形就不能画出来，对于 17，或 257，或 65537，或者在费马的数列 3，5，17，257，65537 中的下一个可能的素数——如果存在的话，这到目前(1936 年)还没有人知道——也是可能的，对于 3×17，或 5×257×65537 边，等等，也是可能的。正是这个在 1796 年 6 月 1 日宣布，但是在 3 月 30 日做出的发现，使这个年轻人选择了数学而不是语言学作为他的终生工作。他的名字叫高斯。

我们叙述著名的“费马定理”(不是他的“最后定理”)作为费马做出的另一类有关数的发现。如果 n 是任意整数，p 是任意素数，那么 n^p-n 可以被 p 整除。例如取 $p=3$，$n=5$，我们得到 5^3-5，或 $125-5$，这又是 120，也是 3×40；对于 $n=2$，$p=11$，我们得到 $2^{11}-2$，或 $2048-2$，这就是 $2046=11\times186$。

算术中有一些定理被认为是“重要的”，而其它一些尽管同样难以证明，却被说成是微不足道的，要说明这是为什么，即便不是不可能，也是很困难的。一个标准(虽然不必是结论性的)是这个定理应该能运用到数学的其它领域中去；另一个标准是，它应该启发算术或广义的数学中的研究；第三个是，它在某些方面应该是带

68 有普遍性的。刚才叙述的费马定理满足所有这些多少有些武断的要求：它在数学的很多领域中的用处都是不可或缺的，这些领域包括群论（见第十五章），而群论又是代数方程论的基础；它启发了很多研究，其中的原始根的整个主题，注重数学的读者可以当做重要的例子；最后，它在下述意义上带有普遍性：它描述了所有素数的一个性质——要找出这样一般的论述是极其困难的，已经知道的非常少。

费马象通常那样，陈述了关于 $n^p - n$ 的定理而没有证明。第一个证明是莱布尼兹在一篇没有注明日期的手稿中给出的，但他似乎在1683年以前就知道了一个证明。读者可能愿意设想出一种证明来试试自己的能力。需要的是下面一些事实，它们可以被证明，也可以为了手头的目的而假定为已知：一个给定的整数只能以一种形式，即素数相乘的形式——重新安排因子顺序除外——表示出来；如果一个素数整除两个整数的积（相乘的结果），那它至少整除两个数中的一个。举例说明：$24=2\times2\times2\times3$，24不能由任何有本质不同的素数的相乘形式表示出来——我们认为 $2\times2\times2\times3$，$2\times2\times3\times2$，$2\times3\times2\times2$，和 $3\times2\times2\times2$ 都是一样的；7整除42，而 $42=2\times21=3\times14=6\times7$，在每一个分解式中7都整除相乘得到42的两个数中的至少一个；再有，98可以用7整除，$98=7\times14$，这里7整除7和14两个数，因此至少整除其中的一个。根据这两个事实，只需要不到半张纸就能把证明写出来，并且任何正常的十四岁儿童都能够理解它。但是可以很有把握地打赌，在一百万任何年龄区或一切年龄的正常智力的人当中，那些所知道的数学不超过小学算术程度的人，只有不到十个能在一个适当的时间——比如说一年内，成功地找出一个证明。

这里似乎是引用高斯的一些著名评论的适当地方，这些评论

是关于费马和他本人最喜爱的领域的。译文出自爱尔兰数学家H. J. S. 史密斯(1826—1883)，译自高斯为1847年出版的艾森斯坦的数学论文集写的序言。

"高等算术给我们提供了无穷无尽的有趣事实——也是真理，它们不是孤立的，而是有着密切的内在联系，随着我们知识的积累，我们不断地在二者之间发现新的，有时是完全出乎意料的联系。它们的那些定理的很大一部分从这样一个特性中得到了附加的魅力：有着简单特征的重要命题经常很容易由归纳法发现，然而这个特点却是如此深奥，我们只是在经过了许多徒劳的努力以后才能找出它们的证明；甚至当我们确实成功了，也通常是通过一些令人生厌的矫揉造作的过程证明的，而更简单的方法可能会长时间地未被揭晓。"

高斯提到的这些有趣的事实之一，有时被认为是费马发现的关于数的最美妙的(但不是最重要的)东西：每一个形式为 $4n+1$ 的素数是两个数的平方和，并且这种和的形式是唯一的。我们容易证明形式为 $4n-1$ 的任何数都不是两个数的平方和。由于很容易看出所有比2大的素数都是这些形式中的一种，没有什么好加的了。例如，37被4除有余数1，所以37一定是两个整数的平方和。通过试验(有更好的方法)，我们发现确实 $37=1+36=1^2+6^2$，并且没有其它的数的平方 x^2 和 y^2 能使 $37=x^2+y^2$。对于素数101，我们有 1^2+10^2；对于41，我们有 4^2+5^2。另一方面，$19=4\times5-1$，它不是两个数的平方和。

正如几乎他所有的算术工作一样，费马也没有留下这个定理的证明。伟大的欧拉在1749年首次证明了这个定理，而为了给它找到一个证明，欧拉断断续续地奋斗了七年。但是费马确实描述了他发明的一个巧妙的方法，他用这个方法证明了这个定理和

他的其它一些令人赞叹的结果。这个方法被称为"无限下推法"，完成它比以利亚①升天还要困难无数倍。他自己的记述既简单又清晰，所以我们从他1659年8月写给卡尔卡维的信中，不拘泥文字地翻译了一段。

"有很长时间，我不能把我的方法应用于肯定命题，因为用到肯定命题上的迂回曲折的办法要比我用在否定命题上的办法麻烦得多。这样，当我不得不去证明每一个比4的倍数多1的素数是由两个数的平方构成时，我发现自己非常苦恼。但最后，我从一个重复了许多次的思考中得到了我所缺少的线索，现在，借用于一些必然与肯定命题相联系的新原理的帮助，我的方法能够应用于肯定命题了。我在肯定命题中的推理过程是这样的：如果一个形式为$4n+1$的任意选定的素数不是两个数的平方和，[我证明了]会有同样性质的另一个数，比选定的那一个小，[因此]接着有第三个更小的数，等等。用这个方法做无限下推，我们最后达到了数5，这一类[$4n+1$]的所有数中最小的一个。[通过所提到的证明和上述的论证]可以知道5不是两个数的平方和。但是它是。因此我们可以从反证法推出，所有形式为$4n+1$的数都是两个数的平方和。"

70

将下推法应用到一个新问题的全部困难在于第一步，也就是去证明，如果假定或猜测的命题对于有关的数类中任意选出的一个数成立，那么它对于同一类中的一个较小的数也成立。解决这一步没有可以适用于所有问题的一般方法。要找到走出这个迷宫的道路，需要比拼命的忍耐力和大大夸张了的"忍受痛苦的无限能力"更罕见的东西。对那些认为天才只不过是有当一个好的簿记员的能力的人，可以劝他们把他们的无限的耐心用在费马的最后定理上。在叙述这个定理之前，我们再举出费马考虑过并解决了

① 以利亚，《圣经》中的人物，耶稣诞生前为希伯来伟大先知。——译者

的那些简单得容易使人误解的问题中的一个例子。这就要介绍费马擅长的丢番图分析了。

任何玩数字游戏的人很可能会在 $27=25+2$ 这个奇妙的事实面前停顿下来，这里有意思的是，27 和 25 都是确切的数的方幂，即 $27=3^3$ 和 $25=5^2$。这样我们就观察到，$y^3=x^2+2$ 有一个整数 x，y 的解；这个解是 $x=3$，$y=5$。作为一种对超人智力的测验，读者现在可以证明 $y=3$，$x=5$ 是唯一满足这个方程的整数。这个测验并不容易。事实上，对付这件表面上幼稚的事，比掌握相对论需要更多的天赋智慧。

方程 $y^3=x^2+2$ 在解 x，y 都是整数的限制下是不确定的（因为未知量的个数 x 和 y 是两个，多于联系它们的方程的个数一个），它是一个丢番图方程。这个名称来自希腊人丢番图，他是首先强调方程的整数解或者（不那么严格地）有理（分数）解的人之一。没有整数的限制，无论怎样描述解的无穷性都毫无困难：这样我们可以给 x 以我们想给的任意值，然后通过给这个 x^2 加 2，并给所得的结果开立方根来决定 y。但是找出所有整数解的丢番图问题就完全是另一码事了。$y=3$，$x=5$ 这个解是"由检查"看出的；问题的困难在于证明没有其它的整数 y，x 能满足这个方程。费马证明了没有其它的解，但象通常那样没有发表他的证明。直到他死后好多年，才找到了一个证明。

这一次他不是猜测，问题是很难的，他宣称他有了一个证明；后来就找到了一个证明。他的其它明确的断言都是如此，只有他在他的最后定理中作出的表面上很简单的一个断言例外，那个断言，数学家们奋斗了差不多三百年，还是没有证出来：不管什么时候费马断言他已经证明了什么，那么除了已经提到过的一个例外，那个断言后来总是被证明了的。他的严谨忠实的性格和他作为一个算

术学家的无比的洞察力，充分证实了一些人，但不是所有的人，对他作出的判断，这个判断就是，当他宣称他有了他的定理的一个证明时，他知道他在说什么。

费马有一个习惯，在读巴歇编的《丢番图》时，他把思考的结果简略地记在书页的空白处。空白处不适宜写下证明。这样，费马在评论丢番图的算术的第二卷上第八个问题时，该问题要求方程 $x^2+y^2=a^2$ 的有理数(分数或整数)解，他写下了如下的话：

"反之，不可能把一个数的立方分解成两个数的立方和，把一个数的四次方分解成两个数的四次方的和，或者更一般地说，把大于二的任意次幂的数分解成两个同次幂数的和：我已经发现了[这个一般定理的]一个真正奇妙的证明，但是这个空白太窄了，写不下。"(费马，《著作》III，241 页)。这就是他在大约 1637 年发现的他的著名的**最后定理**。

把这段话用现代语言叙述出来就是：丢番图的问题是找出整数或分数 x, y, a，使得$x^2+y^2=a^2$；费马宣称，不存在这样的整数或分数，足以使 $x^3+y^3=a^3$ 或 $x^4+y^4=a^4$，或一般地，如果 n 是大于 2 的整数，使 $x^n+y^n=a^n$。

丢番图的问题有无穷多个解；例子是 $x=3$, $y=4$, $a=5$; $x=5$, $y=12$, $a=13$。费马本人用他的无限下推法给出了 $x^4+y^4=a^4$ 不可解的一个证明。从他那时起，$x^n+y^n=a^n$已经就整数(或分数)对很多数字 n(直到小于 $n=14000$ 的所有素数①，如果数目x, y, a 没有一个可以用 n 整除的话)证明为不可能，但这还不是所需要的。要求的是解决所有比 2 大的 n 的证明。费马说他有了一个"奇妙的"证明。

72

① 读者能够很容易地看到，只要就 n 是奇素数的情形证明就够了，因为在代数上，$u^{ab}=(u^a)^b$，其中 u, a, b 是任意的数。

在说了这么多之后，有没有他是弄错了的可能呢？这个问题要留给读者了。一个伟大的数学家，高斯，投了费马的反对票。不过，吃不到葡萄的狐狸就说葡萄是酸的。其他的人投了赞成他的票。费马是一个第一流的数学家，一个无可指摘的诚实的人，一个历史上无与伦比的算术学家①。

① 1908年，已故的保罗·沃尔夫斯凯尔教授（德国人）留下了十万马克，以奖励第一个给出费马最后定理的完全证明的人。世界大战后的通货膨胀把这笔奖金贬值到不到一分钱，这就是现在一个贪财的人证出这个定理所能得到的奖励。



帕斯卡

第五章 “人的伟大与不幸”

帕 斯 卡

> 我们知道……概率论实际上只是成为计算的常识；它使我们精确地评价有理智的头脑出于某种直觉而感觉到的东西，往往无法说清其原因……。值得注意的是，这门起源于靠碰运气取胜的游戏的科学，竟然成了人类知识最重要的一部分。
>
> ——P. S. 拉普拉斯

布莱斯·帕斯卡1623年6月19日出生在法国奥弗涅的克莱蒙，比他伟大的同代人笛卡儿年轻二十七岁，卒年比笛卡儿晚十二

年。他的父亲艾蒂安·帕斯卡是克莱蒙审理间接税案件的最高法院的院长，是一个有文化的人，在那个时代多少算得上智力过人。他的母亲安托瓦内特·贝贡在他四岁时就去世了。帕斯卡有两个美丽而聪慧的姊妹，吉尔伯特和雅克琳，吉尔伯特后来成了佩里埃夫人，她们都在他的生活中起了重要作用，特别是雅克琳。

布莱斯·帕斯卡由于他的两部文学杰作而为普通读者熟知，这两部著作是《思想录》和《路易斯·德·蒙塔尔特致他的一位外省朋友的信》，通常称为“致外省人书”。人们通常把他的数学生涯几笔带过，而着重展示他在宗教方面的奇才。这里我们的观点必然多少有些不同，我们主要把帕斯卡看作一个很有天赋的数学家，任由他那在自我折磨中苦中作乐的癖性，和对他那个时代的教派论战进行的无益的思索，结果把自己降低为现在所说的笃信宗教的神经病患者。

在数学方面，帕斯卡也许是历史上最伟大的可能最伟大的人。他不幸先于牛顿仅仅几年，又是笛卡儿和费马的同代人，这两个人都比他意志坚定。他最好的工作，概率论数学理论的创立，是与费马分享的，而费马能够很容易地单独完成这一工作。在他以神童著称的几何方面，创造性的思想则是由另一个名气小得多的人——笛卡儿提供的。

74

就他在试验科学方面的见地来说，帕斯卡对科学方法有比笛卡儿清楚得多的想象力——就现代观点而论。但是他缺少笛卡儿那种单一的目标，虽然他做了一些第一流的工作，却任凭他对宗教奥秘的病态热情使自己偏离了本来可能做到的事情。

推测帕斯卡可能做出些什么是无用的。让他的一生来说明他实际上做了些什么吧。那么如果我们愿意，我们可以把他概括为一个数学家，因为我们可以说他做了他能做到的，没有人能做得更

多。他的一生是对《新约全书》中两个故事或比喻的不断评注，该书是他的忠实伙伴和可靠的安慰者。这两个比喻是：关于按才干领受责任的寓言和新酒胀破旧瓶子（或皮囊）①的说法。如果有过一个有着惊人天赋的人埋葬了他的才能，那就是帕斯卡；如果有过一个中世纪的头脑由于企图盛下十七世纪科学的新酒而精神分裂，那就是帕斯卡。他那伟大的天才是错予斯人了。

帕斯卡七岁时随他的父亲和姐妹一起从克莱蒙迁居到巴黎。大约在这个时期，父亲开始教育他的儿子。帕斯卡是个极其早熟的孩子，他和他的姐妹似乎都有超人的天赋。但是可怜的布莱斯与他聪明的头脑一起继承了（或得到了）一个极差的体格，他的两个姐妹中更有天赋的一个，雅克琳，似乎与她的哥哥是同一类型的人，因为她也变成了病态的宗教狂的牺牲品。

开始一切进行得还不错。老帕斯卡为他的儿子吸收当时的古典文学教育的轻松自如感到吃惊，试图让这孩子适当放慢进度，以免损害他的健康。根据年轻的天才可能会用脑太多而过于劳累的理论，数学是禁忌的。他的父亲是一个极好的教练，但是一个别脚的心理学家。他对数学的禁令很自然地激起了这孩子的好奇心。在帕斯卡大约十二岁时，一天他要求知道几何是怎么回事，他的父亲给他作了一番清楚的描述。这使帕斯卡象一只兔子似的开始向75 他的真正天职起跑了。他受到了上帝的召唤，不要惹耶稣会会士们的麻烦，而要当一个伟大的数学家，这与他自己后期的主张是相反的。但是当时他的听觉有毛病，他把次序弄乱了。

当帕斯卡开始学习几何学时发生的事情，成了数学上早熟的传说之一。附带说一下，数学上的神童并不都象人们有时认为的

① 见《新约全书》马太福音第九章十七节和马太福音第二十五章十五——三十节。——译者

那样总是会垮掉的。数学上的早熟经常是灿烂的成熟之果的最早的萌芽，虽然固执的迷信看法与此相反。帕斯卡的情形是，早期的数学天才并没有随着他的成长而泯灭，而是在其它的兴趣下受到了抑制。如我们将要在摆线这件事情上看到的那样，在他整个过于短促的一生中，他始终保持着做第一流数学工作的能力。他让数学退位，相对来说早了一些，如果因此要责备什么的话，那也许应该责备他的胃。他的第一个惊人的成就是完全依靠自己的创造力，没有从任何书本上得到提示，证明了一个三角形的内角和等于两个直角。这个成就鼓励他以极快的步伐向前迈进。

老帕斯卡认识到他养育了一个数学家，他高兴得流出了眼泪，给了他的儿子一本欧几里得的《原理》。帕斯卡贪婪他很快读完了这本书。不是把它作为一个任务，而是作为一种娱乐。这孩子用研究几何代替了做游戏。关于帕斯卡迅速地掌握了欧几里得几何这件事，他的姐姐吉尔伯特情不自禁地撒了一个对他评价过高的小谎。帕斯卡确实是在看到欧几里得的书以前，就自己发现并证明了几个欧几里得的命题。但是吉尔伯特虚构的关于她才气焕发的弟弟的故事，却比拿一个骰子一口气掷出十亿个一点还要不可能，因为这种事是绝对不可能出现的。吉尔伯特声称，她的弟弟已经独自重新发现了欧几里得的前三十二个命题，并且他是以欧几里得排出的同样次序发现它们的。第三十二个命题确实是帕斯卡重新发现的三角形内角和的著名命题。现在，把一件事情做对可能只有一种方法，但看来把事情做错很可能有无数的方法。今天我们知道，欧几里得的所谓严格的论证根本没有证明，甚至对他的前四个命题也是如此。说帕斯卡靠自己把欧几里得的全部遗误忠实地重新写了出来，这个故事讲起来容易，但却难以让人相信。不过，我们可以原谅吉尔伯特的夸大其词。她的弟弟值得这样夸大。

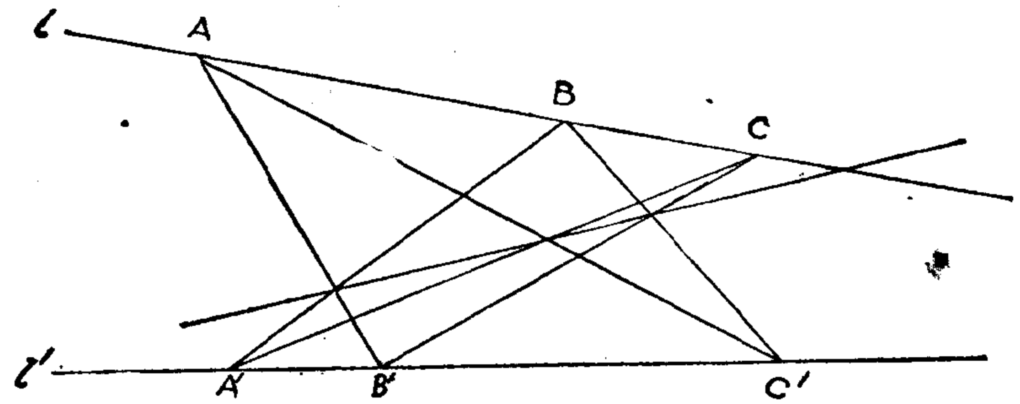
76 他在十四岁时，就被允许参加由梅塞内主持的星期科学讨论会，法国科学院就是由这个讨论会发展起来的。

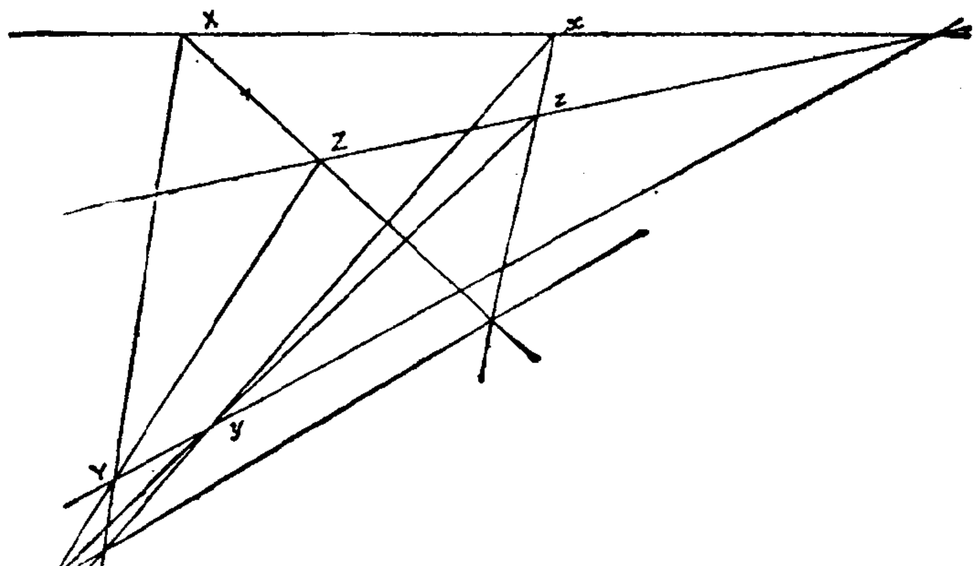
在小帕斯卡迅速地使自己成为一个几何学家的同时，老帕斯卡却由于他的诚实和一贯正直而使自己成为权贵们非常讨厌的人物。特别是在一桩关于强行征税的小事上，他不同意黎塞留红衣主教的看法。红衣主教发怒了；帕斯卡一家躲藏了起来，直到这场风波过去才露面。据说美丽而聪明的雅克琳隐姓埋名参加了为黎塞留演出的一出戏，而且演得很出色，因而拯救了全家，使她的父亲重新博得了红衣主教的好感。黎塞留被这个可爱的年轻女演员迷住了，他询问她的名字，当得知她是他那个微不足道的敌人的女儿时，黎塞留非常大方地宽恕了帕斯卡全家，给她的父亲在鲁昂安排了一个行政职务。从现在所知道的那个狡猾的老阴谋家黎塞留红衣主教的情况来看，这个令人愉快的故事大概是个愚蠢的传说。不管怎么说，帕斯卡一家再次找到了工作，在鲁昂安顿了下来。帕斯卡在鲁昂遇见了悲剧作家科尔内耶，这孩子的天才给他留下了很深的印象。当时帕斯卡完全是个数学家，所以也许科尔内耶没有料到，他这位年轻的朋友要成为法国散文的伟大创造者之一。

在这期间，帕斯卡一直在不间断地学习。他在十六岁以前（大约 1639 年）①，已经证出了整个几何领域中最美妙的定理之一。所幸的是，这个定理可以用任何人都能理解的术语描述出来。一个我们将在后面论及的十九世纪的数学家，西尔维斯特，称帕斯卡的伟大定理为一种“挑绷子”游戏。我们首先说明这个一般定理的一个特殊形式，它可以只用直尺画出来。

① 关于帕斯卡做出这一工作的时间，权威们看法不同，估计在十五岁到十七岁之间。1819 年版的帕斯卡著作中有一篇关于一些圆锥曲线命题的简短概要，但这并不是莱布尼兹见过的完整的论文。

记两条相交的直线为 l 和 l'。在 l 上任取三个互不相同的点 A、B、C，在 l' 上也任取三个互不相同的点 A'、B'、C'。把这些点用交叉的直线联起来，联接方式如下：A 和 B'，A' 和 B；B 和 C'，B' 和 C；C 和 A'，C' 和 A 相联。这些点对中的每一组联成的两条线交于一点。这样，我们得到了三个点。我们正在叙述的帕斯卡定理的特别情形是说，这三个点在同一条直线上。 77





在给出这个定理的一般形式之前，我们谈谈另一个与前面类似的结果，这个结果是德扎尔格(1593—1662)得出的。如果联接两个三角形 XYZ 和 xyz 的相应顶点的三条直线交于一点，那么两个三角形的对应边的交点落在一条直线上，这样，如果联接 X 和 x，Y 和 y，Z 和 z 的三条直线交于一点，那么 XY 和 xy，YZ 和 yz，ZX 和 zx 的交点就落在一条直线上。

在第二章中我们说过圆锥曲线是怎么回事。想象任意一条圆锥曲线，为明确起见，比如说一个椭圆。在它上面标出任意六个点，A，B，C，D，E，F，并按这个次序把它们联接起来。这样我们就有了一个内接于圆锥曲线的六边形，其中 AB 和 DE，BC 和 EF，CD 和 FA 是相对的边。这三对边的每一对的两条直线交于一点；三个交点落在一条直线上(见第十三章的图，217 页)。这就是帕斯卡的定理；它提供的图形就是帕斯卡所说的"神秘的六边形"。他也许是先证明了这个定理对圆是成立的，然后通过投影证明对任意的圆锥曲线也是成立的。如果读者希望看到对于圆这个图形象个什么样子，只需要一把直尺和一个圆规就够了。

78

关于这个奇妙的命题，有几件令人吃惊的事，最重要的是，它是由一个十六岁的孩子发现并证明的。再有，在这个有着非凡天赋的孩子围绕着他的伟大定理写的《关于圆锥曲线的短论》中，不少于四百个关于圆锥曲线的命题，包括阿波罗尼奥斯和其他一些人的工作，被系统地当作推论演绎出来，方法是让六个点成对移动直到重合，使得弦成为切线，并采用了其它一些方法。完整的《短论》本身从未出版过，显然是无法挽回地丢失了，但是莱布尼兹看见并检查过它的一个抄本。此外，帕斯卡所做的这种几何本质上不同于希腊几何；它不是度量的几何，而是画法几何或射影几何。线段或角度的量值在定理的陈述中或证明中都无足轻重。这个定

理本身就足以废除把数学作为"量"的科学的愚蠢定义，这个定义是从亚里士多德那里继承来的，并且有时仍在词典中再现。在帕斯卡的几何中没有"数量"。

为了了解定理中的射影意味着什么，想象从一个点发出的一个光的(圆)锥，用一块平玻璃片从各个方向穿过这个光锥。玻璃片穿过光锥的图形的边界曲线就是一个圆锥曲线。如果就任意给定的位置把帕斯卡的"神秘的六边形"画在玻璃片上，并以另一块玻璃片穿过光锥，使得六边形的阴影落在它上面，那么阴影就是另一个"神秘的六边形"，它的相对边交出的三个点在一条直线上，而"三点线"的阴影就在原来的六边形上。那就是说，帕斯卡的定理在圆锥投影下是恒定的(不变的)。普通初等几何研究的图形的度量性质不在投影下不变；例如，直角的影子在第二片玻璃上的所有位置都不是直角。很明显，这类射影几何，或画法几何是自然适用于一些透视问题的几何之一。帕斯卡在证明他的定理时用到了射影的方法，但是德扎尔格在推导上面叙述过的关于"在透视位置的"两个三角形的结果时，已经用过了这一方法。帕斯卡为这一伟大发明对德扎尔格大为称赞。 79

所有这些辉煌的成就都是付出了很高代价取得的。帕斯卡从十七岁直到他三十九岁去世，几乎每天都在痛苦中度过。严重的消化不良在白天折磨着他，经常性的失眠症使他在夜晚半睡半醒地作着恶梦。然而他不间断地工作。十八岁时，他发明并制作了历史上第一架计算机——所有在我们自己这一代使成千上万的办事员失掉工作的算术机器的祖先。我们将在后面看到这个巧妙的发明的归宿。五年以后，在1646年，帕斯卡经历了他的第一次"转变"。这个转变并不深刻，可能因为帕斯卡那时只有二十三岁，并

且仍然沉浸在他的数学中。在这以前，这一家还是正正派派地很虔诚的；现在他们都好象有点神经失常了。

很难让一个现代人在强烈的宗教热情中得到休养，这种热情使整个十七世纪动荡不安，使家庭分裂，使各基督教国家和教派公开地互相攻击。在那个时代，所谓的宗教改革者中，有一个叫做科尼利厄斯·詹森（1585—1638）的神气活现的荷兰人，当上了伊普雷的主教。他的教义的主要之点是必需"改宗"，以此作为求得"赦免"的手段，这多少有点象今天某些仍然流行的教派的做法。不过，至少在不赞成的人看来，救世似乎只是詹森的抱负中次要的部分。他确信，上帝特别挑选了他在今世摧毁那些耶稣会会士们，使他们艰难困苦，死后永远沦入地狱。这就是他的号召，他的使命。他的信条既不是罗马天主教的也不是新教的，虽然它比较倾向于后者。它的动人的精神首先是，最后是，并且始终是对那些反对其教义偏执性的人们的狂热仇恨。现在（1646年），帕斯卡一家热烈地——但开始还不是太热烈——信奉詹森教派的这个不可爱的信条了。这样一来，只有二十三岁的年轻帕斯卡就开始从精神上慢慢死亡了。同一年，他的整个消化道变得更糟了，他受着时而出现的麻痹症的折磨。但他还没有在智力上死亡。

1648年，他在科学上的伟大在一个全新的方向再次闪现。帕斯卡继续进行托里切利（1608—1647）关于大气压力的工作，他超过了托里切利，并且证实他懂得托里切利的老师伽利略向世界展示的科学方法。通过他提出的用气压计做实验，帕斯卡证明了现在每一个物理学的初学者都熟知的关于大气压力的事实。帕斯卡的姐姐吉尔伯特已经与佩里埃先生结婚。在帕斯卡的建议下，佩里埃把一个气压计带到在奥弗涅的多姆山上，他注意到随着气压下降，水银柱下落了，从而完成了这一实验。稍后，当帕斯卡与

80

他的妹妹雅克琳迁到巴黎时，他自己重复了这一实验。

帕斯卡和雅克琳回到巴黎不久，就与父亲重逢了，现在他们的父亲已重新得宠，担任了州议员。不久，这一家接受了笛卡儿多少算是正式的拜访。笛卡儿和帕斯卡就很多东西进行了讨论，也包括气压计。这两个人之间几乎没有什么互相敬慕之心。举例来说，笛卡儿公开拒绝相信《关于圆锥曲线的短论》是一个十六岁的孩子写的。另一件事是，笛卡儿怀疑帕斯卡从他那里窃去了气压计实验的想法，因为他曾在给梅塞内的信中讨论过该实验的可能性。而前面已经提到，帕斯卡从十四岁起就一直在梅塞内神父那里参加星期讨论会。第三个双方互不喜欢的原因是他们的宗教信仰互不相容。笛卡儿终生从耶稣会会士们那里得到善意的对待，因而热爱他们；帕斯卡追随虔诚的詹森，仇恨耶稣会会士甚于魔鬼之仇恨圣水。最后，按照坦率的雅克琳的说法，她的哥哥和笛卡儿两人彼此深深地互相嫉妒。这次拜访是很不成功的。

不过，好心的笛卡儿确实给了他的年轻朋友一些真正符合基督教精神的极好的忠告。他告诉帕斯卡学他的样子，每天在床上躺到十一点；还给可怜的帕斯卡那可怜的胃指定了饮食：除去牛肉汁以外什么也不要吃。但是帕斯卡无视这个好意的忠告，也许因为它出自笛卡儿。在帕斯卡完全缺乏的其它东西中，有一样是幽默感。

雅克琳现在开始对她哥哥的天才施加不好的影响——或好的影响，这全看怎么看了。1648年，雅克琳在她二十三岁这个容易受影响的年龄，宣称她准备进巴黎附近的波尔瓦亚尔修道院去当修女，那里是詹森教派在法国的主要聚集处。她的父亲断然反对这个计划，虔诚的雅克琳便把她受到阻挠的努力集中在她走入歧途的哥哥身上。她怀疑他还没有彻底转变信仰，而他本来是应该

81

能彻底转变的，显然她是对的。现在这一家又回到克莱蒙，在那儿住了两年。

在这两年过得很快的日子里，虽然他的妹妹雅克琳焦急不安地劝告他，要把自己完全奉献给上帝，但是看来帕斯卡仅仅奉献了一半。就连他那难对付的胃也有好几个月遵守节制饮食。

据一些人说，帕斯卡在这个精神健全的阶段和其后的几年中，发现了酒和女人的注定的用途，另外一些人则坚决反对这种说法。他保持沉默。这些关于卑鄙的人类天性的谎言也许终究不过是一些谎言而已。因为帕斯卡死后，很快就成为基督教圣徒中的一员。任何试图发现他作为一个凡人的生活事实的努力，都被敌对的宗派镇静然而强硬地遏止了，这些宗派中的一个拼命要证明他是一个虔诚的狂热信徒，而另一个则要证明他是一个持怀疑态度的无神论者，但是双方都宣称帕斯卡是一个不属于尘世的圣人。

在这些危险的年月里，病态的神圣的雅克琳继续对他脆弱的哥哥施加影响。出自一种具有讽刺意义的美妙的怪念头，帕斯卡不久就转变了——这次是向好的方面转变——他注定要对他过分虔诚的妹妹转守为攻，把她赶进修道院，而她现在也许不那么想进修道院了。当然，这不是对所发生的事情的正统解释；但是除了这一派或另一派的——基督教的或无神论的——盲从份子以外，对任何人说来，这样记述帕斯卡和他未婚妹妹之间不健康的关系，要比传统认可的记述更为合理

《思想录》的任何一个现代读者都一定会对一些这样或那样的东西感到震惊，这些东西我们比较沉默寡言的祖先们或者完全没有注意到，或者他们更明智而宽容地忽略了。那些信件也揭露了大量应该郑重地埋藏起来的东西。帕斯卡在《思想录》中关于“欲望”的胡言乱语完全暴露了他，在看到他已婚的姐姐吉尔伯特自然

地爱抚她的孩子们时，他反常地疯狂般地激动，这个充分证明了的事实也完全暴露了他。

现代心理学家们和有普通常识的古人一样，经常谈到性抑制和病态的宗教狂热之间的高度相互作用。帕斯卡受着这两方面的折磨，他的不朽的《思想录》是灿烂的，如果偶尔有一些语无伦次的话，那只是证明了他的纯粹生理上的怪癖。只要一个人能在他的全部天性告诉他去尽情作乐时，有足够的人性让自己去作乐，那他就可能随心所欲地去享受整个生活，而不会在一堆关于人的苦难和尊严的毫无意义的神秘主义和陈词滥调下扼杀他天性中较好的一半。 82

这个总是漂泊不定的家庭在1650年回到了巴黎。第二年父亲死了。帕斯卡抓住这个时机给吉尔伯特和她的丈夫写了一篇关于死亡的长长的说教。这封信大受称赞。我们没有必要在这里重述它的任何部分；希望形成自己对它的看法的读者可以很容易地找到它。这封信对总该是敬爱的父亲的死亡，作了假装虔诚，毫无心肝的说教，这种自命不凡的感情的迸发为什么还会激起人们对作者的赞美而不是对他的轻蔑，其原因就象这封信的一部分喋喋不休、令人作呕地谈论上帝的爱一样，是一个完全不可理解的谜。不过，关于文体没有什么可争论的，不管怎么说，那些喜欢象帕斯卡这封被人们广为引用的信这类东西的人，尽可以不受干扰地欣赏这一法国文学中自觉地自我暴露的杰作。

老帕斯卡的死的一个更实际的结果，是给帕斯卡提供了一个机会，作家产的管理人，回到与他的同胞的正常交往中。妹妹雅克琳受到哥哥的鼓励，现在进了波尔瓦亚尔修道院，她的父亲再也不能反对她了。她对哥哥的灵魂的甜蜜关怀，现在又加进了在财产分配上的完全世俗的争吵这个佐料。

一年前(1650年)的一封信，揭露了帕斯卡虔诚性格的另一面，或许是出于他对笛卡儿的嫉妒。帕斯卡被瑞典的克里斯蒂娜的超群的光彩幌花了眼，他谦卑地请求把他的计算机器献在"世界上最伟大的女王"的脚下，他以浸透了蜂蜜和奶油的阿谀之词宣称这位女王在智力上犹如她在社会地位上一样出类拔萃，克里斯蒂娜怎么处置这台机器就不得而知了，她没有邀请帕斯卡去代替被她折腾死的笛卡儿 。

最后，在1654年11月23日，帕斯卡真的转变了。根据一些记载，他过了三年放荡生活。最有权威的人士似乎一致认为这个传说没有什么道理，他的生活毕竟不是如此放荡的。他只是尽他可怜的力量去象正常人那样生活，从生活中得到一点比数学和宗教更多的东西。在他转变的那一天，他正驾驭着一辆四匹马拉的马车，马突然奔跑起来。领头的两匹马冲过了纳依河桥边的栏杆，但是马车的挽绳断了，帕斯卡给留在了路上。

83

对于象帕斯卡这样一个有着神秘气质的人，这次幸免于暴死是直接来自上天的警告，要他自己赶紧在道德的悬崖边上勒马，而他这个病态的自我分析的牺牲品，想象自己正要掉下悬崖。他拿了一小张羊皮纸，在上面铭记了一些关于神秘的献身的模糊费解的感想。从此以后，他便贴胸带着它作为一个护身符，以保护他免受诱惑，并提醒他，是上帝的仁慈，把他这样一个不幸的罪人从地狱的入口处救了出来。从那以后，他只有一次失去了上帝的恩典(按照他自己的可怜又可笑的看法)，虽然在他全部余生中，他始终无法摆脱他脚前的悬崖的幻觉。

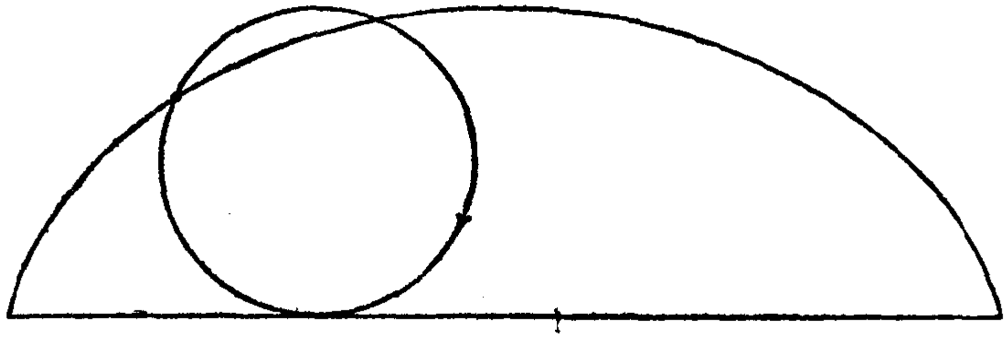
雅克琳来援助她的哥哥了，她现在准备进修道院当修女。帕斯卡部分由于他自己的原因，部分由于他妹妹的有说服力的恳求，避开尘世，住进了波尔瓦亚尔修道院，从此把他的天才完全埋葬在

关于“人的伟大与不幸”的沉思之中。这时是1654年，帕斯卡三十一岁。不过，在永远摆脱肉体与灵魂之前，他已经完成了他对数学的最重要的贡献，这就是与费马一起，创造了概率的数学理论。为了不打断对他生平的叙述，我们将暂时推迟对这一理论的说明。

他在波尔瓦亚尔修道院的生活即便不象可能希望的那样精神健全，至少是洁净的，安静而有规律的日常生活，对他时好时坏的健康很有好处。正是在波尔瓦亚尔期间，帕斯卡写作了著名的《致外省人书》，这部著作是帕斯卡为了帮助被指控为异端的詹森派著名人物阿尔诺开释而写的。这些著名的信(共有十八封，第一封在1656年1月23日出版)是辩论技巧的杰作，据说给了耶稣会会士以沉重的打击，该会再也没有从这个打击下完全恢复过来。不过，就象任何长眼睛的人都能客观地观察到的那样，耶稣会依然很活跃；所以人们可以不无道理地怀疑，《致外省人书》是否具有表示同情的批评家们所说的那种击中要害的效力。 84

尽管帕斯卡热忱地专注于有关他的得救和人的不幸的问题，他仍然能够做出极好的数学工作，虽然他认为一切科学研究都应该避开无益的事情，因为它们对灵魂有着有害的影响。不管怎样，他确实又一次失去了天恩，但是仅此一次。这次就是为了著名的摆线这件事。

这个美妙的均衡的曲线(它可以通过沿着一条平坦的车道上的直线滚动的车轮圆周上一个固定点的运动描绘出来)，似乎在1501年第一次出现在数学文献中，那时夏尔·布维尔在与化圆为方相关的问题中描述过它。伽利略和他的学生维维亚尼研究过它，并解决了在任何点上画出曲线的切线问题(当这个问题提交给费马时，他立刻就解决了它)，伽利略提示它可以用于桥拱。自从钢筋混凝土广泛使用以来，经常可以在公路旱桥上看到摆线拱。由



于力学原因(伽利略当时不知道)，摆线拱在建筑上比其它方案优越。在研究过摆线的著名人物中有圣保罗大教堂的建筑师克里斯托弗·雷恩爵士，他确定了曲线上任意弧的长度和它的重心，而惠更斯出于机械方面的原因，把它引进到摆钟的制造上。惠更斯(1629—1695)的所有发现中，一个最美妙的发现是与摆线相关的。他证明了摆线是等时曲线，就是说，放在向下的曲线(翻过来象一个碗那样)上任何地方的小珠子都会在重力的作用下，在相等的时间内滑到最低点。由于它奇特的美妙和精巧的性质，以及它在好争吵的数学家中引起的无尽的争论(这些数学家互相挑战要解决与它相关的这个或那个问题)，摆线被称为“几何学中的海伦”，这个说法来自希腊—特洛伊的美女，据说只是她那美丽的容貌就使“一千艘战船下水”。

在折磨着可怜的帕斯卡的病痛中，还有顽固的失眠症和严重的牙病——在那个时代，牙科医术是由理发匠用坚硬的钳子和粗暴的力气来实施的。在一个受着牙痛折磨，躺在床上不能入睡的夜晚(1658年)，帕斯卡开始发疯地想着摆线，用这种办法来使自己忘却令人苦恼的疼痛。使他惊奇的是，他不久就注意到牙痛停止了。帕斯卡把这解释为上帝的暗示：他在想着摆线而不是他的灵魂时并不是在犯罪，于是他让自己继续想下去。一连八天，他全神贯注于摆线的几何，并且成功地解决了与它相关的许多重要问题。他以

阿莫斯·德东维尔的笔名发表了他的一些发现，作为对法国和美国数学家的挑战。帕斯卡对待他的对手们一向是严肃认真的，但在这个问题上不是那样。这是他数学能力的最后一次闪现，是他进波尔瓦亚尔修道院后对科学作出的唯一贡献。

同一年(1658年)，他患了他整个痛苦的一生中最严重的病。象爆裂似的不断的头痛，现在剥夺了他的一切，他只能偶尔睡一小会儿。他忍受了四年的痛苦，过着更加清心寡欲的生活。1662年6月，他把他的房子让给了一家患天花的穷人，把这作为一种自我牺牲的举动，然后去和已婚的姐姐住在一起。1662年8月19日，他痛苦的一生在惊厥中结束，卒年三十九岁。

尸体解剖揭露了关于胃和要害器官的预料的结果；也暴露出大脑的严重损害。然而尽管有这一切，帕斯卡已经在数学和科学上作出了伟大的工作，并在文学上留下了他的名字，这个名字在将近三个世纪之后仍然受到尊敬。

也许除了“神秘的六边形”以外，帕斯卡在几何上做的美妙的工作，要是他没有作的话，都会有其它人做出来。这一点特别适用于关于摆线的研究。微积分发明之后，所有这些事情与微积分以前相比都变得无可比拟地简单，并且很快就成了教科书中要求年轻学生们做的练习。但是在与费马一起创造的概率的数学理论中，帕斯卡开创了一个新的天地。看来很可能，帕斯卡在他作为作家的名声早已被人们遗忘以后，将会由于他的这个日益重要的伟大发现而为人们所铭记。《思想录》和《致外省人书》除了它们在文学上的成就以外，主要是对迅速消失的一类人具有吸引力。反对或赞成一个特殊论点的那些论据，在一个现代人看来，不是微不足道的，就是缺乏说服力的，帕斯卡那样热情地专心研究的那些问

86

题，现在似乎又奇怪又可笑。如果他讨论的关于人的伟大和不幸的问题，确实象那些热心家宣称的那样极其重要，而不仅是说得很玄妙而又不能解答的伪问题，那么看来陈腐的说教也不见得能解决它们。但是在他的概率理论中，帕斯卡说明并解决了一个真正的问题，就是把纯粹偶然事件的表面上的无规律性置于规律、秩序和规则的支配之下，今天这个巧妙的理论似乎是人类知识的根本，同样也是物理科学的基础，它的分枝从量子理论直到认识论无所不在。

概率的数学理论的真正奠基人是帕斯卡和费马，他们在1654年间的一段极其有趣的通信中发展了这个学科的主要原理。这段通信现在可以很容易地在《费马著作集》(P. 坦纳里和 C. 亨利编辑，第 2 卷，1904 年)中找到。这些信表明帕斯卡和费马同等地参与了这个理论的创立。他们对问题的正确解答仅在细节上有所不同，在基本原理上则是一致的。在关于"点子"的某个问题中，帕斯卡对于单调冗长地枚举可能的情形感到厌烦，试图走捷径，结果犯了错误。费马指出了错误，帕斯卡承认了。这一系列通信中的第一封丢失了，但这次通信的原因已得到充分证实。

导致整个广阔理论的最初问题，是谢瓦利埃·德·梅雷向帕斯卡提出的，这个人多少是个职业赌徒。所提出的问题就是"点子"的问题：两个赌徒(比如说，在掷骰子)中的每一个需要有一定数目的点子才能赢得一局；如果他们在一局结束以前离开赌场，他们应该如何分赌注呢？每一个赌徒的分数(点子的数目)是在离开的时候给出的，这个问题相当于决定每个赌徒在赌局的给定阶段赌赢的概率。假定赌徒们赢一个点子的机会均等，解答只需要有正确的常识；当我们寻找一个计算可能情形的方法而不用实际上计算它们的时候，概率的数学就登场了。例如，在一付普通的五十二张

87

的牌中，一手拿到三张两点和不是两点的其它三张牌有多少种不同的可能性呢？或者，掷出十个骰子，有多少次能出现三个么点，五个二点，两个六点呢？第三个同样无聊的问题是：把十粒珍珠，七粒红宝石，六粒绿宝石，和八粒蓝宝石穿起来，如果每一类宝石都被当作是没有区别的，能够穿出多少不同的手镯呢？

要找出做一件指定的事情有多少种方法，或找出能够发生一件完全指定的事件有多少种方法，这个办法属于人们称为组合分析的学科。它对概率论的应用是明显的。例如，假定我们要知道掷三个骰子，一次掷出两个么点和一个两点的概率。如果我们知道三个骰子掷出方式的全部数目($6\times6\times6$ 或 216)，也知道两个么点和一个两点出现方式的数目(比如说 n，读者可以自己找出 n 是什么)，那么所要求的概率是 $n/216$。(这里 n 是 3，所以概率是 3/216)。安托万·贡博·谢瓦利埃·德·梅雷挑起了这一切，帕斯卡认为他是一个很有头脑的人，但是没有数学头脑，而莱布尼兹似乎不喜欢放荡的谢瓦利埃，把他说成是一个具有洞察力的人，一个哲学家，和赌徒——一种完全不寻常的组合。

与组合分析和概率论中的问题相联系，帕斯卡大量应用了算术三角形

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdots\cdots & & & & \cdots\cdots & & & & \cdots\cdots & &
\end{array}
$$

其中头两行以后的任一行中的数是由上面一行中的数得到的，即

把上一行数中两端的1抄下来，再从左到右把相邻的数两两加在一起，就得到了新行中的数；这样$5=1+4$，$10=4+6$，$10=6+4$，$5=4+1$。第n行中1以后的数是从n个独立的东西中选出一个，两个，三个……的不同选择方法的数目。例如，10是能够从5个不同的东西中选出的不同的几对东西的数目。第n行中的数也就是$(1+x)^n$按二项式定理展开的系数，这样，对于$n=4$，$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$也是如此。这个三角形还有许多其它有趣的性质。虽然在帕斯卡以前人们就知道它了，但是它通常用帕斯卡的名字命名①，因为他在概率论中独创性地应用了它。

这个起源于赌徒的争执的理论，现在是许多事业的基础，我们认为这些事业比赌博重要得多，它们包括各种类型的保险业，数学统计和它们对生物和教育上的各种测量的应用，以及现代理论物理学中的许多分支。我们不再考虑在一个给定的瞬间电子所"在"的一个确定的位置，但是我们确实计算它在一个给定区域内的概率。稍加思索就会知道，甚至我们做出的最简单的测量(当我们试图精确地测量某样东西时)，都是统计性质的。

这个极其有用的数学理论的卑微起源是很多理论的起源的典型例子：有些显然是微不足道的问题，最初的解答或许是出自无意的好奇心，结果导致了深奥的一般性原理。这些原理就象在量子理论中原子的新统计理论一样，可以使我们修正我们对物质世界的全部概念，或者就象把统计方法应用到智力测验和遗传学研究时所发生的那样，可以使我们修改我们关于"人的伟大和不幸"的传统信念。当然，不管是帕斯卡还是费马都没有预见到从他们这个不体面的婴儿会得出什么结果。数学的整个结构是如此紧密地交

① 在我国，这个三角形通常称为杨辉三角形，以我国南宋(約十三世纪)数学家杨辉的名字命名。——译者

织在一起，以至我们只要拆散和剔出任何一根碰巧不合乎我们个人爱好的线，就会冒毁坏整个图案的危险。

不过帕斯卡确实应用过一次概率(在«思想录»中)，这个应用在他那个时代是非常实际的。这就是他著名的“赌注”。在赌博中的“期望”是奖金的价值乘以赢得奖金的概率。按照帕斯卡的看法，永恒幸福的价值是无限的。他论证说，即使通过虔诚的宗教生活来赢得永恒幸福的概率确实非常小，然而，由于希望是无限的(无限的任何有限的分解，仍然是无限的)，仍旧值得人们去过这样的生活。不管怎么样，他自己服了这剂药，但是正象要表明他没有把瓶子也一起吞下去一样，他在«思想录»的另一个地方草草写下了这个彻底不可知论的疑问：“可能性是可能的吗?”就象他在另一个地方说的，“一味干这样的琐事是令人生厌的，但是有的时候就得做琐事”。帕斯卡的困难在于，他并不总是看得很清楚，什么时候(就象他在对上帝打赌中那样)他在做无意义的琐事，或者什么时候(就象在解决谢瓦利埃·德·梅雷的赌博难题那样)他正在做意义深远的事情。



牛顿

第六章　在海边

牛　　顿

流数[微积分]方法是一把万能钥匙，现代数学家借助它揭开了几何学的秘密，因而也揭开了大自然的秘密。

——贝克莱主教

我不需要假设。

——艾萨克·牛顿

"我不知道世人怎样看我；可我自己认为，我好象只是一个在

海边玩耍的孩子，不时为拾到比通常更光滑的石子或更美丽的贝壳而欢欣，而展现在我面前的是完全未被探明的真理之海。”

这些话是艾萨克·牛顿在他长寿的一生行将结束时对自己的估价。然而，能够正确评价他的工作的后继者们几乎无一例外地指出，牛顿是人类有史以来最有才智的人——“他在智能上超过了全人类”。

艾萨克·牛顿出生在1642年圣诞节(按“旧历”计算)那天，伽利略就死于这一年。他出自一个人口不多，家境中平的农场主家庭，居住在伍尔索姆村的庄园里，距离英国林肯郡的格兰瑟姆大约八英里。他的父亲也叫艾萨克，三十七岁就去世了，死时他的儿子还没有出生。牛顿是一个早产儿。他出生的时候非常瘦小虚弱，以致两个到邻居那里为婴儿取“滋补品”的妇女，以为回来时会发现他已经死了，他母亲说他生下来的时候是那样瘦小，用一夸脱容量的杯子就能把他装下。

关于牛顿的祖先，没有什么足以使学遗传学的学生感兴趣的材料。他的父亲被邻居们描述成一个“任性，放肆而软弱的人”；他的母亲汉娜·艾斯库是一个节俭、勤劳而能干的女当家。在她丈夫死后，有人把她作为一个很不错的妻子介绍给一个老单身汉，说牛顿太太是一个“不寻常的好女人”。谨慎的单身汉是北威瑟姆附近教区的史密斯·巴纳巴斯牧师，由于这个推荐，他和这位寡妇结了婚。成了史密斯太太的母亲，把三岁的儿子留给他的祖母照料。她第二次结婚生了三个孩子，这些孩子没有一个显示出突出的能力。牛顿从母亲第二次婚姻的财产和生父的遗产中，最终得到了大约每年八十英镑的收入，这笔钱在十七世纪当然比现在值钱得多。牛顿不是那些不得不安于贫困的大数学家中的一个。

牛顿幼年身体羸弱，被迫躲开同龄孩子们的需要体力的游戏。

他不能象普通孩子那样玩耍，就发明了自己的娱乐，在这些娱乐中，他的天才首次崭露出来。人们有时说，牛顿不是早慧的孩子。就数学而论这可能是对的，但是如果说在其它方面也对的话，那就得给早慧下一个新的定义了。牛顿作为对光的奥秘的探索者，显示出了无可比拟的实验才能，这种才能在他幼年时代独创性的娱乐活动中一定就已经很明显了。夜晚使轻信的村民惊吓的带着灯的风筝；完全由他自己做成的构造极好而且会工作的机械玩具——水车；把麦子磨成雪白的面粉的磨，这个磨有一张贪婪的嘴(几乎吞下了所有的利润)，它既作为磨面机又作为动力；送给他许多小女伴的针线盒和玩具；图画，日规，和为他自己做的木头钟(可以走)——这些就是这个"不早慧"的孩子制作的一些东西，他试图用这些东西把他的玩伴们的兴趣转向"更富于理性的"途径。除了这些过人才能的比较明显的证据以外，牛顿还博览群书，并且在笔记本上草草记下了各种各样神秘的方法和不同凡响的意见。如果把这样一个孩子看作仅仅是智力正常、身心健康的少年，就象他的乡村朋友认为的那样，那就漏掉了明显的一面。

牛顿是在附近的免费乡村小学接受早期教育的。他的舅舅威廉·艾斯库牧师似乎是头一个看出他有些不寻常的人。艾斯库本人毕业于剑桥大学，在牛顿十五岁时，艾斯库终于说服了牛顿的母亲，把她的儿子送往剑桥大学读书，而不要把他留在身边。牛顿的母亲本来计划在丈夫死后回到伍尔索姆时，让牛顿帮助管理农庄。

不过，在这以前牛顿已经主动地采取了断然的行动。由于舅舅的劝告，他被送到格兰瑟姆的普通中学，上了二年级。在那里，他受到学校里一个小霸王的欺负。有一天，这个小霸王在牛顿的肚子上踢了一脚，使他身心极度痛苦。牛顿在一位男教师的鼓励下，向这个小霸王提出挑战，要公平地打一架，牛顿打败了他，并且

为了最后表示羞辱对手，牛顿把这个懦夫的鼻子按在了教堂的墙上。直到这时候，年轻的牛顿对他的功课还不感兴趣，现在他开始证明他的头脑也象他的拳头一样好使了。他很快就上升为学校里最好的学生。校长和艾斯库舅舅认为他已经够资格去剑桥了，但是最后作出决定的一步是艾斯库发现他的外甥在篱巴下面读书，而他本应该在集市上帮助一位雇工做买卖。

牛顿在格兰瑟姆上中学和后来为进剑桥做准备的日子里，寄宿在乡村药剂师克拉克先生家里。牛顿在药剂师的顶楼上发现了一包旧书，他贪婪地读完了这些书。在这个家里，他常常看见克拉克前妻的女儿斯托里小姐，牛顿爱上了她，并在1661年6月离开伍尔索姆去剑桥以前与她订了婚，那时他十九岁。虽然牛顿在他这第一个也是唯一的爱人活着的时候，始终对她怀着深厚的情意，但是离别和对工作的日渐专注，把这段爱情推到了幕后，牛顿终生未婚，斯托里小姐成了文森特太太。

在叙述牛顿在三一学院的学生生涯之前，我们先简短地回顾一下他那个时代的英国，以及这个年轻人继承下来的科学知识。那时，又顽固又偏执的苏格兰的斯图亚特家族，根据他们宣称上天赋予他们的神圣权力，已经统治了英国。其结果是显而易见的，人们憎恨对神圣权力的僭越；统治者的极端的骄傲、愚蠢和无能引起了叛乱。牛顿在内战——政治和宗教的——气氛下长大成人，在这些战争中，清教徒和保皇党人同样靠滥肆抢劫，使他们衣衫褴褛的军队保持战斗力。查理一世（生于1600年，1649年被处死）已经做了他力所能及的一切去压服国会，但是尽管他残忍地横征暴敛，尽管他的星法院通过高明地滥用法律和公理给他以有力支持，他也不是奥利弗·克伦威尔率领下的坚忍不屈的清教徒们的对手，而

接着又轮到克伦威尔向他的神圣事业的神圣正义发出呼吁，以支持他凌驾于国会之上的屠杀和凶残的进军。

所有这些野蛮的行径和可怕的虚伪，对年轻的牛顿的性格产生了一种极其有益的影响：他是怀着对暴政、狡诈和压迫的强烈仇恨成长起来的。当后来詹姆斯国王企图强行干涉大学事务时，这个数学家和自然哲学家无需学习就知道，对于自由受到威胁的人们来说，大无畏的勇气和团结一致的阵线乃是对无耻的政治家联盟最有效的防卫；他是通过观察和直觉认识到这一点的。

据说牛顿说过这样的话，“如果我比其他人看得更远些，那是因为我站在巨人的肩上。”他确实是站在巨人的肩上。在这些巨人当中，最高大的有笛卡儿、开普勒和伽利略。从笛卡儿那里，牛顿继承了解析几何，他一开始曾发现解析几何很难懂；从开普勒那里，他继承了天体运动的三个基本原理，这些原理是经过二十二年非人的计算后由经验发现的；而从伽利略那里，他得到了成为他自己动力学奠基石的运动三定律中的头两个。但是砖头还不是大厦；牛顿是动力学和天体力学的建筑师。

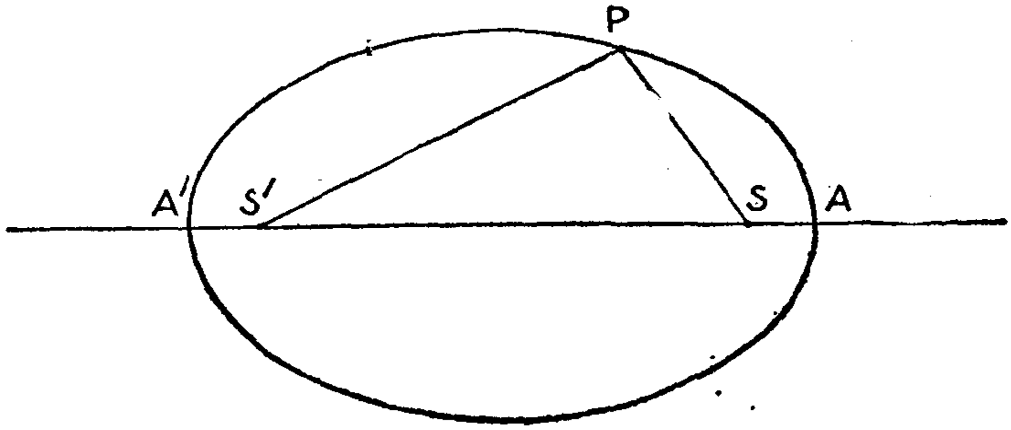
由于开普勒的定律要在牛顿的万有引力的发展中起主导作用，我们先在这里叙述它们。

I. 行星围绕太阳作椭圆运动，太阳是这些椭圆的一个焦点。[如果 S、S' 是焦点，P是行星在轨道上的任意位置，那么 $SP+S'P$ 总是等于椭圆的主轴 AA'，见下图。]

II. 联接太阳和行星的直线在相同的时间内扫过相等的面积。

III. 每个行星完全旋转一周所需的时间的平方，与它到达太阳的平均距离的立方成比例。

通过将微积分应用于牛顿的万有引力，这些定律用一到两页的篇幅即可证明。牛顿的万有引力规律是：



宇宙中任意两个质点互相吸引，引力与它们质量的乘积成正比，与它们距离的平方成反比。这样，如果m、M是两个质点的质量，d是它们之间的距离(都以适当的单位度量)，那么二者之间的引力就是$\frac{k\times m\times M}{d^2}$，其中$k$是某个常数(通过适当选取质量和距离的单位，可以让$k$等于1，所以引力就简化为$\frac{m\times M}{d^2}$)。 94

为完整起见，我们叙述牛顿的运动三定律。

I. 每一个物体保持它原来的静止状态或匀速[没有加速度]直线运动状态不变，除非作用于它的力迫使它改变这种状态。

II. 运动量的改变率["质量乘以速度"，质量和速度均以适当的单位度量]与施加的动力成正比，而且改变方向与力所作用的直线方向一致。

III. 作用力与反作用力[如完全弹性的弹子球在无摩擦的桌子上的碰撞]大小相等，方向相反[一个球失去的动量被另一个球获得]。

所有这一切之中，对数学来说最重要的是说明第二运动定律的开头的那几个字，改变率。什么是"改变率"，怎样衡量它呢？如前所述，动量是"质量乘以速度"。牛顿讨论的质量被假定为在运

动中保持常量——不象现代物理中的电子和其它的粒子，当它们的速度接近光速的一个可测定的分数时，它们的质量明显增加。这样，为了研究"运动量的改变率"，弄清楚速度就能满足牛顿的要求，而速度是位置的改变率。他对这个问题的解答——对研究以连续方式运动的粒子速度提供了切实可行的数学方法，不管这个粒子的运动是多么不规律——使他掌握了揭开改变率及其度量的全部秘密的万能钥匙，这把钥匙就是微分学。

95

由改变率产生的一个类似的问题又使牛顿掌握了积分学。怎样计算一个速度每时每刻都在变化的运动粒子在给定的时间内跑过的全部距离呢？在回答这个问题或者其它一些类似的问题(有些是用几何术语描述的)时，牛顿发明了积分学。最后，牛顿把这两类问题联系起来考虑，作出了一个重大的发现：他看出微分学和积分学通过一个定理，密切而互反地联系在一起，这个定理今天称为"微积分学的基本定理"——我们将在适当的地方叙述它。

牛顿除了从前人那里继承的科学和数学知识以外，他还从他那个时代的精神接受了另外两个礼物：对神学的热情和对炼金术奥秘的遏止不住的渴求。谁要是指责牛顿把他无比的智力用于这些现在看来根本不值得他认真对待的事情上，那就是在指责自己。因为在牛顿的时代，炼金术就是化学，人们还没有看出，在炼金术里实际上并没有多少东西——除了要从它产生的东西，即现代化学；牛顿作为一个天生具有科学精神的人，恰恰是通过实验去探索炼金术士们的主张是怎么回事。

至于神学，牛顿是无所不知的宇宙创造者的无可置疑的信徒，他也相信自己没有能力——象那个在海边的孩子一样——测量整个真理之海的全部深度。他因此相信不仅天上有、就是地上也有

许多超出他的哲学以外的东西，于是他以亲自弄懂创世的传统说法为己任，而他那个时代大多数有知识的人都毫无争议地接受了这个传统说法(对他们来说，这个说法就象常识一样自然)。

因此，他把他认为真正严肃认真的努力，用于证明但以理①的预言和《启示录》的诗篇确有意义，用于旨在把《旧约圣经》的日期和历史上的日期协调一致的年代学的研究上。在牛顿的时代，神学仍然是科学的皇后，她有时用黄铜的权杖和铸铁的头脑统治着她难于驾驭的臣民。然而，牛顿确实允许他的理性科学影响了他的信仰，以致他成为现在所说的一神论者。 96

1661年6月，牛顿进了剑桥大学的三一学院，他是一个半公费生——(在那个时代)通过做仆人的工作挣钱交学费的学生。牛顿在剑桥的那段时期，剑桥已经由于内战、1661年君主政体的复辟，以及大学方面对君主的庸庸碌碌的奉承，降低到了它作为教育机构的历史上的最低水平。然而，年轻的牛顿尽管开始很孤独，却很快发现了自己能胜任的工作，并专心致志于他的工作。

在数学上，牛顿的老师是艾萨克·巴罗博士(1630—1677)，他是一位神学家和数学家。关于巴罗有人这样说过，尽管他在数学上无疑是才华横溢、有独立创见的，但是他不幸只是预报牛顿这个太阳升起的晨星。巴罗很高兴地认识到比他更伟大的人已经出现了，在具有重要意义的时刻(1669年)，他辞去了鲁卡斯数学讲座的教授职位，让他这个无与伦比的学生接替他。巴罗的几何学讲座讲述的许多东西中，包括他自己的求面积和画曲线切线的方法——实质上分别是积分学和微分学的关键问题，毫无疑问这些讲座激励牛顿开始投入他自己的工作。

① 但以理(Daniel)，基督教《圣经》中希伯来的预言家。——译者

关于牛顿大学生活的记录，贫乏得令人失望。他似乎没有给同学们留下很深的印象，他写回家的敷衍塞责的短信中，也没有什么让人感兴趣的东西。起初两年完全用在掌握初等数学上了。即便有牛顿作为发现者突然成熟起来的可靠记录，他的现代传记作者们似乎也没有人找到过它。除去他在1664—1666年(二十一岁到二十三岁)这三年中奠定了他后来在科学和数学中全部工作的基础，以及不停地工作和熬夜使他病了一场以外，我们不知道任何确切的事情。牛顿对于他的发现守口如瓶的脾气，也是使得这个秘密埋藏得很深的一个原因。

在纯粹的人性方面，牛顿作为一个大学生是很正常的。偶尔他也轻松一下，在小饭馆的帐本上记着他去吃过几次饭，他还打牌输了两次钱。1664年1月他获得了学士学位。

97

1664—1665年的黑死病(淋巴腺鼠疫)，以及第二年黑死病程度较轻的再次流行，给牛顿提供了大好机会，虽然是强迫他接受的机会。大学关闭了，两年中的大部分时间，牛顿隐居在伍尔索姆沉思。到那时为止，他还没有做出什么引人注目的事——只是由于过分刻苦地观察彗星和月晕而生了一场病——或者，如果他作出了，那也是个秘密。在这两年中，他发明了流数(微积分)方法，发现了万有引力定律，通过实验证明了白光是由各种颜色的光合成的。所有这些都是他在二十五岁以前做出的。

一份注明日期为1665年5月20日的手稿表明，牛顿在二十三岁时已经充分发展了微积分的主要原理，能够用它找出任何连续曲线在任何给定点的切线和曲率。他称他的方法为“流数法”——出自“流动”或变量及其“流率”或“增长率”。在这以前他发现了二项式定理，这是向完全发展微积分迈出的重要一步。

二项式定理推广了通过直接运算发现的象

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

等等这样的简单结果；即

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\times 2}a^{n-2}b^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}a^{n-3}b^3+\cdots,$$

其中的点表示序列按照已经写出的项指出的规律连续写下去：下一项是

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times 2\times 3\times 4}a^{n-4}b^4.$$

如果n是正整数1、2、3……中的一个，序列恰恰在$n+1$项之后自动终止。这是很容易用数学归纳法证明的(象在中学代数中那样)。

但是如果n不是正整数，序列就不会终止，这个证明方法就不适用了。由于对于n是分数或负数值(也对更一般的值)，二项式定理的证明，以及对a、b要加必要的限制的说明，在十九世纪才出现，因此我们只需要在这里说明，牛顿在把这个定理推广到n的这些值时，他满足于二项式定理对他在工作中偶尔碰到的a、b的值是成立的。 98

如果全部现代的巧妙发挥都象十七世纪那样被忽略了，那就很容易看出来，微积分最后是怎样被人们发明的。基本概念是变量、函数和极限，最后一个概念人们用了很长时间才澄清。

在数学研究的过程中能够取不同值的字母，比如说S，就称为一个变量；例如，如果S表示落体到地面的高度，它就是一个变量。

函数这个词(或它的拉丁文同义词)似乎是莱布尼兹在1694年引进到数学中的，这个概念现在统治着数学的大部分领域，而且

在科学中是必不可少的了。自从莱布尼兹的时代以来，这个概念已经精确化了。如果 y 和 x 是两个这样联系在一起的变量，只要给 x 指定一个数值就决定了一个 y 的数值，那么 y 就称为 x 的一个(单值或单一)函数，用符号表示，就写成 $y=f(x)$。

我们不想给极限下一个现代的定义，只满足于给出最简单的定义的例子，这个例子使得牛顿和莱布尼兹(特别是前者)的追随者们在讨论变化率时用了极限。对于微积分早期的发展者，变量和极限的概念是直观的；对于我们，它们是非常细致的概念，被关于数(既有有理数又有无理数)的性质的丛林般的半玄学的神秘层层包围着。

设 y 是 x 的一个函数，比如说 $y=f(x)$。y 相对于 x 的变化率，或者象人们说的，y 相对于 x 的导数，是如下定义的。给 x 一个增量，比如说 Δx(读做"x 的增量")，使 x 成为 $x+\Delta x$，而 $f(x)$、或 y，成为 $f(x+\Delta x)$。y 的相应增量 Δy，是 y 的新值减去原来的值；即 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$。由于我们把变化率看做"平均"的直觉定义，我们可以取 y 的增量由 x 的增量相除的结果，也就是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，作为 y 相应于 x 的变化率的粗糙近似。

99

但这显然是太粗糙了，由于 x 和 y 二者都变化，我们不能说这个平均值描述了对于 x 的任何特定值的变化率。因此，我们让增量 Δx 无限减小，直到"在极限过程中"，Δx 趋近于零，并且在整个过程中注意"平均"$\frac{\Delta y}{\Delta x}$：$\Delta y$ 同样无限减小，最终趋近于零；但是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不趋于零，因而不给我们以无意义的记号 $\frac{0}{0}$，但却有一个确定的极限值，它就是所要求的 y 相应于 x 的变化率。

为了了解这个过程是怎样进行的，设 $f(x)$ 是特殊的函数 x^2，使得 $y=x^2$。按照上面的概述，我们先得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

现在还没有取极限。做一些代数化简，我们得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x$$

我们已经尽可能的作了代数化简，现在让Δx趋向于零，我们看到$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限值是$2x$。更一般地，如果$y=x^n$，用同样的方法，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限值是$nx^{n-1}$，这可以借助于二项式定理来证明。

这样一个论述不会使今天的学生满意，但是对于微积分的创造者，比这还差的论证就足够好了，因此这样一个论述对我们来说也就足够了。如果$y=f(x)$，那么$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限值(倘若这样一个值存在)称为$y$相对于$x$的导数，并用$\frac{dy}{dx}$表示。这个符号表示(主要)应归功于莱布尼兹，是今天通用的符号；牛顿用了另一个不太方便的符号($\dot{y}$)。

物理学中变化率的最简单的例子是速度与加速度，这是动力学中的两个基本概念。速度是距离("位置"，或"空间")相对于时间的变化率，加速度是速度相对于时间的变化率。

如果s表示一个运动粒子在时间t内通过的距离(假定距离是时间的函数)，那么在时间t的速度是$\frac{ds}{dt}$，记这个速度为v，我们有相应的加速度$\frac{dv}{dt}$。

100

这引进了变化率的变化率的概念，或者二阶导数的概念，因为在加速度运动中速度不是常量而是变量，因此它有变化率：加速度是距离的变化率的变化率(两个变化率都相对于时间)；为了表示这个二阶变化率，或者"变化率的变化率"，我们把加速度写成

$\frac{d^2s}{dt^2}$。它本身又可以有一个相对于时间的变化率，这个三阶变化率写成$\frac{d^3s}{dt^3}$。对于四阶、五阶……，变化率也是如此，即四、阶五阶……导数。微积分学应用于科学中，最重要的导数是一阶和二阶导数。

如果我们现在回头看看我们关于牛顿的第二运动定律说过的话，并且与我们关于加速度说过的话相比较，我们就看出“力”与它们产生的加速度成正比。有了这些概念，我们就能对一个决不是无意义的问题“建立”微分方程——这个问题就是“有心力”的问题：一个粒子被一个力吸向一个固定的点，力的方向总是通过该点。已知力为随距离 s 变化的某个函数，比如说 $F(s)$，此处 s 是粒子在时间 t 距固定点 0 的距离，



我们要求描述粒子的运动。稍加考虑就会得到

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-F(s),$$

取负号是因为引力减小了速度。这就是该问题的微分方程，所以这样称呼它是因为方程中包含了变化率(加速度)，而变化率(或导数)是微分学研究的对象。

我们已经把这个问题转变成了微分方程，现在要求解这个方程，也就是说，找出 s 和 t 之间的关系，或者用数学的语言来说，把 s 表示成 t 的函数。困难就从这里开始，把一个给定的物理状态，表示成没有哪一个数学家能解答的微分方程组，可能很容易。一般来说，物理中每一个重要的新问题，都导致需要创造新的数学分支来解决的微分方程类型。不过，如果象在牛顿的万有引力中那样，

$F(s)=\frac{1}{s^2}$，那么上面那个特殊的方程就能够很容易地根据初等函数求出解答。我们不去为这个特殊的方程费脑筋，我们将考虑一个足以说明重要性所在的更简单得多的方程：

$$\frac{dy}{dx}=x$$

我们有了 y 是一个 x 的函数，它的导数等于 x；要求的是把 y 作为 x 的函数表示出来。更一般地，我们以同样的方式考虑

$$\frac{dy}{dx}=f(x)。$$

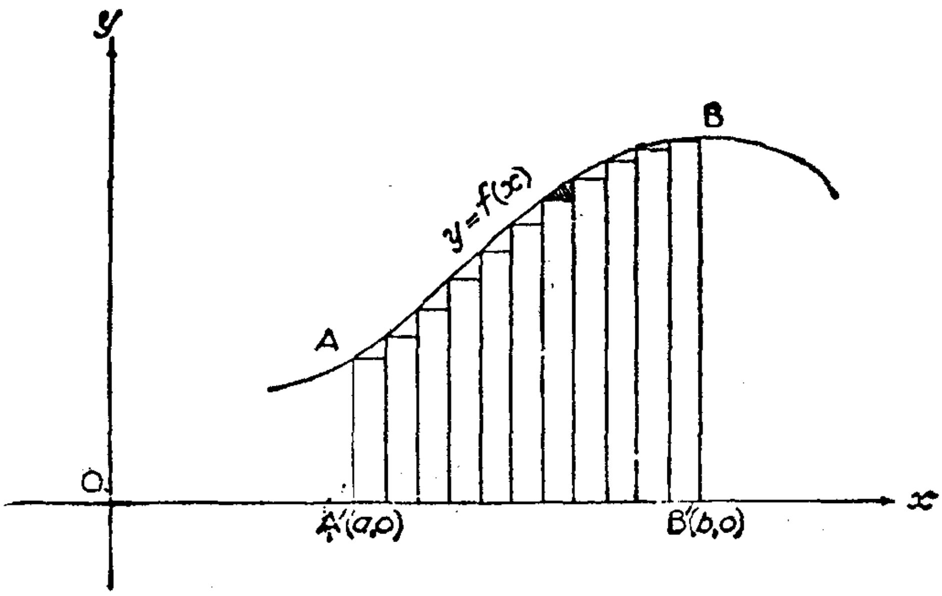
这要求的是，相对于 x 的导数(变化率)等于 $f(x)$ 的(x 的)函数 y 是什么？假定我们能找到所要的函数(或者假定这样一个函数存在)，我们就称它为 $f(x)$ 的反导数，记为 $\int f(x)dx$——这样称呼的原因马上就会清楚。暂时我们只需注意到，$\int f(x)dx$ 表示一个函数(如果它存在的话)，它的导数等于 $f(x)$。

通过检验，我们知道上面的第一个方程的解是 $\frac{1}{2}x^2+c$，这里 c 是一个常数(不依赖于变量 x 的数)；这样 $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+c$。

甚至这个简单的例子也可以说明，即便对看上去比较简单的函数 $f(x)$，计算 $\int f(x)dx$ 的问题可能也超出了我们的能力。对于随意选择的 $f(x)$，并不总存在用已知函数表示的"答案"——出现这样一个机会的可能性，多半是最坏的无限("不可数"比一)。当一个物理问题导致一个这样的可怕情形时，人们采用按照所需要的精确度给出结果的近似方法。

有了微积分中两个基本的概念，$\frac{dy}{dx}$ 和 $\int f(x)dx$，我们现在就能陈述把它们联系在一起的微积分学的基本定理了。为了简明起见，我们用一个图来说明，虽然在精确的叙述中，图是不必要的，也是不合乎要求的。

考虑一个连续的、不自交的曲线，它在笛卡儿坐标中的方程是 $y=f(x)$。要求求出曲线、x 轴和两条垂直线 AA', BB' 之间围成的面积，这两条垂直线从曲线上的两个点 A, B 画到 x 轴，OA', OB' 的距离分别是 a, b——即 A', B' 的坐标是$(a, 0)$, $(b, 0)$。我们按照阿基米德的作法进行，把所求的面积分成一些等宽的条，去掉这些条头上的小三角形(其中的一个在图中以阴影表示)，把它们看作矩形，再把所有这些矩形的面积加起来，最后让矩形的数目无限增多，计算这个和的极限。这些都很好，但是我们怎样计算这个极限呢？答案肯定是数学家们所曾发现的最令人吃惊的结论之一。



首先求出$\int f(x)dx$，比如说结果是$F(x)$。把a和b代入$F(x)$，得到$F(a)$和$F(b)$，然后从第二个中减去第一个，即$F(b)-F(a)$。这就是所求的面积。

注意在给定的曲线方程$y=f(x)$，给定曲线在点(x, y)的切线斜率（就象在费马那一章中看到的）$\frac{dy}{dx}$，以及相对于x的变化率等于$f(x)$的函数$\int f(x)dx$、或$F(x)$之间的关系。我们刚刚说明所求的面积是由$F(b)-F(a)$给出的，而这个面积是用阿基米德的方式描述的同种类型的极限和。这样我们已经把斜率（或者导数）与极限和（或者按照人们说的，定积分）联系在一起了。符号$\int$是老式写法的S，是Summa［和］这个字的第一个字母。 103

我们用符号把所有这些概括在一起，把问题中要求的面积写成$\int_a^b f(x)dx$；a为和的下限，b为上限；则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

其中$F(b)$、$F(a)$由计算"不定积分"$\int f(x)dx$（即找出函数$F(x)$，使其相对于x的导数$\frac{dF(x)}{dx}$，等于$f(x)$）的值得出。这就是微积分的基本定理，就是它（以几何形式）呈现在牛顿面前，也独立地呈现在莱布尼兹面前的形式。为谨慎起见，我们再次重复，我们没有考虑现代论述中所要求的众多精心设置的条件。

就象先驱者们认为的，可以用两个简单然而重要的问题结束微积分学主要概念的这段概述。到此为止，我们只考虑了一个变量的函数。但是自然界向我们提出的是有几个变量的函数，甚至是

有无穷多个变量的函数。

举一个很简单的例子，气体的体积 V 是气体的温度 T 和施加在气体上的压力 P 的函数；比如说 $V=F(T, P)$——函数 F 的实际形式无需在这里给出。T、P 变化时，V 也变化。但是假定 T、P 中只有一个变化，而另一个保持不变；那么实质上就回到一个变量的函数，而 $F(T, P)$ 的导数就能对这个变量计算出来。如果 T 变化而让 P 保持不变，$F(T, P)$ 相对于 T 的导数就称为(相对于 T 的)偏导数，为了指出 P 保持不变，对这个偏导数采用不同的符号 ∂，$\frac{\partial F(T, P)}{\partial T}$。类似地，如果 P 变化而让 T 保持不变，我们得到 $\frac{\partial F(T, P)}{\partial P}$。完全象在通常的二阶、三阶……导数的情形那样，我们也有对于偏导数的同样类比；这样，$\frac{\partial^2 F(T, P)}{\partial T^2}$ 表示 $\frac{\partial F(T,P)}{\partial T}$ 相对于 T 的偏导数。

104 大多数重要的数学物理方程是偏微分方程。一个著名的例子是拉普拉斯方程，或者“连续性的方程”，它出现在牛顿引力理论、电磁理论、流体运动理论和其它地方，这个方程是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

在流体运动中，这是“理想”流体(无涡流流体)能量无损耗这一事实的数学表述。在这里导出这个方程是不适宜的，但是陈述一下它意味着什么，可以使它看上去不那么神秘。如果流体中没有涡流，那么流体中任何一个质点的平行于 x、y、z 轴的三个速度分量，可以由同一个函数 u 的偏导数

$$-\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial z}$$

计算出来，u 由运动的特殊类型决定。如果流体是不可压缩的和无粘性的，那么每秒钟流出任意小的容积的流体应该等于流进它

的流体，把上面的事实与这个显然的陈述结合起来；并且注意到每秒钟流过任意小的面积的流量等于流体的速率乘以面积；我们看出（把这些论点结合起来，并且计算总的流入量和总的流出量）拉普拉斯方程大约是老生常谈。

关于数学物理方程的这个方程和一些其它的方程，真正令人吃惊的是，物理的老生常谈当碰到数学推理时，就会提供意想不到的信息。这些信息绝对不是陈词滥调。后面几章中提到的物理现象的“预料”就从这样的经过数学处理的平凡事物中产生。

不过，在这类问题中产生了两个非常现实的困难。第一个与物理学家有关，他必须知道他的问题可以怎样简化而又不至于面目全非，从而使他能完全从数学上说明他的问题。第二个与数学家有关，这一点把我们带到了一个非常重要的问题——我们在微积分学的这段概述中最后提到的问题——这就是所谓的边界值问题。

科学并不是把象拉普拉斯方程那样的方程扔在数学家面前，要求他去寻找一般的解答。科学所要求的是（通常）更难得到的东西：一个特解，它不仅要满足方程，而且还得满足依赖于所要解的特殊问题的一些辅助条件。

105

这一点可以用热传导中的一个问题来阐明。对于导体中热的“流动”，有一个与流体运动的拉普拉斯方程类似的一般方程（傅里叶的方程）。假定我们要求找出在一个圆柱形的杆中温度的最后分布，圆杆两端的温度保持为常数，而曲面上的温度为另一个常数；这里“最终”的意思是，杆的所有点处于“稳定状态”——温度不再进一步改变。这个解必须不仅满足一般方程，还得适合曲面温度，或者初边值条件。

后一个要求是更难达到的。圆杆的问题与截面为方形的杆的

相应问题全然不同。边界值问题的理论解决的问题是，使微分方程的解适合给定的初始条件。这个理论主要是在过去八十年中创立的。在某种意义上，数学物理是与边界值问题的理论一起发展起来的。

牛顿的第二个伟大的灵感是他的万有引力定律(已经提到过了)，这是他1666年在伍尔索姆发现的，那时他是一个二十二、三岁的青年。在这一点上，我们不去重复苹果掉下来的故事。为了区别于千篇一律的传统解释，我们在讲到高斯时，将给出高斯对这个传说的看法。

大多数权威都一致认为，牛顿为了看看他的万有引力定律是否能解释开普勒的规律，他在1666年(那时他二十三岁)确实做了一些粗略的计算。许多年以后(在1684年)，当哈雷问牛顿什么样的引力规律能够解释行星的椭圆轨道时，牛顿立刻回答是平方反比规律。

“你怎么知道的呢?”哈雷问道——他是受到克里斯托弗·雷恩爵士和其他一些人的敦促，提出这个问题的，因为关于这个问题的一场大辩论已经在伦敦进行了一些时候了。

“噢，我计算过它，”牛顿回答。在试图重新写出他的计算(他找不到原稿了)时，牛顿犯了一个错误，因而认为自己原来就弄错了，但是不久他就发现了他的错误，核实了原来的计算。

106

牛顿的万有引力定律推迟了二十年才发表，对于这个由于不精确的数据造成的不应有的延迟，有很多说法。在三种解释中，我们在这里介绍一种不如另外两种富于浪漫色彩，然而却更有数学味的解释。

牛顿推迟发表的主要原因是，他无法解决定积分中的一个确

定的问题，这个问题正如在牛顿定律中表示出来的那样，是整个万有引力理论中的关键。在他能够解释苹果和月亮的运动之前，牛顿不得不先求出均匀的实心球体对球外质点的全部吸引力。因为球上的每一个质点吸引球外质点的力与两个质点的质量乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比。这些分离的吸引力（数目有无穷多个）是怎样合成或加成一个合吸引力的呢？

这显然是一个积分问题。今天人们把它作为一个例子写进教科书，年轻学生们用二十分钟或更少的时间就能解答它。然而它困惑了牛顿二十年。当然，他最后解决了它：引力与球的整个质量集中在它中心那一点上的情形是同样的。这样，这个问题就变成求位于给定距离的两个质点之间的吸引力，牛顿定律提供了这个问题的直接解答。如果这就是延迟二十年的正确解释，那么我们由此就可以多少了解到，从牛顿时代起，历代数学家们付出了多么巨大的劳动去发展并简化微积分，使它达到了每个普通十六岁的孩子都能有效地使用它的程度。

虽然我们对牛顿的兴趣主要集中在他作为数学家的伟大上，但是我们不能在1666年就停下来，抛下他和他的未成熟的杰作。如果这样做，我们就无从认识他的伟大。所以下面我们将继续概述他的其它活动，但对任何一项都不详述（由于篇幅所限）。

牛顿回到剑桥后，在1667年当选为三一学院的研究院士；在1669年，他二十六岁时，接替巴罗任鲁卡斯数学讲座的教授。他最初的演讲是关于光学的，在这些演讲中，他详细地解释了自己的发现并且概略地讲述了他的光的微粒理论，根据这种理论，光是微粒的辐射，而不是象惠更斯和胡克断言的波动现象。虽然两种理论似乎是矛盾的，但是今天二者在有关光的现象方面都是有用

的，并且在纯粹数学的意义上说，它们在现代量子理论中统一了起来。因此，现在就不能再象几年前那样说，牛顿在他的微粒理论中完全错了。

接下来的一年，1668年，牛顿自己动手制作了一台反射望远镜，并且用它观察木星的卫星。他的目的无疑是要通过观察木星的卫星来看看，万有引力是否真正是普遍规律。这一年也是微积分学历史上值得纪念的一年。墨卡托利用无穷级数计算了与双曲线有关的面积，这引起了牛顿的注意。墨卡托使用的方法实际上与牛顿自己的方法是相同的，牛顿还没有公开他的方法，不过，这时他把它写了出来，交给了巴罗博士，并且允许在一些较好的数学家中传阅。

1672年牛顿被选入皇家学会，为此他提交了他关于望远镜的工作和光的微粒学说。一个包括爱争吵的胡克在内的三人委员会，被指定就牛顿关于光学的工作提出报告。胡克滥用他作为推荐人的权威，抓住这个机会宣传波动理论和他自己，对牛顿的理论进行嘲笑。一开始，牛顿对于批评持冷静的科学态度，但是当列日[比利时的城市——译者]的数学家吕卡和物理学家利努斯也加入了胡克的行列，添加进一些很快就从说理变成吹毛求疵甚至愚蠢的暗示和反对意见时，牛顿渐渐失去了耐心。

任何人读了牛顿在他这第一次恼人的争论中的通信，都会相信牛顿并非天性遮遮掩掩、小心翼翼地维护他的发现。他那些信的语气是逐渐改变的，从热衷于澄清其他人发现的困难，变为对科学家竟出于私下争吵视科学为战场而不知所措。从这种不知所措，他很快变得满腹怒气，觉得受到了伤害，他有点孩子气地下定决心，将来不再和他们打交道。他简直就不能坦然地忍受这些心怀恶意的傻瓜。

最后，在1676年11月18日的一封信中，他说："我知道我已经把自己变成了哲学的奴隶，但是如果我能摆脱吕卡先生，那么除去我为了自己私人的兴趣或留待身后发表的东西，我将坚决地永远告别哲学；因为我看出，一个人必须或者下决心不再作出什么新东西，或者变成一个奴隶去保护它"。高斯关于非欧几何也发出过几乎同样的感慨。

108

牛顿在批评下的坏脾气和他对于无益的论战的恼怒，在《原理》出版后再次爆发。他在1688年6月20日写给哈雷的信中说："哲学[科学]是这样一个傲慢的好诉讼的夫人，一个男人只要和她相处，就会被卷入诉讼。我早就发现了这一点，现在我不再靠近她了，但是她给我以警告。"数学、动力学和弹性力学事实上不是——我们也得承认——牛顿的主要兴趣所在。他的心思是在炼金术，关于年代学的研究，以及神学研究上。

只是由于一种内在的力量在驱使他，他才把注意力转向数学的再创造。早在1679年，他三十七岁时(但也是他把他的主要发现和发明牢固地禁闭在他的头脑里或书桌里的时候)，他写信给纠缠不休的胡克："在过去的几年里，我一直竭力使自已从哲学转向其它研究，因此除了在闲暇的时刻有时出于消遣以外，我已经长久不在那方面花费时间了。"有时他在这些"消遣"上所花的心思比花在他的正式工作上的还要多，他由于夜以继日地思考月亮的运动而重病了一场，他说，月亮运动的问题是唯一曾经使他头痛的问题。

牛顿脾气暴躁的另一面在1673年春天表现出来，那时他写信给奥尔登伯格，要放弃他在皇家学会的会员资格。对这个使性子的举动有各种各样的解释。牛顿以经济困难和他距离伦敦太远作为理由。奥尔登伯格按照这个怒气冲冲的数学家的字面意思理解

他的话，告诉他，按照章程他可以保持他的会员资格而不必交费。这使牛顿恢复了理智，他撤回了辞呈，同时平息了怒气。不过牛顿仍然认为他会被人摧逼。但是，他的经济状况不久就好转了，他感觉好一些了。这里不妨指出，在关于钱的问题上，牛顿可不是漫不经心的人，他非常精明，死的时候算是他那个时代的富翁了。但是 109 尽管他精明而节俭，他用钱也很大方，并且随时准备尽可能不唐突地帮助有困难的朋友。他对年轻人特别慷慨。

1684—1686年的这几年标志着整个人类思想史上的一个伟大时代。在哈雷巧妙耐心的哄骗下，牛顿最终同意写出他在天文学和动力学方面的发现，以供发表。也许从来没有哪一个人象牛顿撰写他的«Philosophiae Naturalis Principia Mathematica»(自然哲学的数学原理)时那样艰苦、那样执着地思考了。牛顿从来不注意他的身体健康，在他埋头构思他的杰作时，他似乎忘了他还有一个需要食物和睡眠的躯体。他忽略或忘记了吃饭，从小憩中醒来，他会穿了一半衣服在床边上一坐几个小时，在他那数学的迷宫中遨游。1686年，«原理»被提交给皇家学会，1687年哈雷出资出版了它。

在这里叙述«原理»的内容是不可能的，但是我们可以简单地展示它所包含的无穷尽的宝藏中的很小一部分。赋与整部作品以生命力的是牛顿的动力学，他的万有引力定律，以及二者之应用于太阳系——“宇宙体系”。虽然微积分已经从综合的几何证明中消失，但是牛顿(在一封信里)说，他用了微积分去发现他的结果，并在这样做了之后，着手把微积分提供的证明再变成几何形式，从而使他的同代人可以更容易地抓住主要的论题——天体的动力和谐。

首先，牛顿从他自已的万有引力定律中推论出开普勒的经验

规律，他指出怎样计算太阳的质量，以及怎样决定拥有一个卫星的行星的质量。其次，他首创了极其重要的摄动理论：例如，月亮不仅被地球吸引，而且也被太阳吸引。因此，月亮的轨道就会被太阳的引力摄动。用这种方法，牛顿详细解释了两个古代观察到的结果，这些结果是希巴克斯和托勒密得出的。我们自己这一代人已经看到现在应用到电子轨道，特别是氦原子中的电子轨道的高度发展起来的摄动理论。除了这些古代的观测结果，从万有引力规律中还推导出了由第谷·布拉赫(1546—1601)、弗拉姆斯蒂德(1646—1719)、以及其他人观察到的关于月亮运动的七个不规律的结果。 110

关于月球摄动理论就说这么多。同样的方法也应用于行星。牛顿开始了行星的摄动理论，这一理论在十九世纪导致海王星的发现，在二十世纪导致了冥王星的发现。

"无规律"的彗星——迷信的人仍把它看做是来自一个发怒的天神的警告——也作为太阳系家族中无害的一员，被非常精确地置于万有引力规律下，以致我们现在能算出并且迎接它们的缓慢回归(除非木星或其它外星球过分地扰动了它们)，就象我们在1910年所作的那样，那时哈雷的美丽的彗星在离开了七十四①年后，按照预计的时间准时回来了。

他通过计算(用他的动力学和宇宙规律)地球由于周日运动在极点的平坦程度，开始了行星演化的广泛而仍不完整的研究，他证明了行星的形状决定它绕日一周的时间，所以如果我们准确地知道了金星在极点处的平坦程度，我们就能知道它绕着连接两极的轴完整地旋转一周要多长时间。他计算了随纬度不同而异的重量变化。他证明了一个形状为同心球面并且是均匀的空壳，对它里

① 原文如此。哈雷彗星应该是每隔七十六年回归一次。——译者

面任何地方的小物体都不施加力。最后一点在静电学中非常重要——在小说领域中也很重要，在那里它被当作有趣的幻想的主题。

月球和太阳对地球上赤道隆起带的吸引力，使得我们这个行星象陀螺一样旋转，这一点非常美妙地说明了岁差。神秘的潮汐也自然地归入这个壮丽的体系——月球和太阳引起的潮汐都被计算过了，从观察到的大潮和小潮的高度，推出了月亮的质量。《第一卷》奠定了动力学原理；《第二卷》包括在有阻尼的介质中物体的运动和流体运动；《第三卷》是著名的"世界的体系"。

也许没有其它的自然规律象《原理》中的牛顿万有引力定律那样，把这样多的自然现象如此简单地统一了起来。牛顿的同代人是值得称赞的，他们至少模模糊糊地看出了牛顿做出的这些事情的重要意义，虽然他们中仅有少数几个人能够领会牛顿的推理，由于这个推理，取得了统一的惊人奇迹并使得《原理》的作者成为一个受人崇拜的人物。没有经过多少年，人们就在剑桥(1699 年)和牛津(1704 年)讲授牛顿体系。法国沉睡了半个世纪，仍然在笛卡儿的神秘的漩涡中打转。但是不久，神秘主义就让位于理性，牛顿发现他最伟大的后继者不是在英国，而是在法国，在那里，拉普拉斯担负起了继续和完善《原理》的任务。

《原理》之后的其它事情就平淡无奇了。虽然月球理论继续使牛顿苦恼和"高兴"，但他暂时厌倦了"哲学"，期望有机会转向天文学内容少一点的事情。詹姆斯二世是个固执的苏格兰人和偏执的天主教徒，他决心要强迫大学不顾学术权威们的反对，授与一个本尼狄克教派的教徒以硕士学位。牛顿是 1687 年去伦敦出席高级法院大学诉讼案的代表之一，高级法院的首席法官是那个伟大而

粗鄙下流的法学家、大法官乔治·杰弗里斯——他在历史上以"无耻的杰弗里斯"著称。杰弗里斯以其惯用的方式辱骂了代表们的领袖，命令其余代表离开，不要再犯罪。牛顿明显地不动声色。回答象杰弗里斯这样呆在他的狗窝里的人，什么也得不到。但是当其它人要在不光彩的妥协方案上签名时，正是牛顿使他们坚强了起来，他阻止他们签名。他胜利了；什么有价值的东西也没有失去——连荣誉也没有失去。他后来写道："有法律在我们这一边，在这些事情上，真正的勇气能卫护一切。"

剑桥大学显然很欣赏牛顿的勇气，因为在1689年1月，他被推选代表大学当了非常国会的议员，那时詹姆斯二世已经逃离英国，奥兰治的威廉和他的玛丽上台，忠实于詹姆斯二世的杰弗里斯躲进了下贱的地方，以逃脱暴民对他的公正惩罚。牛顿一直呆在国会里，直到1690年2月国会解散为止。值得赞扬的是他从来没有在那里发过言，但是他忠于职守，并不反对政治活动；他的外交手腕在使骚动的剑桥大学忠于不错的国王和王后方面有很大关系。

牛顿对伦敦的"现实生活"的趣味，表明他在科学方面的没落。包括著名的《人类理解论》的作者、哲学家约翰·洛克在内的、有影响的和爱管闲事的朋友们使牛顿相信，他没有得到应得的荣誉。盎格鲁—撒克逊种族最愚蠢的一点就是它盲目相信，政府的办公室或管理位置是给有才智的人的最高荣誉。英国人最后(1699年)让牛顿当了造币局局长，以改革和监督王国的币制。《原理》的作者的这次"升迁"实在是乏味之极，只有戴维·布鲁斯特爵士感到的喜悦超过了这次升迁，戴维·布鲁斯特爵士在他的《牛顿传》(1860年出版)中，描写了牛顿的天才由于这次升迁得到了英国人民的"很有价值的赏识"。当然，如果牛顿真的想要这类东西，那没有什

112

么可说的；他已经千百倍的获得了做他想做的任何事情的权力。但是他那些爱管闲事的朋友没有必要怂恿他去孜孜以求。

事情并不是一下子就发生的。三一学院的研究员、牛顿的朋友查尔斯·蒙塔古、后来的哈利法克斯伯爵，开始为给牛顿谋到一些"相称"的赏识牵线。他是受到了永远在奔忙和搬弄是非的、臭名昭著的日记作家塞缪尔·佩皮斯的支持和怂恿，以及洛克和牛顿本人的鼓动才这样做的。

协商显然并不总是进行得很顺利，牛顿有些多疑的性格使他认为他的一些朋友正在耍弄他——他们可能是在这样干。他在写作《原理》的那十八个月中缺乏的睡眠和食不甘味开始报复他了。1692年秋天（他差不多五十岁，应该是在他最好的时光），牛顿生了一场重病。他厌恶所有的饮食，差不多完全不能睡眠，不时发作的颠狂使他的情况更加严重，他处在非常接近于全面精神崩溃的状态。1693年9月16日，他康复后写给洛克的一封哀伤的信，表明他曾经病得多么厉害。

先生：

由于认为你力图使我卷入女人的纠纷并且用其它方法这样做①，我深受影响，以致当一个人告诉我你病了，活不长了时，我回答说，你死了更好。我请求你宽恕我这样无情。因为我现在满意地知道你所做的都是公正的，我请求你原谅，我不该为此把你想得那么坏，不该说你冲击道德的根基，这个根基原是你在你充满智慧的书中陈述，并打算在另一本书中继续发挥的原则。我不该把你说成是霍布斯理论的追随者。我也为说过或想过有一个要骗我接受一项职务、或使我卷入纠纷的阴谋，而请你原谅。

① 曾经有过流言蜚语，说牛顿喜爱的侄女用她的魅力去促进牛顿的升迁。

你最谦卑最不幸的仆人
艾萨克·牛顿

牛顿生病的消息传到了欧洲大陆，在那里，这个消息自然被大大地夸大了。他的朋友们，其中包括一个要成为他最厉害的敌人的朋友，为他的康复而十分高兴。莱布尼兹写信给一个熟人，表示他为牛顿恢复正常而感到满意。但是就在牛顿康复的这一年（1693年），他第一次听说微积分在欧洲大陆上广为传播，并且人们普遍把它归功于莱布尼兹。

《原理》出版以后的十年，牛顿差不多平均地用在炼金术、神学，以及对于多多少少不自觉的和令人头痛的探索月球理论的焦虑上。这时，牛顿和莱布尼兹仍然很要好。他们各自的"朋友们"对于全部数学，特别是微积分学，就象卡菲尔人①一样无知，还没有决定使两个人为互相指责对方剽窃微积分的发明，甚至更恶劣的不诚实的行为而争吵，这场争吵是数学史上关于优先权的最可耻的纠纷。牛顿承认莱布尼兹的功绩，莱布尼兹也承认牛顿的功绩，在他们交往的这个和平的阶段，两个人都从未怀疑过对方会从自己这里偷去关于微积分的哪怕一丁点儿想法。

后来，在1712年，甚至大街上的行人——一点儿不知道事实真象的热心的爱国者——都模模糊糊地了解到牛顿做出了一些惊人的数学发现（也许，就象莱布尼兹说的，比他以前的全部历史上曾经做出过的还要多），这时谁发明了微积分学的问题就成了一件引起尖锐的民族妒忌的事情，所有受过教育的英国人都在他们的多少有些手足无措的得胜者背后团结了起来，狂叫着他的竞争者是个贼和撒谎的家伙。

开始不怪牛顿。也不怪莱布尼兹。但是不久，当英国人争功

① 卡菲尔人为南非讲班图语的部分民族。——译者

好胜的天性开始表现出来的时候，牛顿默许了这种可耻的攻击，他本人也提出或同意了极不正当的、令人生疑的策划，不惜任何代价——甚至不惜牺牲国家荣誉——去赢得国际冠军称号。莱布尼兹和他的支持者们也同样干。这件事情的全部结果是，顽固的英国人在牛顿死后的整整一个世纪中，实际上在数学上衰败了，而追随莱布尼兹的更进步的瑞士人和法国人发展了莱布尼兹仅在表示①微积分方面好得无与伦比的方法，完善了微积分，使它成为简单而容易应用的研究工具，牛顿的直接后继者们本来是可以得到这一项荣誉的。

1696年，牛顿五十四岁时，当了造币局的副局长。他的工作是改革币制。由于完成了这项工作，他在1699年被提升为造币局局长。数学家们从长期以来最有才能的人的这次降格中所得到的唯一的满足是，它驳斥了数学家缺乏实际头脑的愚蠢的迷信，牛顿是造币局有过的最好的局长。他很认真地对待他的工作。

在1701—1702年，牛顿再次代表剑桥大学出席国会，1703年他当选为皇家学会的主席，他后来一再当选这一可敬的职位，直到他1727年逝世。1705年他被好心的安娜女王封为爵士，这项荣誉也许是为了褒奖他作为兑换商的功劳，而不是表彰他在智慧殿堂中的卓越功绩。事情就象应该的那样：如果对一个变节的政治家的奖赏是"在他的外衣上别一条绶带"，那么当一个有才华的、正直的人的名字出现在国王生日那天受褒奖的名单上时，他为什么要感到受到恭维呢？可以慷慨地把凯撒的东西给予凯撒，但是当一个科学人物，作为一个科学人物，而从皇家的餐桌上捡点儿残汤剩饭时，他就与在财主的筵席上舔乞丐的烂疮的饥饿的癞皮狗为伍

① 见本书第99页。——译者

了①。人们正是希望牛顿是由于给货币兑换商效劳，而不是因为他的科学成就被封为爵士的。

牛顿的数学天才熄灭了吗？绝对没有。他仍然能与阿基米德匹敌。但是那位更明智的希腊老人，尽管出身贵族——幸而，从不注意他一直拥有的地位的荣誉；直到他漫长的生命的最后时刻，他的数学能力仍象他年轻时那样强大。要是没有可以预防的疾病和贫穷这些意外，数学家们是智力上长寿的人；他们的创造力比诗人、画家、甚至科学家的创造力长数十年。牛顿在智力上仍象他过去那样强健有力。要是他那些好管闲事的朋友们不打扰他的话，他可能会很容易地创造出作为物理和数学探索的工具仅次于微积分的变分法，而不会把它留给伯努利、欧拉和拉格朗日去开创。牛顿在《原理》中已经给了一点关于变分法的暗示，那时他确定了将最小阻力穿过流体的旋转曲面的形状。他有能力制定出整个方法的大纲。就象帕斯卡，当他为了更模糊但更令人满意的天国而抛弃这个世界时仍然是一个数学家一样，当牛顿离开了他在剑桥的研究工作，走进造币局的更给人以深刻印象的密室时，他仍然是一个数学家。

115

1696年，约翰·伯努利和莱布尼兹两人之间策划出对欧洲数学家的两个穷凶极恶的挑战。第一个到目前仍然是重要的；第二个与第一个就不是同一量级了。假定在一个垂直的平面上有两个任意固定的点，一个粒子在重力作用下用最少时间从上面的点滑落（无摩擦的）到下面的点，它所经过的曲线是什么形状呢？这就是branchistochrone（＝“最短时间”）问题。这个问题困扰了欧洲数学家六个月之后，又被重新提出，牛顿在1696年1月29日第一次听说这个问题，那是他的一个朋友告诉他的。那天他在造币局工

① 见基督教《圣经·路加福音》第十六章十九节以后。——译者

作了一整天，刚刚筋疲力竭地回到家里。晚饭以后，他就解决了这个问题（也解决了第二个问题）。第二天他把解答匿名寄给了皇家学会。但是尽管他非常谨慎，他也无法隐瞒自己的身份——他在造币局期间，数学家和科学家们一直努力引诱他进入有科学意义的讨论，牛顿对此很生气。当伯努利看到这个解答时，他立刻喊道："噢！我从他的爪子认出这头狮子了。"（这不是伯努利用拉丁语说的原话的精确翻译）。他们看到牛顿时都认出了他，即使他头上有个钱袋，又没有说出他的名字。

牛顿的活力的第二个证明在1716年，他七十四岁时出现。莱布尼兹卤莽地提出了一个在他看来是困难的问题①，作为对欧洲数学家，特别是针对牛顿的挑战。牛顿在一天下午的五点钟接到了这个挑战，那时他刚刚精疲力尽地从该死的造币局回来。当天晚上他就解决了这个问题。这一次莱布尼兹多少有些乐观，本以为他已经使这头狮子落入陷坑了。牛顿能够在顷刻之间把全部智力集中在困难的问题上，这种能力，在整个数学史上没有人能超过他（也许连能与他对等的人也没有）。

116

一个人在他的一生中得到了大量荣誉的故事，对他的后继者来说没有什么好读的。牛顿得到了值得一个人在世时得到的一切。总的说来，牛顿的一生就象任何伟人曾经有过的那样幸运。他的健康状况直到他生命的最后几年一直非常好；他从来不戴眼镜，一生只掉过一颗牙齿。他的头发在他三十岁时就花白了，但直到他死时仍然又厚又软。

关于他最后日子的记载，更富于人性，更令人感动。甚至牛顿也不能逃脱痛苦，在他一生的最后两、三年里，他经受了几乎是不

① 这个问题要求找出单参数曲线族的正交轨道。

间断的痛苦，他对待痛苦的勇气和忍耐力，只是给他作为人的冠冕上增加了另一个桂冠。他毫不畏缩地忍受着结石病的痛苦，尽管汗如雨下，仍然对那些服侍他的人说着同情的话。感谢上苍，终于他被"一阵不停的咳嗽"弄得异常虚弱，最后，在减轻了痛苦几天以后，他在 1727 年 3 月 20 日凌晨一点到两点之间，在睡梦中安然长逝，卒年八十五岁。他被安葬在威斯敏斯特教堂①。

① 威斯敏斯特教堂(Westminster Abbey)，英国有名人物国葬的地方。——译者



莱布尼兹

第七章　样样皆通的大师

莱 布 尼 兹

> 我有很多想法，如果有一天，比我更有洞察力的人把他们卓越的才智与我的劳动结合起来，深入地研究这些想法，那时它们也许会有些用处。
>
> ——G.W. 莱布尼兹

“样样皆通，样样稀松。”这句谚语就象其它的民俗谚语一样，也有它惊人的例外。戈特弗里德·威廉·莱布尼兹(1646—1716)就是一个例外。

数学只是莱布尼兹显示出他引人注目的天才的许多领域中的一个：法律、宗教、政治、历史、文学、逻辑、玄学和思辨哲学都得益于他的贡献，这些领域中的任何一个都享有他的名声，都保持着对他的怀念。“通才”毫不夸张地适用于莱布尼兹，而对他在数学方面的竞争者、在自然哲学上的无可比拟的优胜者牛顿，却不适用。

甚至在数学上，莱布尼兹的一般性也与牛顿的不偏离正轨形成了截然相反的对照，这就是把数学推理应用到物质世界的现象：牛顿认为在数学上只有一个东西是绝对重要的；莱布尼兹则认为有两个。其中第一个是微积分学，第二个是组合分析。微积分学是连续的自然语言；组合分析之于离散(见第一章)就象微积分之于连续。在组合分析中，我们碰到的是单个东西的集合，它们中的每一个都有自己的特性。在最一般的情况下，要求我们叙述在这些完全互异的个体之间存在的关系，如果有关系的话。这里我们不是着眼于数学家族的表面的相似，而是着眼于个体之间，作为个体，可能有的不管什么样的共同之处——显然不会很多。事实上，看来似乎所有我们能够组合地去说的，最终都归结为：用不同的方式去数这些个体，并比较得出的结果。这个显然是抽象的、似乎没什么意思的过程，竟然会导致什么重要的东西，这简直象个奇迹，但它是事实。莱布尼兹是这个领域中的先驱，他是首先认识到逻辑——“思维的规律”——的结构就是组合分析的人们中的一个。在我们自己的时代，这整个论题正在被算术化。

118

在牛顿看来，他那个时代的数学精神有确定的形式和内容。在经过卡瓦利(1598—1647)、费马(1601—1665)、沃利斯(1616—1703)、巴罗(1630—1677)和其它人的工作之后，微积分不久就会不可避免地组成一个独立的学科。犹如一个凝结核在临界瞬间被扔进饱

和溶液一样，牛顿凝结了他那个时代的悬而未决的概念，微积分成型了。任何第一流的头脑都很可能同样起到凝结核的作用。莱布尼兹是那个时代的另一个具有第一流头脑的人，他也凝结了微积分。但是他不仅只是一个表述他那个时代精神的代理人，牛顿在数学上也不只是一个代理人。莱布尼兹在他的"普遍符号语言"的理想中，走在他的时代前面两个多世纪，这又是仅就数学和逻辑而言的。就目前历史研究已经表明的看来，莱布尼兹在他第二个伟大的数学理想中是独一无二的。

莱布尼兹集数学思想的两个宽广的、对偶的领域(分析和组合，或连续和离散)中的最高能力于一身，这是前无古人后无来者的。他是数学史上唯一的一个在思维的两方面都具有最高能力的人。他的组合方面反映在他的德国后继者们的工作中，这些工作大多数是不足道的，只是到了二十世纪，当怀特海和罗素继十九世纪布尔之后的工作，部分实现了莱布尼兹的一般符号推理的理想时，对于一切数学和科学思想最重要的数学的组合方面，才成为象莱布尼兹预先肯定的那样重要。今天，随着莱布尼兹的组合方法在符号逻辑及其外延中的发展，它对于莱布尼兹和牛顿肇始并发展到具有目前复杂度的分析，就象分析本身一样重要；因为就目前所能看到的，符号方法提供了澄清数学分析中自芝诺以来就侵扰其基础的悖论和矛盾的唯一希望。

119

在提到费马和帕斯卡关于概率的数学理论的工作时，就已经提到过组合分析了。不过，这只是莱布尼兹想到并向它(如将要出现的)迈出了头一大步的"普遍符号语言"中的一个细节。但是微积分的发展和应用，对十八世纪的数学家们有着不可抗拒的吸引力，而莱布尼兹的规划直到十九世纪四十年代才受到认真的对待。此后，除了几个没有跟着流行数学走的人之外，它又再次被人们忽略了，

直至1900年另一部《原理》，即怀特海和罗素的《数学原理》，发起符号推理的现代运动，它才又得到认真的对待。

自1910年以来，这个规划已经成为现代数学的主要兴趣之一。从狭义上讲，组合分析(如帕斯卡、费马和他们的后继者们应用的那样)首先出现在概率论中；由于一种奇怪的"无穷尽的反复"，不久以前，在对概率的基本概念作了重大修正后，概率论又出现在莱布尼兹的规划中，部分得自新量子力学的经验表明，对概率论的这种修正是必要的；今天，概率论正在成为符号逻辑——莱布尼兹的广义的"组合论"——领域中的一部分。

前一章已经提到过莱布尼兹在微积分学的创造中所起的作用，也提到了这个作用引起的灾难性的争论。在牛顿和莱布尼兹逝世并安葬(牛顿被安葬在威斯敏斯特教堂，那是受到整个讲英语民族尊敬的圣地；莱布尼兹被葬在一个无名墓地，只有挥动铁锹的工人和他自己的秘书听到泥土落在棺材上的声音，他被自己的人民冷冷地抛在一边了)之后的很长时间内，牛顿获得了所有的荣誉——或耻辱，至少在讲英语的地方是如此。

莱布尼兹本人没有仔细推敲他的使一切严格推理都归于符号技术的伟大规划。这件事现在也没有做到。但是他确实全都想到了，他确实做了一个重要的开端。然而为了赚得毫无价值的荣誉和超出他的需要的金钱而给那个时代的王公贵族们效劳，他那多方面的才能，以及他生命的最后几年中使人筋疲力竭的争吵，所有这一切都妨碍他完整地创造出象牛顿的《原理》那样的杰作。简单地总结一下莱布尼兹取得的成绩，以及他的各种各样的活动和他无休止的好奇心，我们就会看到我们熟悉的，使不止一个第一流的数学天才过早枯萎的挫败所造成的悲剧；在这些天才中，牛顿追求完全不值得他垂青的公众尊敬；高斯需要得到智力不如他的人的注

120

意而被引诱离开了他更伟大的工作。在所有伟大的数学家中，只有阿基米德从来没有动摇过。只有他出生在其他人极力想使自己跻身其中的社会阶层；牛顿想跻身于上层社会的努力是粗鲁而直接的；高斯的努力是间接的、无疑是下意识的，他寻求已经获得名声和公认的社会地位的人们的认可，尽管他自己是最单纯不过的人。所以最终可以就贵族地位说点什么了：由于与生俱来的或由于其它的社会差别而拥有的贵族地位，是这样一个东西，正是它，把它的无价值教给它的幸运的所有者。

莱布尼兹的情况是，他贪图从贵族雇主那里得到钱财，因而虚掷了他的才智；他总在弄清半皇家私生子的家系（他们的后代付给他慷慨的工钱），用他的无可比拟的法律知识，来证实他们对贵族权益的合法要求，那是他们的粗心的祖先们没有私下留给他们的。但是比他对金钱的渴望更不幸的是，他的多方面的才智毁了他，要是他能活一千年而不是短短的七十年的话，这种才智是什么都能做到的。正如高斯指责他的那样，莱布尼兹把他研究数学的伟大天才，浪费在各种各样的学科中了，没有人能希望在所有这些学科中都是最杰出的，而——按照高斯的看法——他在数学上拥有最高的才智。但是为什么要责备他呢？他就是他那个样子，不管愿意不愿意，他不得不认命。正是他那才华横溢的天赋，使他能够做阿基米德、牛顿和高斯做不出的梦——“普遍符号语言”。其他人可能实现这个梦想；莱布尼兹起到的作用在于他梦想它是可能的。

可以说莱布尼兹不止活了一生，而是活了好几世。他作为一个外交官、历史学家、哲学家和数学家，在每一个领域中都完成了足够一个普通人干一辈子的事情。他比牛顿年轻大约四岁，1646年7月1日出生在莱比锡，与牛顿的八十五年的一生相比，他只活了七十岁，1716年11月14日在汉诺威辞世。他的父亲是一位伦理学教

授，出自一个三代为萨克森政府服务的名门世家。这样，年轻的莱布尼兹就在一个充满着政治气氛的学术环境中度过了他的幼年。

他六岁失去了父亲，但在这以前他已经从父亲那里得到了对历史的爱好。虽然莱布尼兹在莱比锡进了学校，但他主要是靠不断地阅读父亲的藏书自学。八岁时他开始学习拉丁文，十二岁时已经掌握了它，能够准确地用拉丁文写诗。学了拉丁文，他又继续学习希腊文，这种语言他也是主要靠自己的努力学习的。

在这个阶段，他的智力发展与笛卡儿的智力发展相似：古典语文的学习已不再能满足他，他转向了逻辑学。那时他只是一个不足十五岁的孩子，却要改革由古典学者、经院哲学家和基督教神父们提出的逻辑学，从他这种努力中发展出了他的普遍符号语言或普遍数学的最初的萌芽，正如库蒂拉、罗素和其它一些人指出的，这是通向他的思辨哲学的线索。由布尔在1847—1854年发明的符号逻辑（将在后面的一章中讨论）只是莱布尼兹称为微积分推理的符号语言的一部分。后面我们要引用他自己对普遍符号语言的描述。

莱布尼兹十五岁时进了莱比锡大学学习法律。不过法律并没有占去他的全部时间。头两年中，他广泛阅读哲学著作，第一次知道了现代哲学家们，或者"自然"哲学家们：开普勒、伽利略和笛卡儿所发现的新世界。莱布尼兹了解到，只有熟悉数学的人，才能懂得这个比较新的哲学，便在耶拿大学度过1663年的夏天，在那里听艾哈德·魏格尔的数学讲座，魏格尔是一个在当地颇有名望的人，但很难算得上是一个数学家。

莱布尼兹回到莱比锡以后，把精力集中在法律上。到1666年他二十岁时，他已经为取得法律博士学位作好了充分准备。我们回想起来，正是在这一年，牛顿开始在伍尔索普乡居，这使他发明了微积分学和宇宙万有引力定律。莱比锡大学的教师们由于嫉妒

而恼怒，拒绝授予莱布尼兹博士学位，公开的理由是他太年轻，实际原因是他知道的法律知识比他们这些迟钝的家伙加在一起知道的还要多。

在这以前，他在1663年十七岁时，以极其优秀的论文取得了学士学位，这篇论文预示了他成熟的哲学的一个基本原则。我们不占用篇幅来讨论它，但是可以提及的是，莱布尼兹的论文的一个可能的说明是"作为整体的机体"的原则，一个生物学家的进步学派和另一个心理学家的进步学派，发现这个原则在我们自己的时代是非常有吸引力的。

莱布尼兹厌恶莱比锡的教师们的偏狭，永远离开了他的家乡，前往纽伦堡。1666年11月5日，在纽伦堡的阿尔特多夫大学分校，由于他关于讲授法律的新方法(历史方法)的论文，他不仅立刻被授与博士学位，而且被请求接受该大学的法学教授职位。但是，就象笛卡儿因为知道他这一生要干些什么，拒绝了陆军中将的头衔一样，莱布尼兹也拒绝了这个职位，说他有全然不同的抱负。他没有透露这些抱负是什么。看来它们不大可能就是给公子哥儿们当高级讼棍，可是命运不久就把他踢进了这一行当。莱布尼兹的悲剧在于，他在遇到科学家之前先遇到了律师们。

他的关于讲授法律和打算重新编辑法典的论文，是在从莱比锡到纽伦堡的旅途中写出来的。这说明了贯穿莱布尼兹一生的一个特点：他具有在任何地点、任何时候、任何条件下工作的能力。他不停地读着、写着、思考着。他的大部分数学著作，更不用说他关于今生来世的一切事物的其它令人惊奇的东西，都是在颠簸的和四处透风的破马车里写出来的，当他在他的雇主反复无常的吩咐下东奔西跑时，就是这样的破马车载着他在十七世纪欧洲的崎岖小路上奔波。所有这些不停的活动的收获，是象一个小小的干草

堆那样大的一堆用各种尺寸、各种质量的纸张写出的手稿，这些手稿从来没有被彻底整理过，更不用说出版了。今天，它们的绝大部分成捆地躺在皇家汉诺威图书馆里，等待一支学者大军以耐心的劳动去筛选出有价值的东西。

一个人的脑子里能够容得下莱布尼兹写到纸上的全部思想，不管是发表的还是未发表的，似乎是难以置信的。作为颅相学家和解剖学家感兴趣的一个项目，据说(我不知道是否可靠)，有人把莱布尼兹的颅骨挖出来，测量过，发现它明显地比正常成人的颅骨小。这里面可能有些什么道理，因为我们很多人都见过一些十足的白痴，在他们象汤罐那样大的脑袋上凸出着高贵的前额。

123

1666年对牛顿来说是创造奇迹的一年，对莱布尼兹也是伟大的一年。在他称之为"中学生随笔"的《论组合的艺术》中，这个二十岁的年轻人立志要创造出"一个一般的方法，在这个方法中所有推理的真实性都要简化为一种计算。同时，这会成为一种通用的语言或文字，但与那些迄今为止设想出来的全然不同；因为它里面的符号甚至词汇要指导推理；错误，除去那些事实上的错误，只会是计算上的错误。形成或者发明这种语言或者记号会是非常困难的，但是可以不借助任何词典就很容易懂得它"。在后来的一次描述中，他满怀信心地(也是乐观地)估计了实行他的计划所需要的时间："我想经过挑选的几个人能够在五年内完成这件事"。直到晚年，莱布尼兹还在后悔旁的事情过多地分散了他的精力，使他没有实现他的想法。他说，要是他自己更年轻一些，或者有几个称职的助手，他仍然能够实现它——一个在势利、贪婪和阴谋诡计中虚掷了光阴的天才惯用的托辞。

稍稍预测一下，可以说莱布尼兹的梦想使他在数学和科学上的同代人感到只不过是一个梦想，只能作为一个在其它方面神志

清爽、具有广泛天赋的天才的固执念头，有礼貌地忽视过去。在1679年9月8日的一封信中，莱布尼兹(专门讲到几何，但也讲到一般的推理)告诉惠更斯，有一个"完全不同于代数的新符号语言，它对于精确而自然地在脑子里再现(不用图形)依赖于想象的一切有很大好处"。

这样一种直接的、用符号处理几何的方法，是赫尔曼·格拉斯曼(他在代数中的工作推广了哈密顿的工作)在十九世纪发明的。莱布尼兹继续讨论这个规划中固有的困难，不久就强调指出他认为它比笛卡儿的解析几何优越的地方：

"但是它的主要效用在于能够通过记号[符号]的运算完成结论和推理，这些记号不经过非常精细的推敲或使用大量的点和线，就无法用图形(甚至用模型)表示出来，而过多数目的点和线会把它们混淆起来，因而又不得不作出无穷多个无用的试验；另一面，这个方法会确切而简单地导向[所需要的结果]。我相信力学差不多可以象几何学一样用这种方法去处理。"

124 莱布尼兹的普遍符号语言的这一部分现在称为符号逻辑，他在这一部分做出的确切的东西中，我们可以举出他的逻辑加法、逻辑乘法、否定、等式、核类、以及类的包含这些东西的主要性质的公式表示。至于一些术语的意义以及对逻辑代数的假定之解释，我们可以参考后面关于布尔那一章的内容。所有这些都被抛在一边了。要是当莱布尼兹把它们四处乱抛的时候，就有能干的人把它们拾起来，而不推迟到十九世纪四十年代，那么数学史可能就与现在完全不同了。不过变得太快还不如不变。

莱布尼兹在二十岁时就做了他的普遍符号语言的梦，不久他转向了更为实际的事情，成了一家公司的法律顾问和为美因兹选侯服务的受到称赞的兜销员。莱布尼兹在深深陷进多少有些污浊

的政治之前，在梦想的世界中最后沉浸了一下，他和出没于纽伦堡的罗希克鲁斯会员①们一起，把几个月的时间用在炼金术上。

正是他关于讲授法律的新方法的论文毁了他。这篇论文受到了选侯的一个心腹政客的注意，他耸恿莱布尼兹把它印出来，以便呈交一份给威严的选侯。莱布尼兹这样做了，在一次面晤以后，他被指定去订正法典。不久，他被委以各种各样微妙和暧昧的重任。他成了一个第一流的外交官，总是愉快的，总是光明正大的，但是从来不顾虑重重，甚至在梦中也是如此。那个叫做"力量均势"的不稳定的方案，至少部分是出自他的天才。莱布尼兹关于为征服和开化埃及而进行一场圣战的伟大梦想，尽管纯粹是一种玩世不恭的杰作，但甚至在今天也是难以超过的。当拿破仑发现莱布尼兹这个宏伟的梦想抢在了他的行动之前时，他感到非常之懊恼。

一直到1672年，莱布尼兹对他那个时代的现代数学几乎还一无所知。当时他二十六岁，在惠更斯指导下开始了他真正的数学教育。他是在两个外交阴谋之间的空隙中，在巴黎碰到惠更斯的。虽然克里斯蒂安·惠更斯(1629—1695)主要是个物理学家，他的一些最好的工作是关于钟表学和光的波动学说的，但他也是一个很有才能的数学家。惠更斯送给莱布尼兹一份他自己的关于钟摆的数学著作。莱布尼兹被数学方法在行家手里产生的力量迷住了，他请求惠更斯给他上课。惠更斯看出莱布尼兹具有第一流的头脑，高兴地答应了。那时莱布尼兹已经用他自己的方法——普遍符号语言的侧面——作出了一系列的发明。其中有一个是远比帕斯卡的机器优越的计算机器，帕斯卡的计算机器只能作加法和减法；莱布尼兹的计算机器除加减法外，还能做乘法、除法和开方。在惠更

125

① 见本书第63页注。——译者

斯这位专家的指导下，莱布尼兹很快发现了他自己。他是一个天生的数学家。

课程在1673年1月到3月中断了，那一段时间莱布尼兹作为选侯的随员去了伦敦。在伦敦期间，莱布尼兹见到了英国数学家，给他们看了一些他自己的著作，只是得知它们已为人所知。他的英国朋友们告诉了他墨卡托的求双曲线面积的方法——引导牛顿发明微积分学的线索之一。这使莱布尼兹知道了无穷级数的方法，他接着研究了无穷级数。可以在这里给出他的一个发现（有时候被归功于苏格兰数学家詹姆斯·格雷戈里，1638—1675）：如果π是圆的周长与直径之比，那么

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots,$$

序列以同样的规律无限继续下去。这不是一个计算π的数值（3.1415926……）的实用方法，但是π和所有奇数之间的这种简单的联系是明显的。

莱布尼兹在伦敦期间，参加了皇家学会的会议，他在那儿展出了他的计算机器。由于这项工作和他的其它工作，他在1673年3月回到巴黎之前，被选为皇家学会的外籍会员。后来（1700年）他和牛顿成为法兰西科学院的第一批外籍院士。

惠更斯对莱布尼兹离开巴黎期间作出的工作非常高兴，他鼓励莱布尼兹继续做下去。莱布尼兹把他所有的空暇时间都用在数学上，在1676年离开巴黎去汉诺威为布伦斯威克-吕讷堡公爵服务之前，已经作出了一些微积分学的基本公式，并且发现了"微积分学的基本定理"（见前一章）——那就是说，如果我们接受他自己说的日期，1675年的话。直到1677年7月11日，在牛顿未公布的发现之后11年，莱布尼兹的这个发现才发表，而牛顿在莱布尼

兹的发现发表之后也才公布了他的发现。当莱布尼兹在《教师学报》上写了一篇评论，严厉地批评牛顿的工作时，争论就真正开始了。莱布尼兹使用外交手腕，是把自己隐藏在无所不知的编辑名义下，匿名写这篇评论的，而《教师学报》是莱布尼兹本人于1682年创办并自任主编的杂志。在1677年到1704年期间，莱布尼兹的微积分学已经在欧洲大陆上发展成了一个真正有力并很容易应用的工具，这主要是由于瑞士的伯努利兄弟，雅科布和他的弟弟约翰的努力，而在英国，由于牛顿不愿意爽快地与莱布尼兹分享他的数学发明，微积分仍然是一个相对来说未经试用的新奇事物。

在那些现在对于微积分学的初学者是很容易的，但却使莱布尼兹(或许也使牛顿)在发现正确途径之前苦思良久、反复试探的东西中，有一个例子可以用来说明数学自1675年以来已经走了多么远。我们用前一章讨论过的变化率来代替莱布尼兹的无穷小。如果u和v分别是x的函数，那么怎样把uv相应于x的变化率表示成u和v分别相应于x的变化率呢？用符号来说就是，$\frac{d(uv)}{dx}$与$\frac{du}{dx}$和$\frac{dv}{dx}$之间的关系是什么？莱布尼兹一度认为应该是$\frac{du}{dx}\times\frac{dv}{dx}$，这与正确的形式

$$\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

毫无相似之处。

1673年选侯死了，莱布尼兹在巴黎的最后的日子多少是自由的。莱布尼兹在1676年离开巴黎，取道伦敦和阿姆斯特丹前往汉诺威，为布伦斯威克-吕讷堡的约翰·弗里德里希公爵效劳。正是在阿姆斯特丹，他策划了在他作为一个逆来顺受的外交官的漫长生涯中最阴暗的交易中的一笔。莱布尼兹与“上帝钟爱的犹太人”本尼

狄克特·德·斯宾诺莎(1632—1677)的交易史可能是不完全的，但是从现有的记载看，似乎这一次莱布尼兹偏偏就在一件关于伦理学的事情上毫无道德可言。莱布尼兹好象主张把他的伦理学应用于实际目的。他从斯宾诺莎的未发表的杰作《伦理学》(依几何学方式证明)中窃取了大量精华，该书是以欧几里得几何的方式写成的关于伦理学的专著。第二年斯宾诺莎去世，莱布尼兹好象发现这是抛出他阿姆斯特丹之行的纪念品的适当时机了。这个领域的学者们似乎一致认为：不管什么地方莱布尼兹自己的哲学涉及到伦理学，都是不表示谢意地盗自斯宾诺莎的。

127

怀疑莱布尼兹有罪，或者认为他本人关于伦理学的思想没有受斯宾诺莎思想的影响，对于任何在伦理学领域不是专家的人都未免太鲁莽了。不过在数学上至少有两个相同的例子(椭圆函数、非欧几何)，在一个时期所有的证据都证明有几个不诚实的人比莱布尼兹的行为还要恶劣。但是当所有受到指责的人都死去许多年后，无可怀疑的日记和通信公开了出来，人们才知道所有这些人都是完全无辜的。在掌握全部证据以前，有时候相信人们最好的方面而不是最坏的方面也许不会吃亏——而对于一个死后受到审判的人，掌握全部证据是决不可能的。

莱布尼兹一生余下的四十年是在为布伦斯威克家族的毫无价值的服务中度过的。他作为这个家族的图书管理人、历史学家和家族的总智囊，总共为三个主人服务过。对于这样一个家族，有一部与所有象它一样得天独厚的家族的精确的联系史是极其重要的事情。莱布尼兹作为家族图书管理人的职责，不仅是作书籍的编目人，也作家系学专家和发了霉的档案的搜集者。他的职责是确定他的雇主对欧洲半数王位的权利要求，如果不能确定，就通过审慎

的篡改来炮制证据。他的历史研究使他在1687—1690年跑遍了整个德意志，然后又去了奥地利和意大利。

在意大利逗留期间，莱布尼兹访问了罗马，教皇极力要他接受梵蒂冈的图书馆馆长职位。但是由于获得这一职位的先决条件是莱布尼兹必须成为一个天主教徒，他拒绝了——就这一次他是小心谨慎的。然而他是小心谨慎的吗？他不情愿为了另一个职位辞去一个好位置，这可能使他开始对他的"普遍符号语言"的下一个应用，这是他所有一般梦想中最异想天开的、野心勃勃的梦想。要是他完成了这件事，他就可以搬进梵蒂冈，不在外面抛头露面了。

他的宏大计划就是把新教和天主教重新合并在一起。当时新教从天主教中分裂出来还不太久，所以把它们重新合并在一起这个计划，在当时并不象现在听起来那么荒谬。莱布尼兹盲目乐观，他忽视了一个对人类天性就象热力学第二定律之于物理世界一样的基本规律——事实上它是同一类的：所有的教义都有分裂成两个的倾向，这两个的每一个又分裂成两个，如此继续下去，直到有限次数的分裂后(次数能很容易地由对数计算出来)，在任何特定的领域内，不管这领域多么大，人数都比教义的数目要少；在第一个教义中体现出来的原始教条的进一步减少，把第一个教义稀释成显而易见的空话，它们太难以捉摸，无法维系任何人的信仰，不管这信仰多么微小。 128

1683年在汉诺威举行的一次相当有希望的会议，没有能实现和解的目的，因为没有哪一方面能够决定谁应该被对方吞掉，因此两方面都欢迎天主教徒和新教徒1688年在英国的血腥斗争，把它作为无限期休会的合法理由。

莱布尼兹从这场闹剧中什么也没有得到，他立刻又组织了另一场闹剧。他试图只把他那个时代的两个新教派别联合起来，可

结果只是使很多杰出的人比以前更加固执己见，彼此更加怨恨。新教会议在互相指责和诅咒中散场了。

大约正是在这个时候，莱布尼兹转向哲学，把它作为他的主要慰藉。在一次援助帕斯卡的詹森教派老朋友阿尔诺的努力中，莱布尼兹写了一篇关于玄学的半诡辩的论文，这篇论文注定对詹森教徒和这样一些人有些用处，他们需要比耶稣会会士们的过于难捉摸的逻辑更难于捉摸的东西。莱布尼兹的哲学占据了他的余生约达四分之一世纪之久(当他没有为他的雇主忙于没完没了的布伦斯威克家族史时)。象莱布尼兹这样的人，在二十五年的时间里形成了一大片哲学迷雾，这几乎没有必要去说它。每一个读者无疑已经听到了一些关于单子——宇宙的微形拷贝，作为一种一寓于万物、万物归一的东西，天地万物都由它们构成——的巧妙理论，莱布尼兹用它来解释今生和来世(除单子以外)的一切事物。

莱布尼兹的方法应用到哲学上的力量是不能否认的。作为莱布尼兹在他的哲学中证明的那些命题的一个例子，可以提到关于上帝存在的命题。他企图证明乐观主义的基本命题——“在这个所有可能的世界中最好的世界里，一切都会得到最好的结果”，可他没有成功，只是到了1759年，莱布尼兹默默无闻地死去和被遗忘了四十三年之后，伏尔泰在他的划时代的著作《天真汉》中才发表了一个结论性的说明。还可以提到一个孤立的结果。那些熟悉广义相对论的人会想到“完全真空”——完全没有物质的空间——已经算不得什么了，莱布尼兹认为完全没有物质的空间是毫无意义的。

莱布尼兹的兴趣的一览表还远没有完备。经济学、语言学、国际法(他在这个领域是一个先驱者)、作为一种有利可图的工业在德国的某些地方建立采矿业、神学、创立科学院、勃兰登堡年轻的

选侯夫人索菲(笛卡儿的伊丽莎白的一个亲戚)的教育，这些都吸引了他的注意力，在每一个方面他都作出了一些值得注意的事情。也许他最不成功的尝试是在力学和物理科学中，他在那些领域中有时犯下的大错，与象伽利略、牛顿、惠更斯、甚至笛卡儿这些人的沉着、坚定的见解，形成了鲜明对比。

在这个一览表中，只有一项需要在这里进一步注意。莱布尼兹在1700年被召回柏林，担任年轻的选侯夫人的家庭教师期间，挤出时间组织了柏林科学院，他担任了首任院长。直到纳粹"清洗"这个科学院以前，它一直是世界上居于领先地位的三、四个学术机构之一。他在德累斯顿、维也纳和圣彼得堡创办科学院的同样计划，在他有生之年毫无结果。但是他为彼得大帝拟订的成立圣彼得堡科学院的计划，在他死后得到了实现。当莱布尼兹在1714年最后一次访问奥地利时，他的建立一个维也纳科学院的企图被耶稣会会士们挫败了。在莱布尼兹为阿尔诺做了那些事之后，耶稣会会士们的反对是预料之中的事。他们在一桩学术政治的小事上挫败了这位杰出的外交家，这件事表明莱布尼兹在六十八岁时已经开始多么糟糕地走下坡路了。他不再是往日的他了，的确，他的最后几年只不过是他往日的光荣的一个模糊的影子。

在终生为王公贵族们效劳以后，他现在收到了这种效劳的通常的报酬。疾病，迅速地衰老，被争吵搞得精疲力尽，最后他被踢了出去。

莱布尼兹在1714年9月回到了布伦斯威克，得悉他的雇主乔治·路易选侯——在英国历史上以"诚实的傻瓜"闻名——已经打点起行装前往伦敦，去作英国历史上的第一位德意志国王。再没有比跟随乔治去伦敦更让莱布尼兹高兴的了，尽管由于他与牛顿的争执，当时他在英国皇家学会和其它地方的敌人为数颇多，而且十 130

分刻毒。但是象乡巴佬似的乔治，现在成了善于交际的绅士，不再需要莱布尼兹的外交了，他轻率无礼地打发这个帮助他进入文明社会的人呆在汉诺威的图书馆里，继续摆弄显赫的布伦斯威克家族冗长的历史。

两年后莱布尼兹去世时(1716年)，他凭外交手腕篡改过的这部家族史仍不完整。尽管莱布尼兹努力工作，也没有能把这部家史追溯到1005年以前，已经完成的部分包括的时间也不到三百年。这个家族极为错综复杂地纠缠在它的战争冒险中，就连莱布尼兹这位通才也不能给他们全都挂上清白无瑕的姓名牌子。布伦斯威克家族对这项巨大的劳动的评价，就是把它忘得一干二净，直到它在1843年出版时，他们才重视它。但是这部家史究竟是完整的还是经过删改的，只有在仔细检查过莱布尼兹的其余手稿之后才能知道了。

在莱布尼兹身后三百多年的今天，他作为一个数学家的名气，比他的秘书跟着他的灵柩走向墓地之后的许多许多年要高得多，并且还在继续上升。

莱布尼兹作为一个外交家和政治家，在任何时候、任何地点都是最好的外交家和政治家中的精萃，他比他们加在一起还要聪明得多。世界上只有一种职业比他的职业历史长久，在那个职业也成为受人尊敬的职业以前，让人选择外交作为谋生之道为时过早。

第八章　先天还是后天？

伯努利家族

这些人一定取得了许多成就，并且美妙地达到了他们为自己制定的目标。

——约翰·伯努利

自从大萧条①开始冲击西方的文明以来，优生学家、实验遗传学家、心理学家、政治家和独裁者——出于不同的原因——对于仍然悬而未决的遗传与环境之关系的争论，感到了新的兴趣。在一个极端，百分之百的无产阶级认为：只要给以机会，任何人都能成为天才；而在另一个极端，同样过分自信的保守党人断言，天才是天生的，甚至在伦敦的贫民窟中也能出现天才。在这两个极端之间有着各种各样的意见。一般的观点认为，天才出现的决定因素是先天，而不是后天，但要是没有有意的或偶然的帮助，天才就会枯萎。数学史为研究这个有趣的问题提供了非常丰富的材料。不偏袒某一方面——现在要那样做还为时过早——我们可以说数学家们的生活史提供的证据，似乎赞同一般的观点。

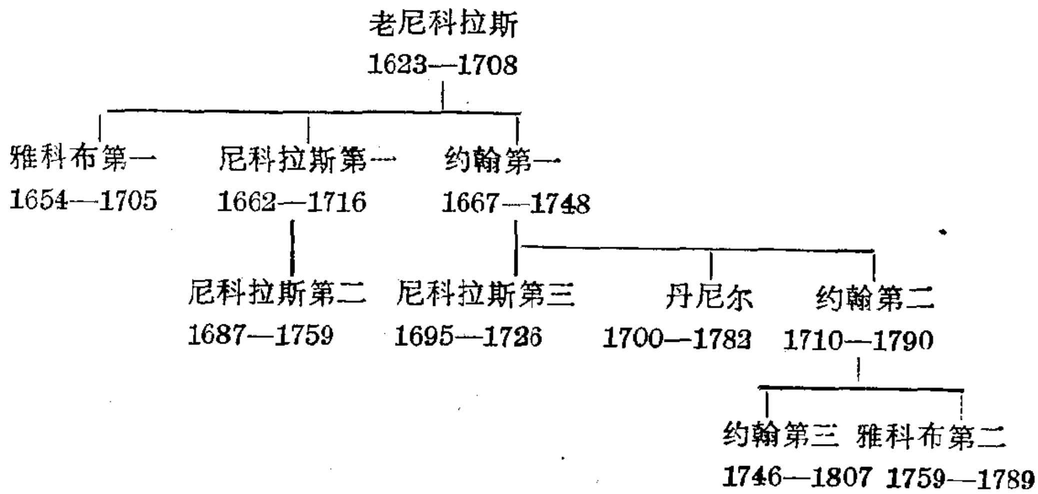
也许最令人吃惊的家族史是伯努利家族的历史，这个家族在三代中产生了八个数学家，其中有几个很突出，而他们又留下了一大群后裔，其中约有半数天资过人，并且直至今日，他们几乎都是优秀人物。人们曾经按照家系查询过不下一百二十位数学上的伯努利家族的后代，这支庞大的后裔中的大多数在法律、古典学识、

① 指一九二九年开始的世界经济危机，通称大萧条。——译者

科学、文学、有学问的职业[指神学、法学、医学三职业——译者]、管理和艺术上取得了成功——有时是卓有成就的。没有人失败。就这个家族的第二代、第三代从事数学研究的大多数成员来看，最值得注意的事情是他们并不是有意选择数学作为职业，而是象酒鬼离不开酒那样不由自主地陷入了数学。

132

由于伯努利家族在十七世纪和十八世纪微积分学及其应用的发展中占有领先地位，在有关现代数学发展的甚至最简单的记述中，也不能只是把他们一带而过。许多人完善了微积分学，使非常普通的人也能用微积分学去发现最伟大的希腊人也决不能发现的结果，伯努利们和欧拉事实上是所有这些人的领袖。但是在象本书这样一个记述中，仅只伯努利家族的工作就多得无法加以详细描述，所以我们只是把他们放在一起简略地予以论述。



伯努利一家是很多信奉新教的家族中的一个，在对胡格诺教派①的长期迫害中，他们于1583年逃离安特卫普，以逃避天主教徒的大屠杀(如象在圣巴塞罗缪节之夜进行的屠杀)。这一家先是在法兰克福避难，不久迁往瑞士，在巴塞尔安顿了下来。伯努利家族的奠基人与一个最古老的巴塞尔家族联姻，成了一个大商人。家系表

① 十六——十七世纪之间的法国新教徒。——译者

上的头一个人，老尼科拉斯同他的祖父和曾祖父一样，也是一个大商人。他们都娶了商人的女儿，除去一个例外——已经提到过的曾祖父——他们聚集了大量财富。这个例外选择医学作为职业，是离开家族经商传统的第一个人。数学天才也许在这个精明的商人家庭中潜伏了许多代，但它的真正出现是象爆炸一样极其突然的。 133

现在参看家系表，在继续遗传学问题之前，我们先要对老尼科拉斯的后代中八位数学家的主要科学活动作一简短的概述。

雅科布第一自学掌握了莱布尼兹形式的微积分学。他从1687年直到逝世，在巴塞尔任数学教授。雅科布是首先对微积分学的发展做出重大贡献的人们中的一个，这些人使微积分学超出了牛顿和莱布尼兹留下的状态，并把它应用到困难而重要的新问题上。他对解析几何、概率论和变分法的贡献具有极大的重要性。由于变分法还将经常出现（在欧拉、拉格朗日和哈密顿的工作中），我们可以描述雅科布第一在这个学科中考虑过的一些问题的性质，在费马的最小时间原理中，我们已经看到过变分法处理的问题类型中的一个例子。

变分法的起源非常古老。根据一个传说①，在建立迦太基城的时候，一个人在一天内犁出的沟能圈起多大的面积，这个城就可以建多大。假定一个人在一天内能犁出一条一定长度的沟，这条沟以什么形状为最好呢？从数学上说就是，在同样周长的各种形状的面积中，哪一种形状的面积最大？这是一个等周问题，这里的答案是圆。这似乎是明显的，但决不是容易证明的。（在中学几何中给出的初步证明有时候纯粹是错误的。）这个问题的数学就是做出某个积

① 实际上我在这里把两个传说合在一起了。戴多女王[传说中的迦太基女王和建国者——译者]得到了一张水牛皮，要用它“圈出”最大的面积。她把它切成了一根皮条，围出了一个半圆。

分，它的最大值满足一个限制条件。雅科布第一解答了这个问题，并且推广了它①。

最速降线是摆线，这个发现已经在前面几章中提到过了。摆线是最速下降曲线这一事实，是1697年雅科布第一和约翰第一两兄弟发现的。另外几个人也几乎在同时发现了它。但是摆线也是等时曲线，这使约翰第一觉得它是某种奇异而美妙的东西："我们可以公正地称赞惠更斯，因为他首先发现了一个重的粒子不论起点在摆线的什么地方，下落的时间总是相同的。但是当我说出，就是这同一条摆线、惠更斯的等时曲线，也是我们正在寻找的最速降线时，你就会惊呆了"。（引文见布利斯的《变分法》第五十四页）。雅科布也热心了起来。这些又是变分法解决的那类问题的例子。为避免把它们看作微不足道的，我们再次重复，数学物理的一整个分支经常归为一个简单的变分原理——象费马在光学中的最小时间原理，或哈密顿在动力学中的原理。

134

雅科布去世后，他的关于概率论的伟大论著《猜度术》在1713年出版。这部论著包含的许多东西，在概率论及其在保险、统计以及遗传学研究的应用中至今仍然非常有用。

雅科布的另一项研究表明他曾把微积分学发展到了何等地步：雅科布继莱布尼兹之后，详尽研究了悬链线——一根均匀的链子悬挂在两个点之间形成的曲线、或悬挂着的加重的链子形成的曲线。这不只是出于好奇。今天，雅科布第一在这方面发展起来的数学已经用于悬桥和高压输电线上。当雅科布把所有这些都做出来的时候，它是新的和困难的，今天它只是微积分学或力学的初等课程中的一个练习题。

① 关于变分法的这个问题和其它一些问题，历史记录可以在G. A.布利斯的著作《变分法》（芝加哥、1925年出版）中找到。雅科布第一的英文名字是詹姆斯。

雅科布第一和他的弟弟约翰第一并不总是相处得很好。约翰似乎是两兄弟中更爱争吵的一个。他在关于等周问题这件事情上，对待他哥哥的态度几乎是不诚实的，这是确定无疑的。伯努利家的人对待数学极其认真。他们关于数学的一些通信充满了强烈的语言，这种语言通常是盗马贼使用的。在约翰第一这方面，他不仅企图偷窃他哥哥的想法，而且在他的儿子赢得了他本人也在竞争的法国科学院的一项奖金后，把儿子赶出了家门。不过，如果有理智的人们会在玩牌上激动起来，为什么他们不能为了更令人激动得无以复加的数学而勃然大怒呢？

雅科布第一的性格上有一种难以理解的倾向，这种倾向对研究伯努利家族的遗传因素是有重要意义的，它在他生命行将结束时一度以一种有趣的方式突然出现。有一个螺线(对数螺线或等角螺线)，经过许多种几何变换的每一种变换后，都再现出一条相似的螺线。雅科布被这种螺线的再现和他发现的关于它的几个性质迷住了，吩咐在他的墓碑上刻上一条螺线，他的墓碑的铭文是«Eadem mutata resurgo»(尽管改变，我仍将再现)。

135

雅科布的座右铭是 Invito patre sidera verso (我违背父亲的意愿，研究星星)——这是对他的父亲徒劳地反对他把智力用于数学和天文学的讽刺性的纪念。这个细节对天才的“先天”论比对“后天”论有利。要是雅科布的父亲占了优势，雅可布可能就是一个神学家了。

雅科布第一的弟弟约翰第一开始时并不是数学家，而是一名医生。我们已经提到过他与慷慨地教给他数学的哥哥争吵的事。约翰是一个有强烈爱憎的人：莱布尼兹和欧拉是他的神，牛顿是他断然憎恨和大大贬低的人，牛顿作为莱布尼兹的偏执的竞争者，几乎是注定要被嫉妒乃至憎恨的。固执的父亲试图强迫他的儿子从

事家族的业务，但是约翰第一步哥哥的后尘反叛了，从事了医学和人文科学，他不知道他这样做是在与他的遗传作对。他十八岁取得了硕士学位。不久，他知道他选择医学是错了，就回到了数学。他的第一项学术职务是1695年在格罗宁根任数学教授；1705年雅科布第一去世，约翰第一继他之后任巴塞尔的教授职务。

约翰第一在数学上比他的哥哥还要多产，他为在欧洲传播微积分学做了大量工作。除数学外，他的研究范围还包括物理、化学和天文学。在应用方面，约翰第一对光学做出了很大贡献，写了关于潮汐理论和航行的数学理论的文章，解释了力学中的虚位移原理。约翰第一是具有非凡的体力和智力的人，直到他以八十高龄去世的前几天任然很有活力。

雅科布第一和约翰第一的兄弟尼科拉斯第一，在数学上也很有天赋。象他的兄弟们一样，他开始也选错了职业。他十六岁时在巴塞尔大学取得了哲学博士学位，二十岁时取得了法学的最高学位。他先在伯尔尼任法学教授，而后才在圣彼得堡科学院从事数学工作。到他去世时，他受到极高的评价，因而叶卡捷琳娜女皇为他举行了由国家承担的公开葬礼。

136

遗传因素在第二代奇怪地出现。约翰第一试图强迫他的第二个儿子丹尼尔经商。但是丹尼尔认为他更愿意行医，于是在不由自主地投身数学之前先作了医生。丹尼尔十一岁时从只比他大五岁的哥哥尼科拉斯第三那里学习数学。丹尼尔和伟大的欧拉是密友，有时也是友好的竞争对手。丹尼尔·伯努利象欧拉一样，也有十次赢得法国科学院奖金的辉煌纪录(有几次是与其他成功的竞争者分享的)。丹尼尔的一些最杰出的工作是关于流体力学的，这是他从后来称为能量守恒的唯一原理发展出来的。今天所有研究

理论流体运动或应用流体运动的人都知道丹尼尔·伯努利的名字。

丹尼尔在1725年(二十五岁时)成了圣彼得堡的数学教授。他非常讨厌圣彼得堡的相对粗野的生活，一有机会(八年后)就回到了巴塞尔，在那里担任解剖学和植物学教授，最后任物理学教授。他的数学工作包括微积分学、微分方程、概率、弦振动理论、气体动力学说的一次尝试，以及应用数学中的许多其它问题。丹尼尔·伯努利被称为数学物理的奠基人。

从遗传的观点看，指出丹尼尔的天性中有一种对思辨哲学的显著的气质是有意义的，他这种气质也许是他祖先的胡格诺教派信仰的理想化。同样的气质也出现在受宗教迫害的著名流亡者们的众多后代身上。

第二代中的第三个数学家，尼科拉斯第三和丹尼尔的弟弟约翰第二，开始也走错了路，又被他的遗传因素拉回到数学上——可能是被他的哥哥们拉回来的。他开始于法律，在承袭他父亲的数学交椅之前，任巴塞尔的修辞法教授。他的工作主要是在物理学，由于成绩卓著，他曾三次获得巴黎大奖(通常一次就足以使一个好数学家满足——倘若他是够好的话)。

约翰第二的儿子约翰第三，重复了这个家族一开始选错职业的传统，象他的父亲一样从法律开始。他十三岁取得哲学博士学位，到十九岁他找到了他的真正天职，在柏林被任命为皇家天文学家。他的兴趣包括天文学、地理学和数学。 137

约翰第二的另一个儿子雅科布第二，继续家族的错误，也从法律开始，只是到了二十一岁才转向实验物理。他也转向了数学，成了圣彼得堡科学院数学和物理分部的成员。他由于意外，溺水早卒(三十岁)，一个很有希望的前程突然终止了，我们不知道雅科布

第二的真正才干。他娶了欧拉的一个孙女。

显示出数学天才的伯努利家族的一览表还没有穷尽，不过其余的成员就没有那么突出了。人们有时候认为，岁月使血统淡薄了。实际情况似乎恰恰相反。当数学是需要出类拔萃的天才去耕耘的最有希望的领域时，如象正在微积分学发现后的时期，有天赋的伯努利一家就去耕耘数学。但是数学和科学只是人类活动的无数个领域中的两个，对于有天赋的人来说，在这两个领域都挤满了很有能力的人时还挤在其中的某一个里面，说明缺乏实际观念。伯努利的天才没有虚掷；它只是在数学这个领域开始拥挤得象跑马大赛日的埃普索姆赛马场一样时，才投身于与数学具有同等——也许更大——重要的社会意义的事情上。

那些对遗传的变幻莫测感兴趣的人，可以在达尔文和哥尔登的家史中找到大量材料。弗朗西斯·哥尔登（查理·达尔文的表兄弟）的情况特别有意思，因为对遗传的数学研究是由他奠定的。查理·达尔文的后代中有些人不是在生物学方面，而是在数学或数学物理方面有卓越成就，如果为此责备他们，那未免有点愚蠢。天才依然是天才，它的一种表现没有必要比另一种表现“更好”或“更高”——除非我们是那种偏执者，他们坚持一切都应该是数学、或者一切都应该是生物学、或者都是社会学、或者桥牌和高尔夫球。也许伯努利家族不再把数学作为家族传统正是他们的天才的又一个例证。

138 围绕着著名的伯努利家族出现了许多传说和奇闻，在象伯努利家族那样富有天才有时语言又那样激烈的家族的情形，这是很自然的现象。这些陈词滥调中的一个可以在这里转述，因为它是那种至少与古埃及一样古老的传闻中比较早的一个有根据的例子，是我们每天都看到的强加在直至爱因斯坦的各种杰出人物身

上的那种传说的变种。丹尼尔年轻的时候，一次在旅行中与一位有趣的陌生人聊天，他客气地自我介绍："我是丹尼尔·伯努利。""我吗"，那 个人讽刺地说，"艾萨克·牛顿"。丹尼尔终生都为此高兴，把这作为他所受到的最大的恭维。



欧拉

第九章　分析的化身

欧　　拉

历史表明，那些鼓励数学——一切精确科学的共同源泉——研究的帝王也是治世最英明、光荣最持久的帝王。

——米歇尔·夏斯莱

“欧拉计算毫不费力，就象人呼吸、或者鹰在风中保持平衡一样”(阿拉哥语)，这不是对欧拉无与伦比的数学才能的夸大，莱奥纳昂·欧拉(1707—1783)是历史上著作最多的数学家，被他的同代人称为“分析的化身”。欧拉写作他的伟大的研究论文，就象下笔流畅的作家给密友写信一样容易。甚至在他生命的最后十七年中

的完全失明，也没有妨碍他的无与伦比的多产；事实上，如果失去视力有什么影响的话，那就是使欧拉对他想象中的内部世界的洞察力更加敏锐。

甚至在1936年，人们也不确切知道欧拉的著作的数量，只是估计要出版他的全部著作需要大四开本六十至八十卷。1909年，瑞士的自然科学协会着手收集和出版欧拉的散轶的论文，得到了世界各地的许多个人和数学团体的经济资助——这正说明欧拉不仅属于瑞士，也属于整个文明世界。可是在圣彼得堡（列宁格勒）发现的一大堆无可置疑的欧拉的手稿，把经过仔细估算过的费用（按1909年的钱算，约八万美元）彻底搅乱了。

欧拉的数学事业开始于牛顿去世的那一年。对于象欧拉那样的天才，不能选择比这更好的时代了。那时解析几何（1637年发表）已经应用了九十年，微积分大约五十年，物理天文学的钥匙、牛顿的宇宙万有引力定律也已呈现在数学界面前四十年了。在这些 140 领域的每一个中，大量孤立的问题都得到了解决，也零零星星地有了一些引人注目的在统一方面的尝试；但是还没有对整个数学，那时存在的纯数学和应用数学，开展系统的研究。特别是，笛卡儿、牛顿、和莱布尼兹的有力的分析方法，还没有被开发到它们当时所能达到的极限，在力学和几何学中尤其是如此。

在较低的水平上，代数和三角学那时处在需要系统化和扩展的状态；特别是三角学已接近完成。在费马的丢番图分析和普通完全整数的性质这个领域，这样的"一时的完备"是不可能的（甚至现在也不可能）；但是甚至在这样的领域中，欧拉也证明了他自己是个大师。事实上，欧拉在数学的两大主流——连续和离散这两方面都同样有力，这是他的多方面天才的最显著的特点之一。

欧拉作为一个算法学家从来没有人超过他，也许甚至从来没

有人能与他相当，或许雅可比应该除外。算法学家就是为解决特殊类型的问题设计"算法"的数学家。举一个很简单的例子，我们假设(或证明)每一个正实数都有一个真正的平方根，怎样计算这个根呢？有许多已知的方法，算法学家则设计实际可行的方法。或者再举一个例子，在丢番图分析、也在积分学中，一个问题的解答可能不是现成的，要用其它变量的函数做一些巧妙的(通常是简单的)代换；一个算法学家就是能自然地想到这种代换的数学家。想出代换的过程没有统一方法——算法学家就象机敏的打油诗人一样，是天生的，而不是造就的。

看不起"纯粹的算法学家"在今天是很流行的；然而，当一个象印度的罗摩拏阇那样的真正的数学家，从不知道什么地方突然冒出来的时候，就连分析专家们也都把他作为自天而降的天才向他欢呼：对于表面上无关的各种公式，他那几乎超自然的洞察力揭示了从一个领域通向另一个领域的隐秘的线索，这就为分析学者们提供了弄清这个线索的新任务。一个算法学家是一个"形式主义者"，他为这些公式的美丽而热爱这些美丽的公式。

在讲述到欧拉平静但是有趣的一生之前，我们必须提一下他那个时代的两个事实，它们促进了他的令人惊叹的活动，帮助给他的活动提供了一个方向。

141 在十八世纪，大学不是欧洲的主要研究中心。要不是由于注重古典文学的传统和这种传统对科学的可以理解的敌意，大学本来可以比实际上更快地成为主要研究中心。数学与古典传统距离较近，因而受到尊敬，但更近代的物理学则受到怀疑。而且，对当时大学的数学教授的要求是把主要精力放在初等数学上；他的研究，如果有的话，只是一种得不到好处的奢侈，恰如今天美国一般高等学院的情形。英国大学的学术协会会员们要是愿意的话，可

以作得非常好。不过，很少有人想做些什么，他们完成的(或未能完成的)工作都不能影响他们的生计。在这样疏忽或者公开的敌意下，要大学在科学方面起主导作用，是没有什么充分理由的，它们也确实没有起这个作用。

起主导作用的是由慷慨的或者目光远大的统治者们支持的各种各样的皇家科学院。对于普鲁士的腓特烈大帝和俄国的叶卡捷琳娜二世的开明和慷慨，数学应该感恩戴德。在科学史上的一个最活跃的时期，他们使数学得到整整一个世纪的发展。就欧拉来说，柏林和圣彼得堡对他的数学创造提供了很大的支持。创造活动的这两个中心，都受到莱布尼兹的无休止的野心的鼓舞，由莱布尼兹提出规划的科学院给欧拉提供了机会，使他成为从古到今最多产的数学家；所以，在某种意义上，欧拉是莱布尼兹的后代。

柏林科学院由于不动脑筋日渐衰落已有四十年之久，欧拉在腓特烈大帝的鼓励下使它重又恢复了活力；彼得大帝未能在有生之年按照莱布尼兹的规划组建起圣彼得堡科学院，他的后继者们坚定地把它创建了起来。

这些科学院与我们今天的一些科学院不同，今天一些科学院的主要职责是对从事有益工作取得成绩的成员给予奖励。那时的科学院是研究机构，付钱给它们的主要成员从事科学研究工作。而且薪俸和奖金足够一个人和他的全家过相当舒适的生活。欧拉一家一度不下十八个人；然而他得到的钱足够使他们大家都过得不错。作为对十八世纪一个院士生活的诱人之处的最后一笔，他的孩子们(如果还值得一提的话)可以保证在世界上有一个良好的立足点。　142

这把我们带到了对欧拉写出大量数学文章的第二个有支配力的影响。这些付了钱的统治者，除了抽象的文化以外，他们付钱自

然还想得到其它的东西。但是必须强调指出，一旦这些统治者们从他们的投资中得到了公道的回报，他们并不坚持要他们的受雇者把剩余时间也用在"生产性的"劳动上；欧拉、拉格朗日和其它一些院士们都能按照自己的意愿自由地工作。这些统治者们也没有施加任何明显的压力，以挤出一点儿国家能应用的直接的实际结果。十八世纪的那一代统治者们，比今天指导许多研究机构的人更聪明，他们只是偶尔提出他们急需些什么，让科学按自己的道路发展。他们似乎本能地感觉到，如果时而给出适当的暗示，所谓"纯"研究就会作为副产品抛出他们想要的实际东西。

对这个一般的说法有一个重要的例外，它既没有证明也没有否定这种状况。事情就是这样凑巧，在欧拉那时候，数学研究的突出问题，恰好也与那个时代的最实际的问题一致，这个问题就是对海洋的控制。航海技术超过所有对手的国家，不可避免地要统治海洋。但是航海，说到底，只不过是在离岸数百英里的大海中，精确地确定自己所在的位置，并且要做得比对手们都好，能够比他们航行得更快地到达海战的战场，这样对他们只有不利。就象大家都知道的，英国控制着大海。它能做到这一点，在很大程度上是由于在十八世纪它的航海家们完全能够实际应用天体力学中的数学研究。

这样的应用与欧拉有直接关系——如果我们可以稍稍预计一下的话。现代航海的奠基者当然是牛顿，虽然他本人从来没为这个问题伤过脑筋，并且从来没有(就目前所知似乎没有)踏上过一条船的甲板。在海上的位置是靠观察天体(在真正凭想象的航海中，有时包括木星的卫星)来确定的；牛顿的万有引力提出，如果需要的话，只要有足够的耐心，行星的位置和月相能够提前一个世纪计算出来。在那以后，那些希望统治海洋的人就让他们的计算者

们埋头于航海天文历，啃出未来位置图表。

在这样的实际计划中，月球提出了一个特别可恶的问题，即根据牛顿定律互相吸引的三体问题。当我们进入二十世纪时，这个问题还要多次出现，欧拉是为月球问题形成一个可计算解（"月球理论"）的第一人。所谓三体，是指月球、地球和太阳。关于这个问题，我们在这里能说的不多，我们将留待后几章再说，但是可以指出的是，这个问题是整个数学领域中最困难的问题之一。欧拉没有解决它，但是他的近似计算方法（今天已被更好的方法代替）是足够实际的，因而一个英国的计算者能够用他的方法为英国海军部计算出关于月相的图表。为此，这个计算者得到了五千英镑（在那时是一笔相当大的数目），欧拉因为这个方法得到了三百英镑的奖金。

莱奥纳昂·欧拉是保罗·欧拉和他的妻子玛格丽特·布律克的儿子，也许是瑞士产生的最伟大的科学家。他于1707年4月15日出生在巴塞尔，第二年他的父母带着他迁往雷恩附近的村子，他的父亲在那里成为加尔文教派的牧师。保罗·欧拉曾经是雅科布·伯努利的学生，他本人就是一个颇有造诣的数学家。这位父亲想让莱奥纳昂步他的后尘，接替他在乡村教堂的职位，但是幸而他犯了一个错误，教这孩子学了数学。

年轻的欧拉很早就知道他要干些什么，然而他恭敬地顺从了他的父亲，进了巴塞尔大学学习神学和希伯来语。他在数学上取得的明显进步引起了约翰·伯努利的注意。约翰·伯努利慷慨地每周给这个年轻人单独授课一次。欧拉为了尽可能少带问题去见老师，把一周的其余时间都用在准备下一次课上。不久，丹尼尔·伯努利和尼科拉斯·伯努利也注意到了他的勤奋和突出的才能，他们

成了欧拉的好朋友。

莱奥纳昂在1724年十七岁时取得了硕士学位，在这以前他被允许自由发展，但在这时他的父亲坚持要他放弃数学，把全部时间用在神学上。但是当伯努利们告诉他，他的儿子注定是一个伟大的数学家，而不是雷恩的牧师时，这位父亲让步了。虽然这个预言实现了，但是欧拉的早期宗教教育影响了他的一生，他从来没有放弃一丁点儿他的加尔文教派的信仰。确实，当他上了年纪时，他兜了一个大圈子又回到了他父亲的召唤，他带领全家作家庭祈祷，通常在结束时作一番讲道。

144

欧拉在十九岁时独立作出了他的第一项工作。据说这第一次努力的成果，揭露了欧拉后来的大部分工作的力量和弱点。巴黎科学院提出在船上装桅杆的问题作为1727年的授奖问题；欧拉的论文没有能赢得奖金，但是得到了荣誉提名。他后来十二次赢得这项奖金，弥补了这次损失。这项工作的力量在于它所包含的分析——技术性的数学；它的弱点是距实际太远，如果它还与实际有关的话。当我们记起关于并不存在的瑞士海军的传统笑话时，这个弱点就不足为奇了。欧拉可能曾在瑞士的湖上看到过一、两只小船，但他从来没有见过一艘大船。他因为让他的数学带走了他的实际意识而受到过批评，这些批评有时是公正的。对欧拉来说，物质世界只是数学的一种特殊情况，它本身几乎没有什么意思；要是这世界没有符合他的分析，那是世界出了毛病。

欧拉知道自己是个天生的数学家，便申请巴塞尔的教授职位。他没有得到这个职位，便继续学习，在圣彼得堡与丹尼尔·伯努利和尼科拉斯·伯努利会合的希望，使他振作了起来。他们慷慨地提议给欧拉在圣彼得堡谋一个职位，并且一直与他保持经常通信。

欧拉在他事业的这个阶段，似乎对他自己应该做些什么莫名

其妙地无所谓，只要是与科学有关的就行。当伯努利们的信上说到，在圣彼得堡科学院的医学部可能有一个空位子，欧拉在巴塞尔就一头扎进生理学，并听了医学讲座。但是甚至在这个领域，他也不能摆脱数学：耳朵的生理学使他联想到对声音的数学研究，这又扩展到对波的传播的另一项数学研究，等等——这项早期的研究，在欧拉一生中就象一棵树在恶梦中疯长那样不断扩大范围。

伯努利们是动作很快的人。欧拉在1727年收到了去圣彼得堡的邀请，名义上是作为科学院医学部的成员。这个科学院有一项聪明的规定，责成每一个外来成员带两个学生——实际上是需要训练的初学者。可怜的欧拉的喜悦很快就破灭了。就在他踏上俄国土地的那一天，开明的叶卡捷琳娜一世去世了。 145

叶卡捷琳娜在成为彼得大帝的妻子之前是他的情妇，她似乎是一个在许多方面都很开明的女人，正是她，在她仅仅两年的在位期间，实现了彼得建立科学院的愿望。叶卡捷琳娜去世后，在年幼的沙皇未成年期间，权力旁落到一个异常残忍的小集团手里(年幼的沙皇在开始自己的统治前就死了，也许这对他自己倒是幸运的事)。俄国的新统治者们把科学院看做可有可无的奢侈品，在令人焦急的几个月中，他们考虑着取消它，遣返所有的外国成员。这就是欧拉到达圣彼得堡时的局面。在混乱中，对他要担任的医学位置没人管了，欧拉在绝望中几乎要接受一个海军上尉的职务，后来他溜进了数学部。

在这以后情况变好了，欧拉也就安定下来专心工作。他埋头于工作之中达六年之久，这不全是因为他完全沉浸在数学中，部分原因是到处都有奸诈的告密者，他不敢过正常的社交生活。

1733年，丹尼尔·伯努利厌倦了令人生畏的俄国，回自由的瑞士去了。而欧拉，在二十六岁时踏上了科学院的主要数学位置。欧

拉觉得他终生都得呆在圣彼得堡了，他决定结婚，定居下来，随遇而安。他的夫人叫凯塞琳娜，是彼得大帝带回俄国的画师格塞尔的女儿。政治形势变得更恶劣了，欧拉比以往更强烈地渴望逃跑。但是随着一个又一个孩子的迅速到来，欧拉感到他被拴得比以前更紧了，于是在不停的工作中寻求慰藉。一些传记作者把欧拉的无与匹敌的多产归之于他在俄国的这第一次居留；应有的谨慎迫使他养成了一种牢不可破的勤奋的习惯。

欧拉是几个能在任何地方、任何条件下工作的大数学家中的一个。他非常喜欢孩子(他自己有十三个孩子，除了五个以外，其余的都在幼年时夭折)，他常常怀抱着一个婴儿写作他的论文，同时稍大一点的孩子们在他周围嬉戏着。他写作最困难的数学论文的那种轻松自如是令人难以置信的。

46

关于他的不断涌出的思想，有许多传说流传至今。有些无疑是夸大其词，但是据说在家人两次叫他吃饭的半小时左右的间隔中，他就能草就一篇数学文章。一篇文章一完成就放在不断增长的一堆文章的最上面，等着印刷工来取走。当科学院的学报需要材料时，印刷工就从这一堆文章的最上面拿走一摞。于是就出现了这样的情形，出版日期的先后经常与写作日期的先后相反。欧拉有一个习惯，为了阐明或扩展他已经做过的工作，他多次回到同一个题目上来，这种习惯更加剧了这种古怪的情形，以至有时候，关于某一个论题的一系列文章的出版顺序与写作顺序是颠倒的。

年幼的沙皇死后，安娜·伊万诺夫娜(彼得的侄女)在1730年成为女皇，就科学院而言，情形大大变好了。但是在安娜的情夫欧内斯特·若阿·德·比隆的间接统治下，俄国遭受了它历史上的一段最血腥的恐怖统治。欧拉不声不响地专心致志于他的工作，这样持续了十年之久。在这中间他遭到了他的第一次大不幸。他决心

赢得一项关于天文学问题的巴黎大奖，几个主要的数学家几个月以来都在要求解答这个问题。(由于同一个问题在与高斯有关的部分还要出现，我们不在这里叙述它。)欧拉用了三天时间就解决了这个问题。但是持续的努力引起了一场疾病，他因此失去了右眼的视力。

应该提到的是，现代考证已经表明，天文学问题无论如何对欧拉的眼睛失明没有责任。这种考证在使数学史上所有的奇闻轶事遭到怀疑方面起了很大作用。但是学究气的批评家们(或任何其它人)怎样会知道这么多关于所谓的因果律的东西呢，这个秘密得要大卫·休谟(欧拉的同代人)的在天之灵去解决了。尽管有这个告诫，我们还是再讲述一次欧拉与无神论的(或者也许只是泛神论的)法国哲学家德尼·狄德罗(1713—1784)的著名故事。这里我们稍稍偏离了编年史顺序，因为这件事发生在欧拉第二次居留俄国期间。

叶卡捷琳娜女皇邀请狄德罗访问她的宫廷，狄德罗试图通过使朝臣们改信无神论来表明他是值得被邀请的。叶卡捷琳娜厌烦了，她命令欧拉去让这个只会空谈的哲学家闭嘴。这倒容易，因为狄德罗对数学一无所知。德·摩根叙述了事情的经过(见他的经典著作《悖论汇编》，1872)："狄德罗被告知，一个有学问的数学家用代数证明了上帝的存在，要是他想听的话，这位数学家将当着所有朝臣的面给出这个证明。狄德罗高兴地同意了。……欧拉朝狄德罗走去，用一种非常肯定的语调一本正经地说：

"先生，$\frac{a+b^n}{n}=x$，因此上帝存在；回答！"

对狄德罗来说，这听起来好象有点道理。他困惑得不知道说什么好，周围的人报以纵声大笑，使这个可怜的人觉得受了羞辱，他

147

请求叶卡捷琳娜允许他立即返回法国。她神态自若地同意了。

欧拉不甘于这件杰作，他极为认真又极为热忱地用严肃认真的证明去画蛇添足，一本正经的去证明上帝存在和灵魂并非物质的实体。据传，这两个证明编进了他那个时代关于神学的专论。这些也许是他的天才在数学上不切实际一面的最精采的例子。

在欧拉留居俄国期间，仅仅数学还不足以占据他的全部精力。无论什么地方要求他把他的数学天才用到与纯数学相去不太远的方面，他总是给政府以值得他们付出的代价的东西。欧拉为俄国学校编写初等数学教科书，监督政府的地质部门，帮助改革度量衡，设计检验税率的有效方法；这些只是他的一部分活动。不论欧拉做多少额外的工作，他都继续倾吐出数学成果。

他在这个时期的一部最重要的著作，是1736年关于力学的论文。注意，发表的日期只差一年就是笛卡儿发表解析几何整整一个世纪。欧拉的论文对于力学就象笛卡儿的论著之于几何——把它从假设论证的羁绊中解放出来，并把它分析化。阿基米德有可能写出牛顿的«原理»；但是任何希腊人也不可能写出欧拉的力学。微积分学的全部力量第一次支配了力学，这门基础科学的现代纪元开始了。欧拉的朋友拉格朗日要在这个方面超过他，但是迈出决定性的一步的荣誉归于欧拉。

148

1740年安娜去世，俄国政府变得更为开明，但是欧拉已经厌倦了，他很高兴地接受了腓特烈大帝请他作柏林科学院院士的邀请。皇太后很喜欢欧拉，试着要逗引他谈话。但是她得到的只是冷淡的是或者不是。

“为什么你不愿意跟我说话呢？”她问。

“夫人，”欧拉回答，“我是从那样一个国家来的，在那里要是你

说话，你就会被吊死"。

他一生接下来的二十四年是在柏林度过的，但过得并不很愉快，因为腓特烈大帝不喜欢单纯的欧拉，宁愿要一个拍马屁的朝臣。虽然腓特烈感到促进数学的发展是他的责任，可他厌恶这门学科，因为他自己的数学很蹩脚。但是他很欣赏欧拉的才干，足以用它们来解决实际问题——造币，修水渠，开掘运河，制定年金制度，以及其它。

俄国从来没有完全放弃欧拉，甚至当他在柏林期间，也付给他部分薪俸。尽管欧拉要负担一大家人，但是他是富有的，除了在柏林的住宅以外，他还拥有在夏洛滕堡的一个农场。在1760年俄国人入侵，进犯勃兰登堡边境期间，欧拉的农庄遭到抢劫。俄国将军声称他"不是对科学作战"，给予欧拉大大多于实际损失的赔偿。当伊丽莎白女皇听说了欧拉的损失时，她除了丰厚地赔偿了他的损失外，又加上一笔数目可观的款项。

欧拉在腓特烈的朝廷里不受欢迎的原因之一是，他没有能力避开关于他一无所知的哲学问题的辩论。伏尔泰花了大量时间拍腓特烈的马屁，他和其他一些围着腓特烈转的善于咬文嚼字的家伙们，以用玄学的圈套缚住可怜的欧拉取乐。欧拉好脾气地忍耐了这一切，和其他人一起大声取笑着他自己的荒谬的错误。但是腓特烈渐渐生气了，他要物色一个更老于世故的哲学家来领导他的科学院和取悦他的朝廷。

达朗贝尔(我们将在后面谈到他)应邀来到柏林，审察这个局面。他和欧拉由于数学上的争论有过一点儿芥蒂，但是达朗贝尔不是一个让个人意气影响自己的判断的人，他梗直地告诉腓特烈，把任何其他数学家置于欧拉之上都是一种不当的行为。可这只是使腓特烈比以前更加顽固，更加生气，情况变得使欧拉难以忍受了。他

感到他的儿子在普鲁士不会有出路。五十九岁那一年(1766年),他在叶卡捷琳娜女皇的热情邀请下,再次打点起行装,迁回圣彼得堡。

叶卡捷琳娜以王室的规格接待这个数学家,拨给他和他的十八个家人一栋家具齐全的房子,并派她自己的一个厨子去管膳食。

正是在这个时期,欧拉开始失去他剩下的那只眼睛的视力(由于白内障),不久他就完全失明了。他的视力的不断恶化在拉格朗日、达朗贝尔和那时的其他主要数学家的通信中引起了惊讶和同情。欧拉本人却对迫近的失明处之泰然。毫无疑问,他强烈的宗教信仰帮助他面对了将要到来的一切。但是他并没有让自己"顺从"沉默和黑暗。他立即着手弥补这个不可弥补的损失。在完全失明以前,他已经使自己习惯于用粉笔把公式写在一块很大的石板上。然后,他的儿子(主要是阿尔贝)把它们抄下来,他再口述一些对公式的说明。他的数学生产率没有降低,反而提高了。

欧拉一生幸而具有非凡的记忆力。他能背诵维吉尔的《伊尼特》①,并且尽管他成年后很少看这本书,他总能说出在他那本书上的任何一页的第一行和最后一行。他既靠视觉记忆又靠听觉记忆。他还有惊人的心算的本领,不仅心算算术类型的问题,也心算高等代数和微积分学中要求的更困难的问题。他那个时代整个数学领域中的全部主要公式,都精确地贮藏在他的记忆中。

作为他记忆力的一个例子,孔多塞讲述了欧拉的两个学生怎样把一个复杂的收敛级数的和(对于变量的特殊值)计算到第十七项,只是在结果的第五十位数上有一个数不一致。为了确定哪一个结果是对的,欧拉用心算作出了全部运算;他的答案被证明是正确的。所有这些现在都在帮助他了,失明对他并不是太大的问题。

① 《伊尼特》(Aeneid),古罗马诗人维吉尔的著名史诗,共十二卷,约一万二千行。叙述特洛伊失陷后,王子伊尼斯的冒险事迹。——译者

但是即便如此，在他十七年失明期间，有一项功绩也几乎是令人难以置信的。月球理论——月球的运动，唯一曾使牛顿头痛的问题——在欧拉手里第一次被彻底征服了。全部复杂的分析都是他在心里做出来的。 150

欧拉回到圣彼得堡五年以后，另一次灾难降临到他的头上。在1771年的大火中，他的房子连同它里面的全部陈设都烧光了，只是靠了他的瑞士仆人(彼得·格里姆，或格里蒙)的勇敢举止，欧拉才逃脱性命。格里姆冒着生命危险把他的又瞎又病的主人从大火中带到了安全地带。图书馆也烧了，但是幸亏奥尔洛夫伯爵出力，欧拉的全部手稿都抢救了出来。叶卡捷琳娜女皇马上补偿了全部损失，欧拉很快又回到工作上了。

1776年(当他六十九岁时)欧拉蒙受了更大的损失，他的妻子死了。第二年他又结了婚。他的第二个妻子扎洛梅·阿比盖尔·格塞尔，是他前妻的同父异母的姊妹。他的最大的悲剧在于恢复左眼——唯一有点儿希望的眼睛——视力的手术失败了(也许是由于外科医师的粗心大意)。手术是"成功的"，欧拉高兴得无以复加。但是不久刀口感染了，在他形容为可怕的长期痛苦之后，他重又陷入黑暗。

回顾欧拉的巨大的工作量，我们可能在初看时会倾向于认为，任何有才能的人都能够几乎象欧拉那样轻松地做出其中的一大部分。但是仔细检查一下今天存在的数学，很快就会纠正我们的错误想法。因为当我们考虑到现在我们掌握的各种方法的力量，数学及其丛林般的理论的目前状况，并不比欧拉面对的状况更复杂。数学渴望着第二个欧拉。他在他那个时代，系统化并统一了乱堆着不完全的结果和孤立的定理的广阔领域，用他那分析方法的挥

洒自如的力量清理了基础，把有价值的东西收集在一起。甚至今天在大学数学课程中学习的许多东西，实际上也处在欧拉留下的状态——例如，从一般的二次方程的统一观点，讨论在三维空间中的圆锥截线和二次曲面，就是欧拉的。再有，年金问题及由它产生的一切(保险、养老金，等等)，也是由欧拉整顿成现在学习“投资的数学理论”的学生们熟悉的状况的。

欧拉作为一个通过他的著作与学生见面的教师，取得了伟大而直接的成功，正如阿拉哥指出的，他成功的原因之一是他绝不妄自尊大。如果需要一些相对来说真正价值较低的著作，来澄清较早的和给人以更深刻印象的著作，欧拉就毫不犹豫地把它们写出来。他不害怕降低他的名声。

151

甚至在创造方面，欧拉也把教授与发现结合在一起。他在1748年、1755年和1768—1770年所著关于微积分学的伟大论著(《无穷小分析引论》，《微分学原理》，《积分学原理》)，立即就成了经典著作，并且在四分之三个世纪中，继续鼓舞着想要成为大数学家的年轻人。但是，正是在他的关于变分法的著作(《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》，1744年出版)中，欧拉第一次显示出他自己是第一流的数学家。这个题目的重要性已经在前面几章中指出过了。

当欧拉把力学分析化时，他向前迈出的伟大的一步已经陈述过了；我们只引证这个进展的一个细节，即学习刚体力学的学生们都熟悉欧拉对转动的分析。分析力学是纯数学的一个分支，因而欧拉在此处并不象他在其它一些偏于实际的工作中那样，一有机会就想要越出常轨，跑出纯计算的无垠的领域。欧拉的同代人对他的工作最严厉的批评是，他只为美妙的分析而计算的抑制不住的冲动。他有时可能对他试图转化成计算的物理情形缺乏充分的

了解，不知道它们是怎么回事。不过，今天用在流体力学中的流体运动的基本方程是欧拉的。当实际问题值得他费神时，他是能够很实际的。

欧拉的分析的一个特点，必须在这里顺便提一下，因为十九世纪数学的一个主要趋势与它有很大关系。这就是他认识到，除非一个无穷级数是收敛的，否则使用它是不可靠的。例如，通过长除法我们发现

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\cdots\cdots$$

级数无限地继续下去。这里让 $x=\frac{1}{2}$，那么：

$$\begin{aligned}-2&=2+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots\\&=2+4+8+16+\cdots\cdots。\end{aligned}$$

对收敛的研究（将在高斯那一章中讨论）给我们揭示了如何避免象这样荒唐的事情。（也见柯西那一章。）奇怪的是，尽管欧拉了解到了处理无限过程必须慎重行事，他在他自己的许多工作中却没有遵守这条规则。他对分析的信心是如此之大，以至他有时候会找出一个荒谬的“解释”，来使一件显然荒唐的事情站得住脚。 152

但是这一切都说过以后，我们还必须补充，就欧拉作出的具有头等重要意义的正确而新奇的大多数工作而言，很少有人能与他匹敌或接近他的成就。那些喜欢算术——也许不是一个很“重要”的科目——的人会提议在丢番图分析中，给欧拉一个与费马和丢番图本人佩戴的同样大小、同等鲜艳的荣誉勋章。欧拉是数学通才中的第一个，也许是最伟大的一个。

他不仅只是一个狭隘的数学家：在文学和科学的各个方面，包括生物学方面，他至少是知识渊博的。但是即使在他欣赏《伊尼特》的时候，他也禁不住会看出一个要他的数学天才去解决的问题。

“锚抛下去，飞驰的船停住了”。这句诗使他着手研究船在这种情况下的运动。他的无所不在的好奇心一度甚至吞下了占星术，但是他表明了他并没有消化占星术，在1740年当他被命令以占星术给伊万王子算命时，他有礼貌地拒绝了，指出算命属于宫廷天文学家的职权范围。可怜的天文学家不得不去做这件事。

欧拉在柏林期间的一项工作表明，他是一个文笔优雅（虽然多少有点过于虔诚）的作家，这就是脍炙人口的《致一位德国公主的信》，这是为了给腓特烈的侄女安哈尔特-德苏公主讲授关于力学、物理光学、天文学、声学等课程而写的。这些著名的信极受欢迎，汇集成书后以七种文字广为流传。公众对科学的兴趣并不象我们有时喜欢想象的那样，是最近才发展起来的。

欧拉直到他临终的那一刻仍然神志清醒、思想敏捷，他享年七十七岁，于1783年9月18日去世。那天下午他以计算气球上升的规律消遣——象通常一样，在他的石板上计算，然后他和莱克塞尔及家人一起吃晚饭。“赫谢耳的①的行星”（天王星）是新近发现的，欧拉略述了对它的轨道的计算。过了一会儿，他让把他的孙子带进来。在与孩子玩和喝茶的时候，欧拉突然中风。烟斗从他的手里掉了下来，他说了一句“我死了，”“欧拉终止了生命和计算。”②

① 赫谢尔(Herschel, 1738—1822)，英国天文学家，天王星的发现者。——译者

② 引文出自康多塞的《赞美辞》。



第十章　一座高耸的金字塔

拉　格　朗　日

我不知道。

——J.L. 拉格朗日

“拉格朗日是数学科学高耸的金字塔。”这是拿破仑·波拿巴对十八世纪最伟大、最谦虚的数学家约瑟夫-路易·拉格朗日(1736—1813)经过斟酌的评价，拿破仑让拉格朗日当上了参议员，帝国伯爵，并授予他荣誉军团二级勋章。撒丁岛的国王和腓特烈大帝也给过拉格朗日荣誉，但是没有称帝的拿破仑那样慷慨。

拉格朗日身上混合着法国和意大利的血统，法国血统居多。他的祖父是一个法国骑兵队的队长，曾经为撒丁岛的国王查理·伊曼

努尔二世服务，他在都灵定居下来以后，与著名的孔蒂家族联姻。拉格朗日的父亲一度任撒丁岛的陆军部司库，他与坎比亚诺一个富有的医生的独生女玛丽-泰雷斯·格罗斯结婚，并和她生了十一个孩子。在这许多子女中，只有最小的约瑟夫·路易，出生于1736年1月25日，没有在襁褓中夭折。这位父亲是富有的，这是靠了他自己和妻子双方的继承权。但是他也是一个不可救药的投机者，到他的儿子准备继承家产的时候，已经没有什么好继承的了。拉格朗日后来把这个灾难看做是在他身上发生的最幸运的事："要是我继承了一笔财产，我也许就不会与数学共命运了。"

拉格朗日上学以后，最初的兴趣是在古典文学，他对数学产生热情多少有点儿出自偶然。与他学习古典文学一致，他最早熟悉的是欧几里得和阿基米德的几何著作。这些似乎并没有给他留下多少印象。后来，哈雷(牛顿的朋友)写的一篇称赞微积分学比希腊人的综合几何方法优越的文章，落到了年轻的拉格朗日手里。他被迷住了，改变了。在短得令人难以置信的时间内，他就完全靠自学掌握了他那时的现代分析。十六岁时(根据达朗贝尔的看法，时间可能不太准确)，拉格朗日成了在都灵的皇家炮兵学院的数学教授。然后开始了数学史上最光辉的经历之一。

154

拉格朗日从一开始就是一个分析学者，他从来也不是几何学者。在他身上，我们看到了在数学研究中几乎要成为必需的那种专门化的第一个突出的例子。拉格朗日对分析学的偏爱在他的杰作«Mécanique analytique»(分析力学)中强烈地表现了出来，这部杰作是他作为一个十九岁的少年在都灵设想出来的，但是只是到了1788年他五十二岁时才在巴黎出版。他在前言中说："这本书中找不到图。"但是他怀着对几何学的神明半幽默的祭奠说，力学科学可以被看成四维空间的几何——三个笛卡儿直角坐标以

及一个时间坐标，就足以确定一个运动的粒子在空间和时间中的位置。这种看待力学的方式，自从1915年爱因斯坦把它用于他的广义相对论以来，已经非常流行了。

拉格朗日用分析解决力学问题，标志着与希腊传统的第一次彻底决裂。牛顿、他的同代人、以及他的直接后继者们，发现图形对他们研究力学问题很有帮助；拉格朗日表明，如果从一开始就采用一般的分析方法，那就可以达到更大的灵活性和大得无法比拟的力量。

这个孩子气的教授在都灵给年纪都比他大的学生上课。不久他把比较有能力的人组织起来，成立一个研究学会，这个学会后来发展成为都灵科学院。科学院的第一卷论文集于1759年出版，当时拉格朗日二十三岁。人们通常认为，朴实而谦虚的拉格朗日，承担了由其他人发表的这些早期著作中大部分优秀的数学论文。丰塞纳的一篇文章非常出色，以至撒丁岛的国王让这个被认为是作者的人主管海军部。数学史学家们有时候感到奇怪，为什么丰塞纳再也没有达到他第一次在数学上取得成功的水平。

拉格朗日本人也提交了一篇关于极大和极小(在第四章和第八章中叙述过的变分法)的论文，他在这篇论文中允诺要在一项工作中讨论这样一个题目，他要从中推出包括固体力学和流体力学在内的全部力学。因此，拉格朗日在二十三岁时——实际上还要早些——就设想了他的杰作《分析力学》，它对于一般力学的作用就象牛顿的宇宙万有引力定律之于天体力学。在十年后写给法国数学家达朗贝尔(1717—1783)的信中，拉格朗日说他认为他自己的早期工作，他在十九岁时想出来的变分法，是他的杰作。正是利用这个变分法，拉格朗日统一了力学，而且如哈密顿所说，把它处理成“一种科学的诗。”

一旦懂了拉格朗日的方法，它几乎就是平淡无奇的了。正如一些人说过的那样，统治着力学的拉格朗日方程，是所有科学中从无价值的东西中得出有价值的东西的技巧的最好例子。但是如果我们细想一下，我们就会明白，任何一个一般到了能把整整一个领域中的现象统一起来的科学原理，必定是简单的：只有一个最为简单的原理能够统治大量各种各样的问题，这些问题甚至在仔细观察下也显得是单个的和孤立的。

在都灵论文集的同一卷中，拉格朗日向前迈出了另外一大步：他把微分学应用到概率论。看来这些对这个二十三岁的年轻巨人还不够多，他在声音的数学理论方面彻底超出了牛顿，他通过考虑沿着直线逐点传播的冲击下，直线上所有空气粒子的行为，把这一理论置于弹性粒子的力学系统(而不是流体力学)的支配下。在同样的总的方面，他还解决了一个在主要数学家之间争吵了许多年的莫衷一是的问题，这场争论是关于振动弦的正确的数学公式表示——整个振动理论中的一个极为重要的问题。拉格朗日在二十三岁时就被公认为与那个时代最伟大的数学家——欧拉和伯努利们——并驾齐驱。

欧拉总是非常宽大地欣赏他人的工作。他对待他的年轻的竞争者拉格朗日的态度，是科学史上无私的一个最美好的例子。

拉格朗日十九岁时把自己的一些著作送给欧拉，这位著名的数学家立刻看出了它们的价值，他鼓励这个才气焕发的年轻的初学者继续做下去。当四年后，拉格朗日写信把解决等周问题(变分法，在伯努利家族那一章中描述过)的真正方法告诉欧拉时，欧拉写信给这个年轻人，说新方法使他得以克服他的困难，因为在这以前，欧拉使用他的半几何的方法，困惑了多年未能解决这个问题。欧拉没有立刻发表他寻求已久的解答，一直等到拉格朗日能够先

发表他的解答，"这是为了不剥夺应该归于你的光荣。"

不管在私人信件上怎样奉承，对拉格朗日也不能有什么帮助。欧拉认识到这一点，在发表他的著作(在拉格朗日的著作发表之后)时，就故意说他是怎样被困难挡住了，在拉格朗日指出克服困难的途径之前，它们是难以越过的障碍。最后，欧拉使拉格朗日在二十三岁这个不寻常的年轻年龄，当选为柏林科学院的外籍院士(1759年10月2日)，使拉格朗日的地位得以确定。国外的这个正式承认，给拉格朗日在国内以很大帮助。欧拉和达朗贝尔计划要拉格朗日到柏林去。这部分是出于他们个人的缘故，他们很想看到他们这位才华出众的年轻朋友，作为宫廷数学家在柏林就职。经过长时间的磋商，他们成功了，腓特烈大帝在这件事情的整个谈判中稍微上了点当，不过他仍旧象孩子般地(但是无可非议地)高兴。

必须顺便提一下达朗贝尔，他是拉格朗日的忠实朋友和慷慨的钦佩者。即便只是为了他性格的一个方面，与势利的拉普拉斯(我们将在后面谈到他)的令人愉快的对比，也该提一提他。

让·勒隆德·达朗贝尔得名于紧靠巴黎圣母院的圣让·勒隆德小教堂。达朗贝尔是谢瓦利埃·法图什的私生子，被他的母亲遗弃在圣让·勒隆德教堂的台阶上。教区的负责人把这个弃儿交给了一个贫穷的装玻璃工的妻子，她把这孩子当作自己的孩子抚养。根据法律，谢瓦利埃被迫出钱供他的私生子受教育。达朗贝尔的亲生母亲知道他在那里，当这孩子开始露出天才的迹象时，她派人去找他，希望能说服他回到自己身边。

"你只是我的后母，"这孩子告诉她(在英语中这是一句很好的双关语，但在法语中不是)，"装玻璃工人的妻子才是我真正的母亲。"他就这样抛弃了他自己的亲骨肉，就象她曾经抛弃了她的亲

骨肉一样。

157 当达朗贝尔在法国科学界出了名，成了大人物时，他报答了装玻璃工和他的妻子，使他们不致于生活困难(他们愿意继续住在他们简陋的寓所里)，他总是很骄傲地说他们是他的双亲。虽然我们不会有篇幅把他和拉格朗日分开考虑，可是必须提到，达朗贝尔是第一个给悬而未决的岁差问题以完整解答的人。他最重要的纯数学工作是在偏微分方程中，特别是与弦振动有关。

达朗贝尔鼓励他谦虚的年轻通信者去解决困难而重要的问题。他也承担起让拉格朗日适当注意自己的健康的义务——他自己身体不好。事实上，拉格朗日在十六岁到二十六岁期间的过度用功已影响了他的消化，他在这以后终生被迫使自己严格遵守纪律，特别是在过度工作方面。达朗贝尔在他的一封信中，训斥这个年轻人用茶和咔啡提神；在另一封信中，他悲伤地让拉格朗日注意一本新出版的关于学者的疾病的书。对所有这些来信，拉格朗日总是不在意地回答他感觉很好，正象疯子一样工作。但是最后他付出了代价。

拉格朗日的经历在一个方面与牛顿的经历非常奇特地相似。到中年的时候，持续专注于头等重要的问题，使拉格朗日的热情锐减了，虽然他的头脑仍象以前一样强有力，他开始对数学冷淡起来。他在刚刚四十岁时，便写信给达朗贝尔："我开始感到我的迟钝的拉力一点儿一点儿的在增加，我不能说从现在起我还能再干十年数学。而且我还觉得矿井已经太深了，除非发现了新矿脉，否则就不得不抛弃它了。"

当拉格朗日写这封信时，他生着病而且很忧郁。然而就他来说，这封信表达了真实的情况。达朗贝尔的最后一封信(1783 年 9 月)是在他去世前一个月写的，他在信中把他早期的忠告颠倒了过

来，劝告拉格朗日以工作作为对他心理上的疾病的唯一治疗："看在上帝的面上，不要放弃工作，工作对于你是一切消遣中最有效的消遣。再见吧，也许这是最后一次了。多少记住这个在世界上最爱护你，最尊敬你的人吧。"

对数学来说幸运的是，拉格朗日最糟糕的沮丧以及它那不可避免的推论：没有哪一种人类知识是值得为之奋斗的，出现在自从达朗贝尔和欧拉设法把他弄到柏林来，经过辉煌的二十年之后。拉格朗日在去柏林以前考虑和解决的大问题中，有月球的天平动问题。为什么月球总以同一面向着地球——在一些能够说明原因的微小不规则的范围内？需要从牛顿的万有引力规律推导出这一事实。这个问题是著名的"三体问题"——这里是地球、太阳和月球——的一个例子，这三个天体根据它们重心之间距离的平方反比规律互相吸引。（当我们讲到庞加来时，还要再谈这个问题。）

由于对天平动问题的解答，拉格朗日获得了1764年法国科学院的大奖——那时他只有二十八岁。

在这个辉煌胜利的鼓舞下，科学院又提出了一个更困难的问题，拉格朗日解决了它，在1766年再次获得大奖。在拉格朗日那时，只发现了木星的四个卫星。这样，木星体系（它本身、太阳和它的卫星）构成了一个六体问题。要找到一个适宜于实际计算的完整的数学解答，甚至在今天（1936年）也不是我们力所能及的。但是通过应用近似方法，拉格朗日在解释所观察到的均差方面取得了值得注意的进展。这样应用牛顿理论是拉格朗日整个活跃的一生的主要兴趣之一。1772年，他由于三体问题的论文再次获得巴黎大奖，1774年和1778年，他关于月球运动和彗星摄动的论文取得了同样的成功。

这些惊人成就中较早的一项成就，促使撒丁岛的国王负担起

了1766年拉格朗日去巴黎和伦敦的旅费。拉格朗日这时是三十岁。按照计划，他应该陪同撒丁岛驻英国公使卡拉乔利去英国，但是到达巴黎后，拉格朗日危险地病倒了——这是用丰富的意大利菜肴欢迎他的过于丰盛的宴会的结果——他被迫留在巴黎。在巴黎期间，他和知识界所有知名人士见了面，其中也包括后来被证明是没有价值的朋友玛丽神父。这个宴会打消了拉格朗日想住在巴黎的念头，他一能旅行，马上就急切地返回都灵。

159 最后，在1766年11月6日，拉格朗日三十岁时，腓特烈这位“欧洲最伟大的国王”——他就这样谦逊地称呼他自己——欢迎他去柏林，腓特烈会因为在他的宫廷中有“最伟大的数学家”而感到荣幸。至少最后一点是事实。拉格朗日成了柏林科学院物理-数学部主任，以后的二十年里，科学院的学报中充满了他的一篇接着一篇的伟大论文。他没有被要求授课。

一开始，这位年轻的主任发现他自己处于一种多少有些微妙的地位。德国人对于把外国人置于他们之上很自然地感到愤慨，他们有意以近乎冷冰冰的礼貌对待腓特烈引进的外国人。事实上他们常常是十分无礼的。但是拉格朗日不仅是一个第一流的数学家，他还是一个善于体谅人的、有礼貌的人，具有知道什么时候应该保持缄默的罕见的才能。在写给可以信赖的朋友的信中，他可以非常坦率，甚至在谈到耶稣会会士时也是如此，他和达朗贝尔似乎都不喜欢耶稣会会士，在写给各学术协会的关于其他人的研究工作的正式报告中，他是相当直率的。但是在他的社交接触中，他留心自己的言行举止，避免冒犯他人，甚至在有正当理由的情况下也不冒犯别人。在他的同事们习惯了他的存在以前，他一直不介入他们的事情。

拉格朗日不喜欢争论的天性，对他在柏林期间很有帮助。欧

拉冒失地从一个宗教的或哲学的争论闯进另一个争论；拉格朗日在受到紧逼和压力时，总是以他诚恳的惯用的话“我不知道”开始他的回答。但是当他自己坚信的东西受到攻击时，他知道怎样进行猛烈而合理的防御。

欧拉对他一无所知的哲学问题的饶舌，有时惹恼了腓特烈，拉格朗日大体上是倾向于同情腓特烈的。他写信给达朗贝尔说：“我们的朋友欧拉是一个伟大的数学家，但是一个很糟糕的哲学家。”另外一次，他在说到欧拉在著名的《致一位德国公主的信》中流露出虔诚的道德说教时，给这些信起了个绰号，叫做正统的“欧拉对《启示录》的注释”——附带着间接暗示牛顿在对自然哲学失去兴趣时让自己流于轻率。“这是难以置信的，”拉格朗日谈到欧拉时说，“他在形而上学方面竟会这样平庸幼稚”。他又说到他自己，“我对争论极其反感。”当他确实在他的信中进行哲理探讨时，那是用了一种在他发表的著作中完全没有的、出人意料的讥诮语气，正如他说，“我总是注意到，人们对自己的估价与他们的价值恰恰成反比；这是伦理学的公理之一。”在宗教问题上，如果说拉格朗日还有什么信仰的话，他是个不可知论者。 160

腓特烈对于拉格朗日得奖感到很高兴，和他一起友好地度过了好几个小时，并且详细说明有规律的生活的好处。拉格朗日与欧拉的对比，使腓特烈感到特别高兴。这位国王已经被欧拉过于明显的恭顺和缺乏宫廷世故惹恼了。他甚至到了称可怜的欧拉为“一个丑陋的独眼数学家”的地步，因为欧拉那时只有一只眼睛失明。腓特烈对达朗贝尔用散文和诗句抒发他的感谢之情。“全靠你的费心和你的推荐，”他写道，“我得以在我的科学院中由一个有两只眼睛的数学家代替了一个只有一只眼睛的数学家；这对于解剖学都是特别令人高兴的。”除了象这样的俏皮话以外，腓特烈并不是一

个坏人。

拉格朗日在柏林安顿下来不久，就派人去都灵把他的一个年轻的女亲戚接来，并同她结了婚。关于这件事是怎样发生的，有两种说法。一种说法是，拉格朗日曾和这个姑娘以及她的双亲住在同一栋房子里，他对她买东西发生了兴趣。拉格朗日谨慎的天性中有一种节俭的倾向，他认为这姑娘奢侈，感到生气，就亲自为她买了缎带。从那以后，他就被迫必须与她结婚了。

另一种说法可以从拉格朗日的一封信中推测出来——这封信肯定是一个被认为溺爱的年轻丈夫所曾表露出的冷漠的最奇怪的自白。达朗贝尔开他朋友的玩笑："我明白你已经采取了我们哲学家所说的致命的断然行动……。一个大数学家首先应该知道怎样计算他的幸福，那么我不怀疑，在完成了这个计算之后，你在婚姻中找到了解答。"

拉格朗日要末是把这看得极为认真，要末是以他自己的玩笑来对付达朗贝尔——并且成功了。达朗贝尔对于拉格朗日在信中没有提到他结婚表示吃惊。

"我不知道我是计算错了还是对了，"拉格朗日回答说，"或者说得更确切些，我根本不认为我曾经计算过；因为我本来可以象莱布尼兹那样做，他虽然不得不仔细考虑，可从来没有下过决心。我向你承认，我从来不喜欢结婚，……但是环境决定我得找一个年轻的女亲戚照顾我和我的全部事务。如果说我忘记了通知你，那是因为在我看来这整个事情本身就没有什么意思，不值得费事去通知你。"

161

当妻子因为疾病缠身而衰弱下去时，事实证明这件婚姻原来对双方都很幸福。拉格朗日放弃睡眠，亲自照顾她，她死时他悲痛

欲绝。

他在工作中寻找安慰。“我的事情减少到只是从事数学工作，安静和沉默。”然后他告诉达朗贝尔使得他所有的工作圆满的秘密，这是他急躁的后继者们望尘莫及的。“由于我不是被迫的，我工作更多是为了消遣，而不是出于责任，我就象那些盖房子的大贵族：我盖了拆，拆了盖，直到我对自己的结果还算满意为止，而这是极少发生的。”另外一次，在抱怨过度工作引起生病之后，他说休息对他来说是不可能的："我有一个坏习惯，总要几次重写我的论文，直到我感到满意为止，这个习惯也使我不可能停下来休息。”

拉格朗日在柏林的二十年期间，他的主要努力并不都是在从事天体力学和推敲他的杰作。有一个枝节问题——涉及费马的领域——特别有趣，因为它可以指出算术中一些看来简单的事情所固有的困难。我们看到，甚至伟大的拉格朗日也为了他的算术研究使他意想不到地费力而困惑不解。

在1768年8月15日，他写信给达朗贝尔，“最近几天我一直在用一些算术问题来使我的研究有点变化，我向你保证，我发现的困难比我预期的多得多。例如，这就是我费了很大力气才得出解答的一个问题。已知任一不是平方数的正整数 n，求一个整数的平方 x^2，使 nx^2+1 是一个平方数。这个问题在方幂理论［今天的**二次型**，将在高斯那一章叙述］中具有很大的重要性，而［方幂］在丢番图分析中是主要的研究对象。另外，我这一次发现了一些美妙的算术定理，如果你想知道，我在下一次信上告诉你。”

拉格朗日论述的问题有一个可以追溯到阿基米德和印度人的漫长历史。拉格朗日使 nx^2+1 成为一个方幂的第一流的论文，是数论中的一件划时期的事情。他也是首先证出了费马和约翰·威尔逊(1741—1793)的一些定理的人，威尔逊曾经说过，如果 p 是任　162

意的素数，那么如果把 1, 2, ……直到 $p-1$ 这些数都乘起来，再给积数加 1，那么得数可以被 p 除。如果 p 不是素数，类似的结果就不对了。例如，如果 $p=5$，$1\times2\times3\times4+1=25$。这可以用初等推理证明，是另一道高级算术智力测验题①。

达朗贝尔在回信中说，他相信丢番图分析可以被用在积分学中，但是他没有详细说明。最奇怪的是，在十九世纪七十年代，俄国数学家 G. 佐洛塔廖夫实现了这一预言。

拉普拉斯也有一段时间对算术感兴趣，他告诉拉格朗日，费马的那些未证明的定理的存在，既是法国数学的一项最大的光荣，也是它最明显的污点，抹去这个污点是法国数学家的责任。但是他预见到了要碰到极大的困难。在他看来，麻烦的根源在于，还没有能够解决离散问题（那些最终处理 1, 2, 3, ……的问题）的一般工具，就象对于连续问题的微积分学那样的工具。达朗贝尔也谈到了算术，说他发现它"比初看上去要困难些。"象拉格朗日和他的朋友们这样的数学家们的这些经验，可能暗示着算术真是很困难的。

拉格朗日的另一封信（1769 年 2 月 28 日）记述了这件事的结果。"我谈到过的问题让我花了比我预想的要多得多的时间；但是最后我很高兴地结束了，我相信我实际上已经完全解决了两个未知数的二阶不定方程的问题。"他在这里是太乐观了；高斯还没有发言——他的父母还要七年时间才能相遇。在高斯出生前两年（1777 年），拉格朗日以一种悲观的语气回顾他的工作："算术研究

163 是让我最费脑筋的，也许是最没有价值的研究。"

当拉格朗日心情好的时候，他极少错误地估价他的工作的"重

① 这里引证一位西班牙绅士的可笑的"证明"是非常有趣的。$1\times2\times\cdots\cdots\times n$ 的习惯的缩写记号是 $n!$。现在 $p-1+1=p$ 可以被 p 除，加上感叹号：$(p-1)!+1!=p!$。右边又可以被 p 除；因此 $(p-1)!+1$ 可以被 p 整除。不幸的是，即便 p 不是一个素数，这个证明也同样成立。

要性”。他在1777年写信给拉普拉斯，“我总是把数学看作消遣的对象，而不是野心的对象，我向你保证，我欣赏他人的工作更甚于我自己的工作，我总是不满意自己的工作。由此你就会看到，要是你由于你的成功而免除了嫉妒，我由于自己的性格也是这样的。”这是对拉普拉斯的一个有几分傲慢的声明的答复，拉普拉斯宣称，他从事数学工作只是为了要满足他自己超群的好奇心，丝毫不在乎“民众”的称赞——在他的情况下，这种称赞在一定程度上不过是胡言乱语。

1782年9月15日的一封写给拉普拉斯的信，具有很大的历史意义，因为它宣告了《分析力学》的完成：“我差不多已经完成了一部分析力学论，它完全以一篇附带论文的第一节中的原理和公式为基础；但是因为我不知道我什么时候或在什么地方能把它印出来，我不急于完成最后的润色。”

勒让德承担了这部著作出版前的编辑工作，拉格朗日的老朋友玛丽神父最后说服了一个巴黎出版商以名誉来冒一次风险。只是在这位神父同意在一定的日期之后买下所有未卖出的存书时，这个精明的家伙才同意出版这部书。直到1788年，拉格朗日已经离开了柏林以后，书才出版。书送到他手里时，他已经变得对一切科学和一切数学都很淡漠了，他甚至没有劳神去打开这本书。尽管他那时知道，印刷商可能已经把它搞得不知所云，他也并不在乎。

拉格朗日在柏林期间的一项研究，对于现代代数的发展具有最高度的重要性，这就是1767年的论文《关于数值方程的解》以及附带关于方程的代数可解性的一般问题的讨论。也许拉格朗日在方程的理论和解答方面的研究最重要的是，它们对十九世纪初主要代数学家们的启迪。我们多次看到，那些最终解决

了一个使代数学家们困惑了三个世纪或更长时间的问题的人，回到拉格朗日的工作中去寻求想法和灵感。拉格朗日本人并没有解决主要困难——为一个已知方程的代数可解性确定充分必要的条件，但是在他的工作中能够找到解答的萌芽。

164

由于这个问题是整个代数中那些能够简明叙述的主要东西中的一个，我们不妨顺便提一提它。它将在十九世纪的一些大数学家——柯西、阿贝耳、伽罗瓦、埃尔米特、克罗内克以及其他一些人——的工作中多次再现。

首先应该强调指出，解数字系数的方程不存在任何困难。如果方程是高阶的，比如说

$$3x^{101}-17.3x^{70}+x-11=0$$

那么工作量可能非常大，但有许多已知的简单方法，可求出这一数字方程的根，达到任何指定的精确度。这样的方法有些是中学代数课程的一部分。但在拉格朗日时代，提出解数字方程达到指定精确度的统一方法，却非易事——如果有的话。拉格朗日提出了一个这样的方法。它在理论上符合要求，但很不实用。今天碰到数字方程的任何一个工程师，都不会想到去用拉格朗日的方法。

当我们寻找一个有着文字系数（比如说 $ax^2+bx+c=0$，或 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，等等）的、高于三次的方程的代数解时，真正重要的问题就出现了。所要求的是用已知的 a、b、c、……表达未知数 x 的一组公式，使得当把这些 x 的表达式中的任意一个代入方程的左边时，那一边就化为零。对于一个 n 阶方程，未知量 x 恰好有 n 个值。这样，对于上边的二次方程，

$$\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac}),\ \frac{1}{2a}+(-b-\sqrt{b^2-4ac})$$

就是两个值，用它们来代替 x 就使 ax^2+bx+c 化为零。在任何情

形，所需要的 x 的值都只经过有限次的加、减、乘、除和开根以 a、b、c、……表示出来。这就是问题。它可解吗？可解的答案在拉格朗日死后约二十年才得出，但其思路很易在拉格朗日的工作中找到。

作为通向一个广泛理论的第一步，拉格朗日详尽地研究了他的前辈们就前四次一般性方程给出的所有解答，并且成功地表明，据以得出那些解答的所有技巧都可以用一种统一的程序来代替。这个一般方法的一个细节就包含了所提到的思路。假定我们有一个包括字母 a、b、c、……的代数表示：如果在它里面的字母以所有可能的方式进行交换，那我们从这个假定的表示中能够得出多少种不同的表示呢？例如，在 $ab+cd$ 中交换 b 和 d，我们得到了 $ad+cb$。这个问题隐含着另一个与它密切相关的问题，也是拉格朗日正在寻找的思路的一部分。怎样交换字母可以保持假定的表示不变（不改动）呢？这样，交换 a 和 b，$ab+cd$ 就变成了 $ba+cd$，由于 $ab=ba$，它们是一致的。有限群的理论就从这些问题中产生出来，人们发现它是打开代数可解性问题的钥匙。当我们讲到柯西和伽罗瓦时，它还会再现。

在拉格朗日的研究中还出现了另一个重要事实。在解 2、3、4 次一般代数方程时，解答依赖于另一个比所讨论的方程次数低的方程的解。这个事实是很美妙而且统一的，对于 2、3、4 次的方程成立，但是当试图把完全相似的方法用到 5 次方程

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

时，预解方程不是低于 5 次的，而是变成 6 次的了。这样，一个更难解的方程代替了已知的方程。对 2、3、4 运用的方法对 5 就不适用了，道路被堵死了，除非有某种方法绕过棘手的 6。事实上，我们会看出没有避开困难的方法。我们还不如试试用欧几里得的方法化圆为方，或者三等分一个角。

在腓特烈大帝去世(1786年8月17日)后，对非普鲁士人的憎恨和对科学的冷淡，使得拉格朗日和他在科学院中的外国同事无法在柏林呆下去了，他请求辞职。他得到了许可，条件是他在若干年内继续把他的论文寄给科学院的学报，拉格朗日同意了这个条件。他很高兴地接受了路易十六的邀请，作为法国科学院的成员在巴黎继续他的数学工作。当他在1787年到达巴黎时，他受到了王室和科学院最大的尊敬。在卢浮宫给他安排了舒适的寓所，他在那里一直住到大革命时期，他成了玛丽·安托瓦内特——那时离她上断头台①还有六年——特别宠信的人。玛丽大约比拉格朗日年轻十九岁，但她似乎理解他，尽她所能地减轻压倒他的消沉。

拉格朗日在五十一岁时感到他已经完结了。这是长时期连续过度工作造成的神经衰弱的明显症状。巴黎人发现他在谈话中温和而有礼貌，而且从不争先。他说得很少，显得心不在焉，非常忧郁。在拉瓦锡家举行的科学人士聚会上，拉格朗日会站在那儿茫然若失地凝视着窗外，他的背影对那些前来向他表示敬意的客人们，是一幅黯淡而冷漠的画。他自己说他的热情消失了，他对数学不再感兴趣了。如果他被告知某个数学家在从事一项重要的研究，他会说："那就更好了；我开始了它，我没有必要完成它。"《分析力学》放在他的书桌上，没有打开达两年之久。

拉格朗日厌倦了与数学有关的一切，他现在转向他认为他真正感兴趣的东西——就象牛顿在《原理》之后作的那样：玄学、人类思想的发展、宗教史、语言的一般理论、医学、植物学。在这些杂七杂八的东西上，他以渊博的知识和他对数学以外的东西的深刻洞察力使他的朋友感到吃惊。那时化学正在迅速成为一门科学——

① 玛丽·安托瓦内特(1755—1793)为法国王后，路易十六之妻，法国大革命中她与丈夫一道被捕，并先后被革命人民处死。——译者

与它之前的炼金术截然不同，这主要是通过拉格朗日的密友拉瓦锡(1743－1794)的努力。在某种任何学习初等化学的学生都能理解的意义上，拉格朗日宣称，拉瓦锡已经把化学变得“象代数一样容易了”。至于数学，拉格朗日认为它已经结束了，或者至少进入了一个衰落的时期。他预见化学、物理学和一般的科学将成为对第一流的头脑最有吸引力的领域，他甚至预言，数学在科学院和大学中的位置，不久就会跌落到象阿拉伯语那样平凡的水平。在某种意义上他是对的。要是没有高斯、阿贝耳、伽罗瓦、柯西，以及其他一些人给数学注入新的思想，牛顿推动的波涛到1850年就会消失。幸运的是，拉格朗日在有生之年看到了高斯令人满意地开始了他伟大的事业，并且认识到了他自己的预言是没有根据的。当我们今天想到1800年以前的最光辉的时代只不过是现代数学的黎明，我们现在正处在晨曦初露的时刻，还不知道正午是什么情景——如果会有什么的话，我们可以对拉格朗日的悲观付之一笑；我们可以从他的例子学会避免预言。 167

大革命打破了拉格朗日的冷漠，激励他对数学的兴趣再次活跃起来。为了便于查考起见，我们可以记住1789年7月14日，攻陷巴士底狱这个日子。

当法国的贵族和科学界人士终于认识到他们必定会遭遇到什么时，他们极力劝告拉格朗日返回柏林，那里等着欢迎他。没有人会反对他的离去。但是他拒绝离开巴黎，说他宁愿留下来，把这场“试验”看完。他和他的朋友们都没有预见到恐怖时代，当它到来的时候，拉格朗日痛悔不该留下来，要逃走已经太晚了。他并不为自己的生命担惊受怕。首先，作为半个外国人，他是相当安全的，其次，他并不十分看重自己的生命。但是令人厌恶的残忍行为使他作呕，几乎摧毁了他剩下的那一点儿对人类天性和常情的信念。

当一个接着一个的暴行使他震惊地认识到，他不该留在这里目击一场革命的不可避免的恐怖，他一直提醒着自已，“Tu l'as voulu”（“你想做”，或“你会做的”）。

革命党人要更新人类和改造人性的庞大计划使他寒心。当拉瓦锡走上断头台——要是仅仅作为一个社会正义的问题，他无疑该受这样的惩罚——时，拉格朗日表示了他对这个愚蠢的死刑的愤慨：“他们只要一刹那就可以使这颗头颅落地，而要产生出和他同样的头脑或许一百年也不够。”但是当有人力主以这个大化学家对科学的贡献作为饶他一命的合情合理的理由时，充满义愤的、受压迫的市民们肯定地对包税人拉瓦锡说：“人民不需要科学。”他们也许是对的。可是没有化学，连肥皂也不可能有。

168

尽管实际上拉格朗日的整个工作生涯一直是在王族的保护下度过的，他并不同情保皇党人，他也不同情革命党人。这两方面都无情地侵犯了文明，他公正而明确地站在文明的中间地带。他能够同情受着超出人类忍耐力的压迫的人民，希望他们在争取体面的生活条件的斗争中取胜。但是他太实际了，人民的领袖们提出的改变人类不幸的空想的计划，不能打动他，他拒绝相信制造出这样的计划是人类头脑之伟大的不容置疑的证据，就象狂热的把人送上断头台的刽子手宣称的那样。“如果你想看看人类头脑的真正伟大”，他说，“去牛顿的研究室看看正在分解白光或者揭露世界体系的秘密时的牛顿吧”。

他们对待他异常宽容，颁布了一道特别法令，给他以“生活津贴”。当滥发纸币造成的通货膨胀把津贴贬到一文不值时，他们委派他在发明委员会供职，以弥补他用度的不足，还委派他在造币委员会供职。当巴黎师范学院在1795年创办起来（只存在了很短的时间）时，拉格朗日被任命为数学教授。师范学院关闭后，在1779年

成立伟大的巴黎综合工科学校时，拉格朗日规划出数学课程，任第一位教授。他被找来给程度很差的学生上课，而在这以前他从未教过课。拉格朗日适应了他的未经训练的学生，带领他的学生们经过算术、代数到达分析，他似乎更象学生中的一员，而不象他们的教师。那个时代的最伟大的数学家，成了一个伟大的数学教师——为拿破仑的那一群凶猛的年轻军事工程师们在征服欧洲中发挥作用进行了准备。什么都知道的人不能教书的宗教迷信被打破了。拉格朗日远远超出了教学大纲，在他的学生们眼前发展起了新数学，不久，学生们自己也参加了这个发展。

这样发展起来的两项工作，对十九世纪前三十年的分析学产生了很大影响。拉格朗日的学生们发现无限小和无限大的概念很难掌握，而传统形式的微积分学充满了这些概念。为了克服这些困难，拉格朗日试图不用莱布尼兹的"无穷小"和牛顿的极限的特殊概念发展出微积分学。他自己的理论发表在《解析函数论》(1797年)和《函数的微积分学教程》(1801年)这两部著作中。这些著作的重要性不在数学上，而是在于它们推动了柯西和其他一些人去创立一种令人满意的微积分学。拉格朗日完全失败了。但是在这样说的时候，我们必须想到，甚至在我们自己的时代，拉格朗日未能成功解决的困难也还没有被完全克服。他的著作是值得人们注意的尝试，在那个时代是令人满意的。如果我们自己的著作的生命力有他的著作那样长久，我们就干得很好了。

169

拉格朗日在大革命时期最重要的工作，是他在完善米制度量衡中所起的主导作用。正是由于拉格朗日的坚决和见地，才没有选择12，而是选择了10作为基数。12的"优点"是显然的，直到今天还出现在极热心的宣传者们给人以深刻印象的论文中，他们距离异想天开只有毫厘之差。把基数12加在我们十进制的数系

上，就象在一个五边形孔中放进一个六角形的木钉。为了说明12的不合理性，甚至对想法古怪的人说明，拉格朗日提出11也许更好——任何素数都有使数系中的所有分数都具有同样分母的优点。缺点是非常多的；对任何懂得简短除法的人都是很明显的。委员会了解了要点，坚持以10为基数。

拉普拉斯和拉瓦锡在委员会刚组建时也是委员会的成员，但是三个月后，他们与其他人一起被"清除"了出去。拉格朗日仍然担任主席。"我不知道他们为什么留下了我，"他说，他不太明白他沉默的天赋不只是保住了他的职位，也救了他的命。

尽管拉格朗日作了许多有意义的工作，他仍然是孤独的，近乎消沉。在他五十六岁的时候，一个几乎比他小四十岁的年轻姑娘把他从这种介乎生死之间的衰退状态中挽救了出来，她是他的朋友天文学家勒莫尼埃的女儿。她被拉格朗日的不幸感动了，坚持要同他结婚。拉格朗日让步了，与所有掌管男女常情的不管什么规律相反，这场婚姻的结果很理想。年轻的妻子证明她不仅是忠实的，而且也是称职的。她把让丈夫说出心里话和重新唤起他对生活的希望，作为自己生活的目的。在拉格朗日这方面，他很高兴地作了许多让步，陪着他的妻子去参加舞会，那是他自己从来想不到要去的地方。不久，只要她不在他的视线内时间长一点，他就受不了，在她短暂外出——买东西——的时间，他是很可怜的。

170

拉格朗日即使在他新的幸福中，也仍然保持着对生活的极为客观的态度，保持着对他自己的愿望的绝对诚实。"我的第一次婚姻没有孩子，"他说，"我不知道是否我的第二次婚姻会有孩子，我几乎不指望了。"他坦白而真挚地说，在他所取得的全部成功中，他最珍视的是找到了他年轻的妻子这样温柔和忠实的伴侣。

法国人给了他大量的荣誉。这个曾经是玛丽·安托瓦内特特

别宠信的人，现在成了那些把她处死的人们的偶像。1796 年，法国吞并了皮埃蒙特，塔莱朗奉命郑重其事地去拜访仍然住在都灵的拉格朗日的父亲，告诉他，"你的儿子，由于他的天才，给全人类带来了荣誉，皮埃蒙特为产生了他感到骄傲，法国为拥有他感到骄傲。"当拿破仑在他的两次战役之间转到内政上时，他经常与拉格朗日谈论近代的哲学问题和数学在现代状态中的作用，他对这个讲话很柔和的人极为尊敬，这个人总是想好了才说，从来也不固执己见。

拉格朗日在他平静的冷漠下面，隐藏着一种有时出人意料地闪现一下的讽刺的机智。有时他的讽刺是那么微妙，以至比较粗俗的人——拉普拉斯就是一个——在这种讽刺是针对他们的时候竟然听不懂。一次在为实验和观察辩护，以防止胡思乱想和笼统的推理时，拉格朗日说："这些天文学家是很奇怪的；他们不相信一种理论，除非这种理论与他们的观察相吻合。"有人注意到他在一次音乐会上着迷得忘了一切，问他为什么喜欢音乐。他回答说："我听了头三个小节；在第四小节我就什么也辨别不出来了；我完全沉浸在自己的思想中；没有什么东西妨碍我。正是这样，我解决了不止一个困难的问题。"甚至他对牛顿的真诚敬意，也带有一点儿同样温和的讽刺味道。"牛顿，"他说，"无疑是特别有天才的人，但是我们必须承认，他也是最幸运的人：一个人建立世界体系的机会只有一次。"他又说："牛顿是多么幸运啊，在他那个时候，世界的体系仍然有待发现呢！"

拉格朗日在科学方面的最后的努力，是为《分析力学》出第二版而作的修正和扩充。虽然他已年逾七十，他过去的全部力量又回到了他身上。他恢复了以前的习惯，连续不停地工作，可很快发现他的躯体不再顺从大脑的指挥了。不久他开始出现一阵阵的昏厥，

特别是在早上起床的时候。一天，他的妻子发现他躺在地上不醒人事，他的头在倒下时碰在了桌子边上，伤得很厉害。在那以后，他放慢了速度，但仍在继续工作。他知道他的病是严重的，但这没有打乱他的安详；拉格朗日终生象哲学家希望的那样生活，对他的命运听天由命。

拉格朗日去世的前两天，蒙日和其他一些朋友得知他快死了，他希望告诉他们一些有关他的生平的事情，就去拜访他。他们发现他暂时情况不错，只是失去了记忆力，这使他忘记了想要告诉他们的事情。

"我昨天病得厉害，我的朋友们，"他说，"我感到我要死了；我的身体在一点一点地虚弱下去；我的智力和体力正在慢慢死亡；我注意到我的力气逐渐减小的进程，我接近死亡既没有悲伤也没有惋惜，这只是非常温和的衰竭。噢，死亡并不可怕，当他没有痛苦地到来时，它是最后一个，并不是令人不快的功能。"

他相信生命的位置在所有的器官中，在机体的整体中，而在他的情况下，这个机体所有的零件都同样衰竭了。

"再过一会儿，哪儿也不会有机能了，死亡无所不在；死亡只是躯体的完全安眠。

"我希望死，是的，我希望死，我在死亡中发现了一种愉悦。但是我的妻子不希望我死。在这样的时刻，我竟宁愿有一个不是这样好的、不是这样热切地想恢复我的活力的妻子，那样的妻子会让我平静的死去。我过完了我的一生；我在数学中得到了一些名声。我从不恨任何人，我没作过什么坏事，死会是很好的；但是我的妻子不希望我死。"

他的愿望很快就实现了。他的朋友们离去以后不久，他昏了过去，再没有醒过来。1813年4月10日凌晨他去世了，终年七十六岁。



拉普拉斯

第十一章　从农民到势利小人

拉 普 拉 斯

自然的一切结果都只是数目不多的一些不变规律的数学结论。

——P.S. 拉普拉斯

皮埃尔-西蒙·德·拉普拉斯侯爵(1749—1827)出生时不是农夫，死时也不是势利小人。然而他光辉的一生，在二阶小量的范围内，包含在所指出的极限内，正是从这个近似的观点，他作为人性的一个例子是极为有趣的。

作为一个数学天文学家，拉普拉斯被公正地称为法国的牛顿；作为一个数学家，他可以被看作是概率论的现代状况的奠基人。在人性方面，他也许是对高贵的追求必然使人品格高贵这种教育学迷信的最明显的驳斥。然而，尽管有各种各样引人发笑的缺点——他对头衔的贪婪，在政治上的随风倒，以及渴望得到公众的尊重，成为不断变化的注意的中心而出风头——拉普拉斯的性格中也有真正伟大的因素。我们可以不相信所有他说过的为真理而献身真理的话，我们可以对他竭力把牛顿关于在海边玩耍的孩子的话，套入一句简炼的警句，反复背诵他警句式的最后一句话——"我们知道的不多，我们不知道的无限"——这番苦心付之一笑，但是我们不能否认拉普拉斯对不知名的初学者的慷慨，他对他们决不是一个狡猾的讨厌的政客。为了帮助一个年轻人，拉普拉斯有一次还欺骗了他自己。

对于拉普拉斯的早年生活我们知道得很少。他的父母是住在法国卡尔瓦多斯省的博蒙-恩-奥热的农民，1749年3月23日皮埃尔-西蒙就出生在那里。围绕着拉普拉斯的青少年时代的一片朦胧，是由于他自己的势利：他一直为他卑微的父母感到羞耻，并竭尽全力隐瞒他的农民出身。

173 拉普拉斯在乡村学校时就已显示出非凡的才能，大概正是这个原故，他通过富有的邻居们善意的关心交了好运。据说他的第一次成功是在神学辩论上。如果真是如此，那就是对他成年后多少有些咄咄逼人的无神论的一个有趣的前奏。他很早就学习了数学。在博蒙有一所军事学校；拉普拉斯作为一名走读生进了这所学校，据说他在那里教过一个时期的数学。一个不大可靠的传说是这个年轻人非凡的记忆力，比他的数学才能更引起人们的注意，一些有影响的人士就是因为他的记忆力，才热心地给他写了推荐信，他

在十八岁时带着这些推荐信前往巴黎，从他的靴子上永远地擦掉了博蒙的泥土，出发去寻找他的运气。他对自己力量的估计是很高的，但并不过分。年轻的拉普拉斯怀着有充分理由的自信闯入巴黎，去征服数学世界。

拉普拉斯一到巴黎就去拜访达朗贝尔，送上了他的推荐信。他没有被接纳。达朗贝尔对于只带着大人物的推荐信的年轻人不感兴趣。拉普拉斯以在他这样的年轻人是惊人的洞察力，感觉到了问题在什么地方。他回到住处，给达朗贝尔写了一封关于力学的一般原理的精采的信。这封信果然起了作用。达朗贝尔回信邀请拉普拉斯去见他，他在信中写道："先生，你看，我几乎没有注意你那些推荐信；你不需要什么推荐。你已经更好地介绍了你自己。对我来说这就够了；你应该得到我的支持。"几天以后，由于达朗贝尔的原故，拉普拉斯被任命为巴黎军事学校的数学教授。

拉普拉斯现在积极投身于他毕生的事业——把牛顿的万有引力理论详细地应用于整个太阳系。要是他别的什么也不做，他也会比他实际上更加伟大。拉普拉斯在1777年写给达朗贝尔的一封信中，描述了他想成为什么样的人，那时他二十七岁。拉普拉斯对他自己的描述，是在自我分析方面一个人所曾说过的现实与想象的最奇怪的混合。

"我从事数学研究，一向出于爱好，而非追求虚名。"他宣称，"我最大的乐趣是研究发明者的进展情况，看看他们的天才怎样千方百计对付他们碰到的障碍，和怎样克服这些障碍。然后我把自己放在他们的位置上，问自己，我会怎样去克服这些障碍。虽然在大多数情况下这样替换只是使我的自负蒙受耻辱，然而为他们的成功而感到的欢欣，丰厚地补偿了我这点微不足道的屈辱。如果我有幸能给他们的工作添加一些东西，我把全部功绩都归于他们

174

最初的努力，并确信他们在我的位置上会比我做得更好。……”

他的第一句话也许是对的。但是他这篇可能由一个自命不凡的十岁孩子，交给容易受骗的主日学校教师的、沾沾自喜的小品的其余部分怎样呢？特别要注意他把自己的“谦虚”的成功慷慨地归于前辈们的最初的工作这句话。再没有比这个表示感谢的坦率的声明更不真实的了。实事求是地说，拉普拉斯不管在哪里得到他用得着的同代人和前辈们的任何著作，他都无法无天的到处偷窃。例如，从拉格朗日那里，他窃取了位势(下面就描述)的重要概念；从勒让德那里，他掠来他需要的分析方面的东西；最后，在他的杰作《天体力学》中，他故意略去了写进他自己的著作中的、别人的著作的出处，目的在使后代人认为是他独自一个创立了天体的数学理论。当然，他不可避免地要反复提到牛顿，拉普拉斯没有必要如此心胸狭窄。他自己对太阳系动力学的巨大贡献，很容易地就使他所无视的其他人的工作相形见绌了。

任何人只要从来没有看见过与拉普拉斯解决问题类似的努力，都无法了解他解决的问题的复杂和困难程度。在论及拉格朗日时，我们提到过三体问题。拉普拉斯考虑的是类似的问题，但是范围更大。他必须从牛顿规律算出太阳系的所有行星相互之间的、以及它们与太阳之间的摄动——斥力和拉力——的结合的效果。土星除了它的平均运动明显地稳定减少以外，是会飘逸到太空中去呢，还是继续作为太阳系的成员？或者木星和月亮的加速度最终会造成一个落进太阳，另一个撞碎在地球上吗？这些摄动的效应是累加的还是散逸的呢？或者它们是周期性的还是守恒的呢？这些谜和类似的谜是一个大问题的细节，这个大问题是：太阳系是稳定的还是不稳定的？据假定牛顿的万有引力规律确实是宇宙规律，是唯一

控制行星运动的规律。

拉普拉斯在1773年向这个总的问题迈出了重要的第一步，那时他二十四岁，他证明了行星到太阳的距离在一些微小的周期变化之内是不变的。

当拉普拉斯着手解决稳定性问题时，专家们的意见最多是不置可否。牛顿本人相信，要使太阳系保持秩序，防止它毁灭和瓦解，神的干预有时可能是必要的。其他对月球理论(月球运动)的困难留下了深刻印象的人，如欧拉，则怀疑行星及其卫星的运动是否能由牛顿假说来解释。其中所包含的力太多，它们的相互作用也太复杂，不可能作出任何合理的公正的猜测。直到拉普拉斯证明了太阳系的稳定性为止，一个人的推测与另一个人几乎一样。

这里，为了解决读者无疑已经提出的一个反对意见，可以声明，拉普拉斯对稳定性的解答只适用于牛顿和他本人所想象的高度理想化的太阳系。潮汐的阻力(在周日旋转中起着闸一般的作用)及其他一些东西都忽略不计了。自从《天体力学》出版以来，我们对于太阳系及拉普拉斯略去的其中的一切，已经知道了许多。如果说实际上的太阳系——相对于拉普拉斯的理想的太阳系——的稳定问题仍未解决，也许并不算过份。不过，天体力学的专家们可能会不同意，而只有他们有资格作出判断。

由于气质不同，一些人发现拉普拉斯的构想：一个无数次地、永远重复着复杂的循环运动的、永远稳定的太阳系，就象一个没有尽头的恶梦一样令人沮丧。对于这些人，最近得到了一个安慰：太阳也许有一天会象一颗新星那样爆炸。那样的话，稳定性的问题就不再使我们烦恼了，因为我们都会突然间完全成为气体。

作为对这一个辉煌的开端的奖励，拉普拉斯在他刚刚二十四岁时得到了他一生中第一个真正的荣誉，成为科学院副院士。傅里

叶概述了他此后的科学生涯:"拉普拉斯把他的全部著作用在一个固定的方面,他从来没有偏离过它;冷静沉着地坚持他的观点,一直是他的天才的主要特点。他已经[当他开始着手解决太阳系问题时]处于数学分析的顶峰,知道这个理论中最精巧的一切,没有人比他更适于扩展它的领域。他已经解决了天文学中的一个重大问题[在1773年寄给了科学院],他决定把他的全部才智贡献给数学天文学,这是他注定要加以完善的领域。他深入地考虑了他的伟大计划,以科学史上无可匹敌的坚忍不拔的精神,毕生致力于这项计划的完成。这个课题的宏大,给他的天才带来应得的荣誉。他承担了撰写他那个时代的«天文学大成»①——«天体力学»的重任;他的不朽的著作,使他远远超过了托勒密的著作,正如现代的分析科学[数学分析]超过了欧几里得的«原理»。"

这是再恰当不过的了。不论拉普拉斯在数学上做什么,都是为了给那个大问题的解答以帮助。拉普拉斯是把全部力量集中于值得一个人为之竭尽全力的、唯一中心目标的那种智慧——对于一个天才来说——的伟大范例。有时候拉普拉斯也被诱向其他东西,但时间都不长。一度他对数论很感兴趣,但是一认识到它的难题可能需要他花上比他能从太阳系的问题中分出来的更多的时间,便很快放弃了它。甚至他在概率论方面的划时代的工作,尽管乍看上去偏离了他的主要兴趣,实际上也是受到了他在数学天文学中的需要的启迪。一旦深入了这个理论,他就看出,它对于一切精密科学都是不可缺少的,感到尽他的力量去发展它是有道理的。

«天体力学»(The Mécanique céleste)把拉普拉斯的天文学工作概括成一个有条理的整体,它是在二十六年的时间内分卷出版

① 公元二世纪时古希腊天文学家托勒密著的天文数学名著。——译者

的。1799年出版了两卷,论述行星的运动，它们的形状(作为旋转体)，以及潮汐；1802年和1805年出版的另外两卷继续这方面的研究,这些研究最后在1823—1825年的第五卷中完成。数学解释是极其简略的,偶尔是粗糙的。拉普拉斯感兴趣的是结果,不是他怎样得出这些结果。为了避免把复杂的数学论证压缩成简短明瞭的形式的麻烦,他常常删去一切论证,只留下结论和一句乐观的评语“这是显而易见的”。他自己常常会花费几个小时——有时几天——的艰苦劳动，才能把他据以“看出”这些容易的事情的推理再现出来。甚至有才能的读者也很快就染上了只要那句著名的短句一出现就叹息的习惯,知道十有八九他们又得白费力气地干上一星期。

177

«天体力学»的主要结果,有一个比较容易读的说明在1796年出版，这就是经典著作«宇宙体系论»(Exposition du systéme du monde),它被描述为拉普拉斯的杰作,其中全部数学内容都省略了。在这部著作中，就象在关于概率的专著(1820年，第三版)的那篇很长的非数学导言(四开一百五十三页)中一样，拉普拉斯显示出他作为一个作家，几乎与他作为一个数学家同样伟大。任何人希望瞥见概率论的魅力和范围，而不被只有数学家才能理解的术语所阻挡，阅读拉普拉斯的导言是最好不过的了。自从拉普拉斯写了这篇导言以来,人们已经作了许多工作,特别是近年来在概率论的基础上做了许多工作,但是他的解释仍然是经典的,至少对整个学科的一个基本原理是完美的表述。这个理论还不完全，这是几乎无需说的。事实上它正开始显得好象它还没有开始——下一代人可能不得不把它从头做过。

可以顺便提一下拉普拉斯的天文学工作的一个有趣的细节，即关于太阳系起源的著名的星云假说。拉普拉斯显然不知道康德比他领先，他(只是半认真地)在一个注释中提出了这个假说。要

系统地解决这个问题，他的数学不够用，一直到本世纪琼斯重新开始讨论这个假说，它才有了科学意义。

拉格朗日和拉普拉斯，这两个十八世纪最主要的法国科学家，呈现出一个有趣的对照，和一个典型的、将随着数学的扩展而日益尖锐的差别。拉普拉斯属于数学物理分支，拉格朗日属于纯数学分支。泊松本人是个数学物理学家，他似乎倾向于认为拉普拉斯是更合乎需要的类型：

“拉格朗日和拉普拉斯在他们的一切工作上，不论是研究数还是研究月球的天平动，都有着深刻的差别。看来拉格朗日往往在他探讨的问题中只看到数学，把它作为问题的根源——因此他高度评价优美与普遍性。拉普拉斯则主要是把数学看做一个工具，当每一个特殊的问题出现时，他就巧妙地修改这个工具，使它适合于该问题。一个是伟大的数学家；另一个是伟大的哲学家，试图通过使高等数学为自然服务来了解自然。”

178

拉格朗日和拉普拉斯之间的根本差别也给傅里叶（我们将在后面考虑他）留下了深刻的印象。傅里叶本人的数学观点是相当严密而“实际”的，然而他能够（有一个时期）判断拉格朗日的真正价值：

“拉格朗日既是一个大数学家，也是一个哲学家。他用他的整个一生，用他高尚、质朴的举止，和他崇高的品格，最后用他精确而深刻的科学著作，在他适度的愿望中，证明了他对人类的普遍利益始终怀着深厚的感情。”

出自傅里叶的这番话是值得注意的。它可能带有一点我们通常在法国式的悼词中听到的韵律工整的华丽辞藻，然而它是正确的，至少在今天是正确的。拉格朗日对现代数学的伟大影响，是由于“他的科学著作的深度和精确性”，这些特点是拉普拉斯的杰作

中有时缺少的。

对于他的大多数同代人和最直接的追随者来说，拉普拉斯的地位在拉格朗日之上。这部分是由于拉普拉斯解决的问题的重要——证明太阳系是一个巨大的永动机这一宏伟的计划。这个计划本身是宏伟的，这是无疑的，但是它本质上是虚幻的；在拉普拉斯的时代——甚至在我们的时代，人们关于实际的物质宇宙所知道的，还不足以给这个问题以任何真正的重要意义。也许还要经过许多年，数学才能发展到足以处理我们现在所有的大量复杂的数据。数学天文学家们无疑会继续玩弄"宇宙"，乃至更不能给人留下什么印象的太阳系的理想模型，并继续用关于人类命运的、令人鼓舞和使人沮丧的报告淹没我们；但是到最后，他们的研究工作的副产品——他们设想出来的纯数学工具的完善——将成为他们对科学发展的永久的贡献(跟猜测性的宣传相反)，恰如在拉普拉斯的情形那样。

179

如果上面讲的显得太深奥，不妨看看发生在《天体力学》的事情。除了专业数学家之外，难道今天有人真正相信拉普拉斯对太阳系的稳定性的结论，是他用一个理想化的梦想代替了的极为复杂的情形的可靠定论吗？也许很多人会相信；但是没有哪一个数学物理工作者会怀疑拉普拉斯为着手解决他的理想而发展起来的数学方法的力量和用途。

只举一个例子，位势理论今天比拉普拉斯所曾梦想到的更为重要。要是没有这个理论的数学，我们想要理解电磁的尝试几乎一开始就得停下来。从这个理论中产生了边界值数学的一个强有力的分支，今天这个分支对于物理科学具有比整个牛顿万有引力理论更加重要的意义。位势的概念是第一流的数学灵感——它使我们有可能着手解决一些没有它就将无法接近的物理问题。

位势只不过是我们在牛顿那一章中描述的、与流体运动和拉普拉斯方程有关的函数 u。函数u在那里是"速度位势"；如果是关于牛顿万有引力的吸引力问题，u 是"引力位势"。把位势引进流体运动理论、引力理论、电磁理论和其他一些领域，是数学物理中的一个最大的进步。它有着把两个或三个未知量的偏微分方程换成一个未知量方程的作用。

拉普拉斯在 1785 年三十六岁时晋升为科学院院士。正如这一荣誉在一个科学家的生涯中十分重要，1785 年这一年在拉普拉斯作为一个公职人员的生涯中，是一个更重要的里程碑。因为在这一年，拉普拉斯在军事学校获得对一个十六岁的唯一的考生进行考试的独特的荣誉。这个青年注定要打乱拉普拉斯的计划，使他从献身数学转入肮脏的政治。这个年轻人的名字是拿破仑·波拿巴(1769—1821)。

180 可以说拉普拉斯是骑在马背上度过大革命的，而且是相当安全地目睹了一切。但是有着象他这样的声望和难于满足的野心的人，没有一个能够完全逃脱危险。如果德·帕斯托雷知道他在他的赞词中在说些什么就好了，拉格朗日和拉普拉斯逃脱了断头台，仅仅因为他们被征召去为大炮计算弹道，并帮助指导制造用于火药的硝石。他们既没有象一些不这么需要的专家学者那样被迫去吃草，也没有象他们不幸的朋友孔多塞那样，由于点了一份贵族吃的摊鸡蛋，而粗心地暴露他们自己。孔多塞不知道一份普通的摊鸡蛋需用多少个鸡蛋，他要了一打。那位可靠的厨师问孔多塞是干什么的。"木匠。"——"让我看看你的手。你不是木匠。"那就是拉普拉斯的好朋友孔多塞的结局。他们不是在监狱里毒死了他，就是让他自杀了。

大革命以后，拉普拉斯积极投身于政治，或许是想要打破牛顿的记录。法国人客气地提到拉普拉斯作为一个政治家的"多才多艺"。这未免太谦虚了。拉普拉斯作为一个政治家的所谓的缺点，就是他在要滑头比赛方面的真正伟大。人们批评他不能在每逢改朝换代时，不改变他的政治观点而保住他的官职。一个人机灵到能够使敌对的双方在不论哪一方上台掌权时，都相信他是一个忠诚的支持者，看起来他并不是一个卑鄙的政客。象业余活动者那样玩花招的不是拉普拉斯，而是他的庇护人。要是一个共和党的邮政大臣把所有最肥的差事都给了不应该得到这些差事的民主党人，我们会怎么想呢？或者如果反过来，我们又会怎么想呢？每次政府垮台，拉普拉斯就得到一个更好的差事。他不付任何代价，一夜之间从狂热的共和主义者变成热忱的保皇党。

拿破仑把一切都塞给拉普拉斯，包括内政大臣的位置。拿破仑时代的一切勋章都佩戴在他的胸前——包括法国勋级会荣誉军团的大十字勋章和留尼汪勋章，他还被封为帝国伯爵。然而当拿破仑倒台时他做了什么呢？签署流放他的恩人的法令。

王政复辟以后，拉普拉斯立即转而效忠路易十八，特别是因为他这时已成为拉普拉斯侯爵而坐在贵族院里了。路易赏识他的支持者的功绩，并于1816年任命拉普拉斯为改组综合工科学校的委员会的主席。

也许最足以表现拉普拉斯的政治天才的东西，可以在他的科学著作中找到。要根据不断变动的政治主张来修改科学，并侥幸成功，需要真正的天才。题献给五百人议会的《宇宙体系论》第一版，是以这些崇高的字句结束的："天文科学的最大好处，在于消除了由于对我们与自然的真正关系的无知而产生的种种错误，而由于社会秩序必须唯独建立在这些关系上，这些错误就更加是

181

毁灭性的。真理和正义是社会秩序的永远不变的基础。我们决不需要这种危险的准则：为了更好地保证人们的幸福，有时欺骗或奴役他们是有用的！世世代代的不幸的经验已经证明，这些神圣的法则是决不会违反了而不受惩罚的。”1824年，这种说法已被禁止，拉普拉斯代之以：“让我们小心保存并增加这种丰富的进步知识，它是有思想的人们的欢乐。它对航海和地理学作出了重要的贡献；但是它最大的好处在于消除了由于天体的各种现象而产生的畏惧，消灭了由于对我们与自然的真正关系无知而产生的种种错误，如果科学的火炬熄灭了，这些错误不久又会再现。”就思想感情而言，在这两个卓越的极限之间是没有甚么好选择的。

在分类账的借方一边，这已经足够了，最后的引文确实使人想起拉普拉斯高出所有的谄媚者的一个特点——在他的真正信念受到怀疑的地方，他在精神上的勇气。关于拉普拉斯与拿破仑在《天体力学》上交手的传说，说明了这位数学家的本来面目。拉普拉斯送了拿破仑一部《天体力学》。拿破仑想惹恼拉普拉斯，责备他犯了一个明显的疏忽。“你写了这本关于世界体系的大书，却一次也没有提到宇宙的创造者。”拉普拉斯反驳说，“陛下，我不需要那个假设。”当拿破仑向拉格朗日复述这句话时，拉格朗日说，“啊，但是那是一个很好的假设，它说明了许多东西。”

要顶得住拿破仑，并对他说真话，是需要勇气的。有一次，在学院的一次会上，正赶上拿破仑脾气最坏的时候，他故意粗暴无礼，把可怜的老拉马克搞得哭了起来。

182 在贷方一边，拉普拉斯对于初学者们是真诚慷慨的。比奥讲过他年轻时在科学院宣读过一篇论文，当时拉普拉斯在场，后来拉普拉斯把他拉到一边，给他看了一份他自己的还没有发表的发黄的旧手稿，是关于完全相同的发现的。拉普拉斯告诫比奥保守秘密，干

下去，发表他的著作。这只不过是他做过的好几件事情中的一件。拉普拉斯喜欢说研究数学的初学者是他的前娘生的孩子，但是他对待他们象对待自己的儿子那样好。

人们常常引用拿破仑的话来作为数学家不切实际的一个例子，我们也引用拿破仑对拉普拉斯的评价，据说拿破仑自称他是在圣赫勒那岛作囚犯时讲这番话的。

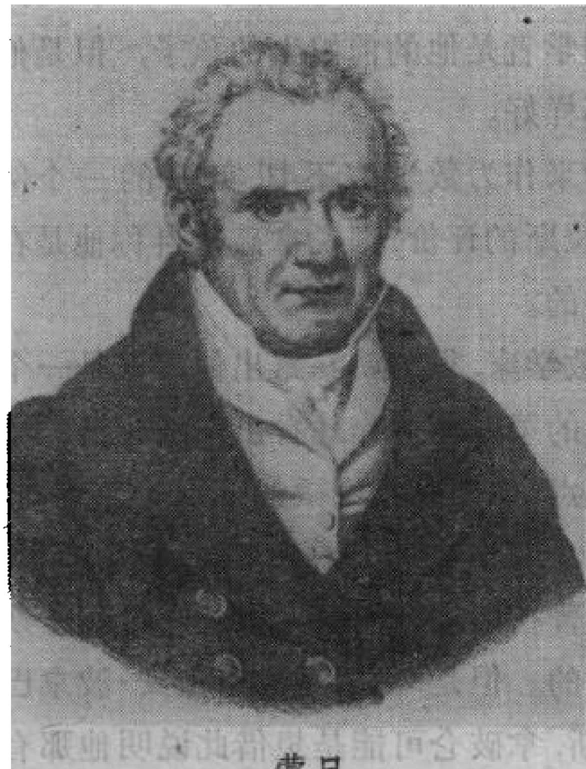
"拉普拉斯是个第一流的数学家，很快就暴露出他仅仅是一个平庸的行政官员。我们从他做的第一件工作就看出，我们受骗了。拉普拉斯看问题缺乏正确的观点；他到处找细微的差别，只有一些似是而非的意见。最后把无限小的精神带进了行政工作中。"

这个挖苦的鉴定是根据拉普拉斯担任内政大臣的短短的任期——仅仅六个星期——而作出的。但是，由于当时路西安·波拿巴需要一个差事，接替了拉普拉斯，拿破仑可能是想借此说明他那有名的喜欢任用亲戚的倾向是合理的。拉普拉斯给拿破仑的鉴定没有保存下来，大致是这样的。

"一个第一流的军人，拿破仑很快就暴露出他只不过是一个平庸的政治家，我们从他的最初的功绩就看出他是受骗了。拿破仑从明显的观点看待一切问题；他到处怀疑背叛行为，恰恰在发生背叛行为的地方不怀疑，对他的支持者只有一种孩子般天真的信任，最后把无限慷慨的精神带进了一个贼窝。"

究竟谁是更实际的行政官员呢？是那不能紧紧握住他所得到的东西，成为他的敌人的囚犯死去的人呢，还是另一个继续聚殓财富和荣誉，一直到他去世那一天的人呢？

拉普拉斯在距离巴黎不远的、他在阿格伊的乡间庄园中，舒舒服服地度过他最后的日子。在短期患病后，他于 1827 年 3 月 5 日去世，享年七十八岁。他最后的话已经报道过了。



蒙日



傅里叶

第十二章　皇帝的朋友们

蒙日和傅里叶

我不能告诉你为了对画法几何的图形有所理解，我付出了多大的努力，我讨厌画法几何。

——夏尔·埃尔米特

傅里叶的定理不仅是现代分析学最美妙的结果之一，也可以说它为解决现代物

理学中几乎每一个难解的问题提供了一个不可缺少的工具。

——威廉·汤姆森和 P. G. 泰特

加斯帕尔·蒙日(1746—1818)和约瑟夫·傅里叶(1768—1830)的一生是奇怪地相似的,可以把他们放在一起考虑。在数学方面,他们每个人都作出了一项重要的贡献:蒙日发明了画法几何(不要与笛卡儿、帕斯卡和其它一些人的射影几何相混淆);傅里叶以他对热传导理论的第一流的研究,开创了数学物理的现代状态。

没有蒙日的几何——最初是为了用于军事工程而发明的——十九世纪机器的大规模出现也许是不可能的。画法几何是使机械工程成为现实的全部机械制图和图解方法的根源。

由傅里叶在他关于热传导的工作中开创的方法,在边界值问题——数学物理的中枢神经——中具有同等的重要性。

因此,我们自己的文明的相当大一部分,要归功于蒙日和傅里叶两人,蒙日在实际方面和工业方面,傅里叶在纯科学方面。但是甚至在实际方面,傅里叶的方法在今天也是不可缺少的;它们实际上在所有电气和声学工程(包括无线电)方面,都超出了单凭经验估计和凭手册办事的程度而成为一种常识。

第三个人必须与这些数学家相提并论,不过我们不占用篇幅去讲述他的生平:他就是化学家克洛德-路易·贝托莱伯爵(1748—1822),是蒙日、拉普拉斯、拉瓦锡和拿破仑的密友。贝托莱和拉瓦锡一起,被认为是现代化学的奠基人。他和蒙日的交情很深,以至他们的敬慕者们不再试着在他们的非科学活动中把他们区分开来,而干脆叫他们蒙日-贝托莱。 184

加斯帕德·蒙日 1746 年 5 月10日出生在法国的博纳,是雅克·蒙日的儿子。雅克是个小贩和磨刀人,他非常尊重教育,把他的

三个儿子都送进了地方学院受教育。三个儿子在事业上都获得成功；加斯帕德是这一家的天才。在学院(由一个宗教团体创办)里，加斯帕德总是在每件事情上都获得头奖。并获得在他的名字后面印上纯金的特殊荣誉。

蒙日十四岁的时候，在构造一架救火机中显示出他各方面的特殊才能。惊讶的市民们问他，"既没有资料，又没有模型，你怎么能成功地完成这样一件任务呢？"蒙日的回答是他一生的数学部分和大多数其他部分的总结："我有两个不会出错的成功的方法，一个是坚持到底，一个是以几何的精确性说明我的思想的手指。"事实上他是一个天生的几何学家和工程师，有着使复杂的空间关系形象化的无比的天赋。

十六岁时，他完全靠自己的力量画了一幅精采的博纳地图，为此他还制作了他自己的测量工具。这幅地图使他交了他的第一次好运。

蒙日的教师们被他明显的天才深深打动了，推荐他在里昂由他们的教团办的学院里担任物理学教授。蒙日在十六岁时得到任命。他和蔼，有耐心，一点不装模作样，再加上他丰富的知识，使他成为一名优秀的教师。教团要求他发誓，和他们共命运。蒙日与他的父亲商量。机敏的磨刀人劝他要慎重。

过了一些日子，蒙日在一次探家的途中，遇见了一位搞工程的官员，他看见过那张有名的地图。这位官员请求雅克把他的儿子送到在梅济耶尔的军事学校去。也许对蒙日未来的生涯是幸运的，这位官员有意没有说由于蒙日出身低微，他永远不可能得到军官委任状。蒙日不知道这一点，他急切地接受了这位官员的建议，前往梅济耶尔。

蒙日很快就知道了他在梅济耶尔的地位。这所学校里只有二

十名学生，其中每年有十名学生将作为从事工程的陆军中尉毕业，其余的学生则注定要去做"实际"工作——下等职业。蒙日没有抱怨。他过得很快活，因为测量和制图的日常工作，给他留下了大量的时间去研究数学。常规课程中很重要的一部分是筑城术，其中的问题是要把防御工事设计成没有任何一部分暴露在敌方的直接火力之下。通常的计算要求无穷无尽的算术运算。一天，蒙日呈交上他对这类问题的解答。它被移交给一位高级官员审查。

那位官员怀疑当时能有人解决这个问题，他拒绝审查这个解答。"我为什么要给自已找麻烦，不厌其烦地去验证一个假定的解答呢？作者甚至没有花时间去安排他的图形。我可以相信计算的大大简化，但不相信奇迹！"蒙日坚持，说他没有用算术。他的坚持胜利了；他的解答经过审查，发现是正确的。

这就是画法几何的开始。蒙日立刻得到了一个小小的教学职位，把这个新方法教给未来的军事工程师们。以前象恶梦一样讨厌的问题——有时只能把已经建成的工事拆毁，再重头开始，才能解决问题——现在就象ABC一样简单了。蒙日宣誓不泄露他的方法，它作为一个小心翼翼地保守着的军事秘密达十五年之久。只是到了1794年，他才得到允许在巴黎的师范学院公开讲授这个方法，拉格朗日坐在那里的听众当中。他对画法几何的反应，和儒尔丹发现他终生都在谈着平淡无奇的东西时的反应一样。拉格朗日在听了一次演讲后说，"在听蒙日的演讲以前，我不晓得我是知道画法几何的。"

画法几何背后的思想，现在对我们来说，就象它对拉格朗日一样简单得可笑。画法几何就是在**一**张平面上描画通常三维空间中的立体和其它图形的方法。首先想象两个成直角相交的平面，就象

把一本薄薄的书的两页打开成九十度角；一张平面是水平的，另一张是垂直的。要描画的图形由垂直于平面的射线投影到这些平面上。这样就有了图形的两个投影；在水平平面上的投影叫做图形的平面图，在垂直平面上的投影叫做正视图。现在把垂直平面翻下来（"rabbatted"），直到它和水平平面落在同一个平面（水平平面所在的平面）上——就象现在把书打开平放在桌上。

186

空间的立体或其它图形现在由两个投影描画在同一个平面（画图板的平面）上。例如，一个平面是由它的交线——在垂直平面翻下以前，与垂直平面和水平平面相交成的直线——描画的；一个立体，比如说一个立方体，是由它的各条边和顶点的投影描画的。曲面与垂直平面和水平平面相交出曲线；这些曲线，或曲面的交线，在一个平面上描画出曲面。

当这些说明和其它一些同样简单的说明被发展起来，我们就有了一个作图方法，它把我们通常想象的在三维空间中的东西画在一张铺平的纸上。经过短期训练，制图员就能象别人辨认拍得很好的照片那样容易地辨认这些画出的图形——并从它们中得到更多的东西。正是这个简单的发明革新了军事工程学和机械设计。和应用数学中许多第一流的东西一样，它的最明显的特点是它的简明。有许多种可以发展和修改画法几何的方法，但是它们都得追溯到蒙日。这个学科现在已经建立得很完整了，以至专业数学家们对它已没有什么兴趣了。

在继续讲述蒙日的生平以前，我们先讲完他对数学的贡献，为此，我们回想起，他的名字与曲面几何联系在一起，是今天每一个学习微积分学的中等课程的学生都熟悉的。蒙日向前迈出的这一大步，是系统地（也是卓越地）用微积分学研究曲面曲率。在他的曲率的一般理论中，蒙日为高斯铺平了道路，高斯又启发了黎曼，

而黎曼发展了在广义相对论中以他的名字著称的几何。

象蒙日这样天生的几何学家竟会贪图埃及的奢侈生活，似乎是相当可惜的，但是他确实是这样。他在微分方程中的工作，与他在几何中的工作密切相关，也表明了他所想到的事情。在离开梅济耶尔（这些伟大的工作就是在那里做出来的）许多年以后，蒙日在综合工科学校向他的同事们讲述他的发明。拉格朗日又在听众之列。他在演讲结束后对蒙日说："我亲爱的同事，你刚才解释了一些非常优美的东西；我很愿意是我作出了它们。"在另一个场合，他又说："凭着把分析学应用到几何上，这个精力绝伦的人将使他自己不朽。"他确实是不朽的；注意到这点是很有意思的，虽然对他的天才的许多迫切的召唤分散了他对数学的注意力，他从来也没有失去他的才能，和所有伟大的数学家一样，蒙日至死都是一个数学家。 178

1768年，蒙日二十二岁时在梅济耶尔晋升为数学教授，三年以后，在物理学教授去世时，他又担任了物理学教授的职务。双重工作丝毫没有使他为难。蒙日体格强壮，身心健康，一向能够承担三、四个人的工作，也常常是这样做的。

他的婚姻带有一点十八世纪浪漫主义的色彩。在一次宴会上，蒙日听见一个鲁莽的贵族诽谤一位年轻的寡妇，他是因为遭到她的拒绝而对她进行报复。蒙日用肩膀在嘀嘀咕咕的人群中挤过去，要弄清楚他是否没有听错。"你这是怎么回事？"蒙日对着他的下颚给了一拳。没有发生决斗。几个月以后，在另一次宴会上，蒙日被一位漂亮的年轻妇女深深地吸引住了。经介绍，他认出她的姓名——奥尔邦夫人——就是那位他曾经打算为她决斗的不知名的女士。她就是那位年仅二十岁的寡妇，在她已故的丈夫的事务清

理完以前，她并不想结婚。蒙日向她保证说，"一切都不用担心，我一生中解决了许多更困难的问题。"蒙日和她在1777年结婚。她比蒙日活得长，在他死后竭尽可能地永久纪念他——不知道她丈夫在遇见她以前很久就已经建立了他自己的不朽业绩。蒙日的妻子是在一切事情上都始终不渝地忠于他的唯一的人。甚至拿破仑在最后的时刻也会因为他年事已高而使他失望。

大约在这时，蒙日开始与达朗贝尔和孔多塞通信。这两个人在1780年曾经劝说政府在卢夫勒创办一所研究水力学的学院。蒙日被召到巴黎去负责这项工作，条件是他一半时间仍留在梅济耶尔。他当时三十四岁。三年以后，他被免除了在梅济耶尔的职务，被任命为海军军官候补生资格的主考人，他担任这个职务，直到1789年大革命爆发为止。

回顾大革命时期的所有这些数学家的经历，我们不能不注意到，对于在我们今天看来是显而易见的事情，他们和所有其他的人竟是那么盲目。他们当中没有一个人怀疑到他是坐在地雷上，而且导火线已经在发出劈劈啪啪的响声。也许我们的后继者在一百年以后也会这样说我们。

蒙日在海军任职六年，证明他是一个廉洁的公仆。当他毫不留情地取消一些不称职的贵族子弟的军官资格时，心怀不满的贵族威胁他不得好下场，要给他严厉的惩罚，但是蒙日决不让步。"要是你们不喜欢我的办事方法，另找一个人来干这差事好了。"结果海军在1789年很管用。

蒙日的出身和他与那些追求不应得的恩宠的势利小人打交道的感受，使他成为一个天生的革命者。他从切身体会中知道旧秩序的腐败和人民群众在经济上的困境，他认为实行新政的时候已经到来。但是和早期的自由主义者一样，蒙日不懂得，暴动的民众

一旦尝到流血的滋味，不到把血流尽他们是不会满足的。早期的革命党人对蒙日的信任，超过了他对自己的信任。他们违反他的较好的判断，于1792年8月10日强迫他担任海军和殖民地大臣。他是适于担任这个职务的，但是在1792年的巴黎，担任政府官员却不是一件有益于健康的事。

暴动的民众已经无法控制；蒙日被安置在临时执行委员会，去制订控制措施。他本人是平民的儿子，他感到他比他的一些朋友更了解他们，比如他的朋友孔多塞，就曾聪明地拒绝了在海军的工作以保住他的脑袋。

但是有各种各样的平民，所有的平民一起组成了“人民”。到1793年2月，蒙日发现他本人受到不够激进的怀疑，他在2月13日辞职，但在18日又再次当选担任一项工作，不过由于愚蠢的政治干涉，由于水手们当中的“自由、平等、博爱”，和政府行将破产，使得这项工作不可能进行。在这段困难时期，蒙日每天都有可能上断头台。但是他决不屈从于无知和无能，他当着批评者的面告诉他们，他知道事情是怎么回事，但是他们一无所知。他唯一担心的是，国内的意见分歧会使法国遭到外来的进攻，那就会使革命的果实丧失殆尽。

最后，蒙日在1793年4月10日获准辞职，以便担任更紧迫的工作。他所担心的进攻，现在已经清楚可见了。 189

国民公会开始召集一支九十万人的军队来进行防御，而武器库里几乎空无所有。只有十分之一的军火，而且没有希望进口必需的材料——制造铜炮的铜和锡，制造火药的硝石，和制造火器的钢。蒙日对国民公会说，“从土里给我们找来硝石，三天之内我们将给大炮装上弹药。”他们回答说，一切都很好，但是他们从哪儿去找硝石呢？蒙日和贝托莱指点了他们。

全国都动员了起来，在蒙日的指导下，向法国的每一个城镇、农庄和乡村发出了公告，告诉人们应该做些什么。贝托莱领导化学家们发明了提炼原料和简化制造黑色火药的更好的新方法。整个法国变成了一座巨大火药厂。化学家们还告诉人们到甚么地方去找锡和铜——从时钟的金属零件和教堂的大钟去找。蒙日是这一切的灵魂。他以惊人的工作能力，白天在铸造厂和兵工厂监督工作，晚上写指导工人的公告，干得卓有成效，他关于《大炮制造工艺》的公告成了工厂的手册。

随着革命形势的不断恶化，蒙日并非没有敌人。一天，蒙日的妻子听说贝托莱和她的丈夫都将被检举。她怕得要命，跑到杜伊勒利宫去打听消息。她发现贝托莱安静地坐在栗树下，他也听到了谣言，但是认为一个星期内不会发生甚么事，"然后，"他以他惯常的镇静补充说，"我们肯定会被逮捕、审判、定罪和处决。"

那天晚上蒙日回家时，他的妻子把贝托莱的预言告诉了他。蒙日喊道，"我保证！我一点也不知道。我知道的是我的大炮厂干得好极了！"

在这以后不久，公民蒙日在他的住所被看门人检举了。这太过份了，即使蒙日也受不了。他机警地离开了巴黎，等这阵风暴过去了再回来。

1796年拿破仑的一封信开始了蒙日生涯的第三个阶段。他们两人在1792年已经见过面，但是蒙日不知道这件事。当时蒙日是五十岁，拿破仑比他年轻二十三岁。

拿破仑写道，"请允许我，为一个不得宠的年轻炮兵军官，在1792年从海军大臣那里受到热诚的欢迎，而向你致谢；他珍藏着这次记忆。你在[入侵]意大利的这支军队的将军身上会看到这位军官；他很乐意向你伸出赏识和友谊之手。"

蒙日和拿破仑之间的长期亲密的关系就这样开始了。阿拉戈①在评论这个独特的联盟时，引用了拿破仑的话，"蒙日爱我，就象一个人爱一位情人。"另一方面，蒙日似乎是拿破仑对之怀有慷慨无私和持久友谊的唯一的人。拿破仑当然知道蒙日帮助他取得了他在事业上的成功，但是那不是他喜欢这位老人的根本原因。

拿破仑信上所说的"赏识"，是指任命蒙日和贝托莱为特使，前往意大利选择绘画、雕塑和其他艺术品，这是意大利人[在被榨干钱财后]作为他们对拿破仑的战费的部分贡献而"捐献"的。蒙日在挑选这些战利品时，培养起对艺术的强烈的鉴赏力，而且成为一名不错的行家。

但是，实际卷入这种掠夺，使他于心不安。当比布置卢浮宫的需要多六倍的艺术品装船运往巴黎时，蒙日劝告要适可而止。他说，要治理一个民族，不管是为了他们自己的利益，还是为了征服者的利益，使他们贫穷得一无所有都是不行的。他的建议受到注意，母鹅又继续生她的金蛋了。

在意大利的冒险之后，蒙日在乌迪内附近拿破仑的大庄园里与他相遇，这两个人成了知己。拿破仑非常欣赏蒙日的谈吐和无穷无尽的丰富有趣的见闻，蒙日则从这位总司令亲切的幽默中得到乐趣。在公开宴会上，拿破仑总是命令乐队高奏《马赛曲》——"蒙日喜爱它！"他确实喜爱它，在坐下来就餐之前，他用最高的嗓子喊着：

"前进前进祖国的儿郎，
那光荣的时刻已来临！"

看见凯旋日同拿破仑时代的另一位伟大的数学家彭赛列一起到

191

① 阿拉戈(F. J. D. Arago)，1786—1853，天文学家、物理学家和科学家传记作者。

来，将是我们特殊的荣幸。

1797年12月，蒙日第二次前往意大利，这次是作为一个委员会的成员，去调查迪福将军被刺的"严重罪行"。这位将军是在罗马，站在路西恩·波拿巴身边时被枪击的。委员会（由这位殉难的将军的一位军人兄弟粗鲁地提前采取行动）有点愚蠢地建议，给顽固对抗的意大利人一个按照法国模式的共和政体。正如一位谈判者在出现进一步敲诈勒索的问题时所说的，"这一切必须结束，甚至征服得来的种种权利也必须结束。"

这位狡猾的外交官究竟正确到甚么程度，八个月后便见分晓，那时意大利人废除了他们的共和政体，这使拿破仑十分恼火；然后在开罗也抛弃了共和政体，使正好和他在一起的蒙日和傅里叶更加恼火。

拿破仑在1798年向十几个人透露过他侵略、征服和开化埃及的计划，蒙日就是其中之一。既然已经提到傅里叶，我们自然要回头谈谈他。

让·巴蒂斯特·约瑟夫·傅里叶于1768年3月21日生于法国的奥塞尔。他是一个裁缝的儿子。八岁时成为孤儿，一位慈善的太太被这个男孩子的良好的态度和严肃的风度举止深深吸引住了——她做梦也没有想到他会成为甚么样的人——把他推荐给了奥塞尔的主教。主教把傅里叶送进了当地本尼狄克教派办的军事学校，在那里，这个孩子不久就证明了他的天才。到十二岁时，他已经在为巴黎的主要教会人士撰写优美动人的布道稿，让他们拿去当自己的东西骗人。他在十三岁时是一个问题儿童，性格倔强，脾气暴躁，总之，是一个无所顾忌的恶棍。然后，当他第一次与数学接触时，他象着了魔似的，一下子转变了。他知道了原来是什么使他

苦恼，现在又是甚么治愈了他。为了给他的数学学习照明，他在别人以为他入睡以后，去厨房里收集蜡烛头，也在学校里凡是找得到蜡烛头的地方收集，他的秘密的书房是在一张屏风后面的火炉边。

好心的本尼狄克教士说服这个年轻的天才选择教士的职务作为他的职业，于是他进了圣·伯努瓦修道院，成为一名见习修士。但是傅里叶还没有来得及宣誓，1789年就来到了。他过去一直想当一名军人，仅仅因为是裁缝的儿子，得不到军官委任状，才选择了教士的职务。大革命使他自由了。他在奥塞尔的老朋友们宽宏大量，看出傅里叶决不会成为一名修士，他们把他领回去，让他当了数学教授。这是实现他的抱负的第一步——一大步。每当同事们生病时，傅里叶就替他们代课，从物理学到古典文学，什么都教，而且通常都比他们教得好。通过代课，傅里叶证明了他的多才多艺。

1789年12月，傅里叶（时年二十一岁）前往巴黎，把他关于数值方程解的研究论文送交科学院。这项工作超过了拉格朗日，至今仍然很有价值。但是由于傅里叶在数学物理方面的方法已超过了它，我们就不再进一步讨论它了；它可以在方程论的初级教材中找到。这个题目是他毕生感兴趣的题目之一。

傅里叶回到奥塞尔以后，参加到人民的一边，用他天生的口才——这使他还是一个小孩子时就能写出动人的布道词——煽动民众去结束那些十足的说教者（还有其他的人）。

傅里叶从一开始就是一个革命的热心家——直到革命失去控制为止。在恐怖时期，他不顾自身安危，抗议不必要的暴行。如果他生活在今天，傅里叶可能会属于这样的知识分子，他们幸运地完全不了解当真正的革命开始时，这种人是要首先被消灭的。他一心为了群众，和知识分子以为他们预见到的科学和文化的复兴。

傅里叶没有看见他所预言的对科学的慷慨鼓励，相反地，他不久就看见科学家们进了死刑犯押送车或逃亡国外，科学本身也在迅速高涨的野蛮暴行的潮水中，为自身的生存而斗争。

多亏拿破仑立下了不朽的功绩，他第一个清楚地看出了无知本身成事不足败事有余。他自己的补救办法最后也不见得就好多少，但是他确实认识到了文明这种东西是可能的。为了制止流血，拿破仑下令或鼓励开办学校。但是没有教师。凡是本来可以强迫来立即服务的人，早就掉脑袋了。必须训练一支一千五百人的教师队伍，为了这个目的，1794年创办了高等师范学校。傅里叶被聘为数学教授，借以奖励他在奥塞尔招募教师的努力。

193

这项任命，开创了法国数学教学的新纪元。记得已故的教授们年复一年死记硬背、照本宣科的那些死气沉沉的演讲，国民公会招请数学的创造者担任教学，而且根本禁止他们按照笔记讲课。要求站着讲课(而不是半醒半睡地坐在书桌后面讲课)，并且要在教授和全班学生之间自由交换问题和解答。演讲者有责任防止上课时间流于无益的辩论。

这个计划的成功甚至超过了人们的预期，并且导致了法国数学和科学史上最光辉的时期之一。在为期不长的师范学院和长期存在的综合工科学校中，傅里叶都表现出他的数学天才。在综合工科学校，他以罕见的从历史上引证的方法(许多问题他是第一个追溯到它们的起源的)，使数学课活跃了起来，他还巧妙地用一些有趣的实际应用，来说明抽象问题。

1798年，当傅里叶还在综合工科学校培训工程师和数学家时，拿破仑决定把他作为“文化军团”的一员，带他一起去开化埃及——“向不幸的人们伸出一只援助的手，把他们从残酷无情的枷锁下解放出来，他们已在这枷锁下痛苦呻吟了几世纪之久，最后，毫

不迟延地把欧洲文明的一切好处赋与他们。"

看起来可能难以置信，上面引用的话不是出自西格诺尔·墨索里尼1935年为侵略阿比西尼亚所作的辩解，而是出自阿拉戈1833年对拿破仑进攻埃及的崇高而人道的目标的阐述。看看顽固不化的埃及居民怎样接受蒙日、贝托莱和傅里叶几位先生竭力硬塞给他们的"欧洲文明的一切好处"，再看看欧洲文明的那三位火枪手本人从他们无私的传教工作中得到些什么，将是很有趣的。

1798年6月9日，五百艘船只组成的法国舰队到达马尔他，三天以后占领了该地。作为开化东方的第一步，蒙日按照综合工科学校办了十五所小学和一所中学。一个星期以后，这支舰队重新启航，蒙日登上拿破仑的旗舰"东方号"。每天早上，拿破仑提出一个节目供晚饭后讨论。不用说，蒙日是这些社交晚会上的明星。在这些一本正经地讨论的题目中，有地球的年龄、世界毁于大火或洪水的可能性，以及"行星上是否有居民？"最后一个题目使人想到，甚至在拿破仑的生涯中这个相当早的阶段，他的野心也超过了亚历山大。 194

1798年7月1日，这支舰队到达亚历山德里亚。蒙日是最先跳上岸的人当中的一个，拿破仑只是运用他作为总司令的权威，才制止了这位唱着《马赛曲》的几何学家参加对城市的袭击。决不能让"文化军团"在开始做开化工作以前，就在最初的战斗中被消灭；因此拿破仑派小船把蒙日和其余的人从尼罗河上游送往开罗。

当蒙日及其一伙象克娄巴特拉①及其朝臣一样，在他们的遮

① 公元前51年—公元前30年的埃及女王。——译者

阳伞下面打瞌睡时，拿破仑正坚定地沿着尼罗河岸进军，用枪弹和火药去开化未受教育的(而且装备很差的)居民。不久，这位勇猛的将军听见从河那方面传来一声该死的炮声。他猜到出了最糟糕的事，于是抛弃了他当时正在进行的战斗，驰马前去援救。该死的小船在沙堤上搁浅了。是蒙日象一个老兵似的开了炮。拿破仑来得正是时候，正好赶走岸上的攻击者，由于蒙日显著的勇敢，而给了他应得的奖章。蒙日终于成功了，嗅到了火药味。拿破仑因为救了他的朋友而非常高兴，并不因为拯救蒙日使他失去了一次决定性的胜利而后悔。

1798 年 7 月 20 日在金字塔一役中取得胜利以后，得胜的军队呐喊着涌进开罗。要不是有一点小小的失败，一切都会进行得热烈欢乐，象放焰火一般。迟钝的埃及人对蒙日先生、傅里叶先生和贝托莱先生在埃及学院(拙劣地模仿法兰西学院，创办于 1798 年 8 月27日)摆在他们面前的文化盛宴丝毫无动于衷，只是象木乃伊似地坐在那里，听任这位大化学家耍他的科学花招，热心的蒙日搞他的演奏会，学者派头的傅里叶就他们自己的干瘪文化的光荣，发表历史性的学术演讲；焦躁不安的学者们抛开了他们的沉着镇静，诅咒他们预期要予以开导的人象一群不能辨味的牲口，不能享受为了滋补他们的精神而贡献给他们的法国学问这顿丰盛的杂烩。狡猾的"不懂世故的"本地人，再次狠狠地愚弄了坚决要把他提高的这些人，他闭口不说话，等着一阵臭屁把蝗灾吹跑。为了保持他的尊严，直到微风吹拂时，这位不文明的埃及人却用他们能听懂的同一种语言，批评他的征服者们的优越的文明。拿破仑的三百名最勇敢的人，在一次大街上的争吵中被一阵猛烈的攻击杀死了。蒙日本人保住了他的气管，他的被围攻的同伙，仅仅由于表现了一种英雄行为才保全了自己，而为了这种英雄行为，今天在讲英

语的世界中，任何一个童子军都很可能得到一枚奖章。

顽固不化的埃及人方面的这种忘恩负义，使拿破仑大为伤心。他怀疑抛弃他的战友们是他道义上的责任，来自巴黎的令人不安的消息，加深了他的猜疑。在他离开巴黎期间，欧洲大陆上的事态发展急剧恶化了，为了维护法国的荣誉和为了他自己的安全，他现在必须赶回去。蒙日深得这位将军的信任；不如他受宠的傅里叶则没有得到信任。但是，傅里叶也感到满意，知道他在他的司令官专横的眼里还相当重要，所以他被留在开罗去教育埃及人或被杀掉，而拿破仑这时却由殷勤讨好的蒙日陪伴着，秘密取道回法国去了，甚至没有向在沙漠中为他吃尽苦头的部队道声再见。傅里叶不是总司令，没有资格在危险面前逃之夭夭。他不得已地留下了。只是到了1801年，在特拉法尔加战役以后，法国人终于承认去教化埃及人的应该是英国人，而不是他们，这时忠心耿耿——但是失去了幻想——的傅里叶才回到了法国。

蒙日和拿破仑回国的旅程，对他们两人来说都不如出航时那么有趣了。拿破仑不再预测世界的结局，而是花了大量心思，担心如果英国海员抓住他，他自己可能会有什么结局。他回想起对于在战场上开小差的人的惩罚，就是由行刑队秘密处死。英国人会不会象对待逃兵那样对待他呢？假如他必须死，他要戏剧性地死。　196

有一天，他说："蒙日，如果我们遭到英国人的进攻，必须在他们靠拢我们的那一时刻，把我们的船炸掉。我责令你执行这个任务。"

就在第二天，一条船出现在地平线上，全体船员都坚守岗位，准备打退进攻，但是那却是一条法国船。

“蒙日在哪里?”当一切骚乱都过去以后,有人问。

他们在火药库里找到了他,他手上拿着一盏点燃的灯。只要那是一只英国船的话——。它们总是在十五分钟之内爆炸,要不就等十五年,那就太迟了。

贝托莱和蒙日回到家时,看上去活象一对流浪汉。蒙日自从离家后就没有换过衣服,好不容易才混过了他妻子的看门人。

他和拿破仑继续保持着良好的友谊。在拿破仑最趾高气扬的日子里,蒙日可能是法国唯一敢于顶住他、对他讲真话的人。当拿破仑自己加冕称帝时,综合工科学校的学生群起反抗。他们是蒙日的骄傲。

一天,拿破仑说:“好啊,蒙日,你的学生几乎全都反抗我;他们明确地声称是我的敌人。”

“陛下,”蒙日回答道,“我们费了好大的事才把他们变成拥护共和政体的人;要他们变成帝制的拥护者,得给他们时间。另外,请允许我说,你变得相当粗暴了!”

象这种小小的争吵,在老相好之间算不得甚么。1804年,拿破仑为了表彰蒙日的功绩,封他为佩吕斯伯爵。蒙日那方面则感激不尽地接受了这一荣誉,而且佩戴了通常贵族用的全部服饰,忘记了他曾经投票主张废除一切贵族称号。

事情就这样在一片令人眼光缭乱的显赫气氛中进行下去,直到1812年,这一年本应该带来拿破仑的全胜时期,但却相反地带来了从莫斯科的溃退。蒙日太老了(他这时六十六岁),不能伴随拿破仑进入俄国,他留在法国,在他的庄园里,通过官方公告,热心地注视着大军的进展。当蒙日读到宣布法军遭到灾难的不幸的“第二十九号公告”时,他突然中风了。他在恢复以后说,“方才不知道的事情,我现在知道了;我知道我将怎样死去。”

蒙日不需要费劲去拉下最后一幕；傅里叶会帮助他把幕落下。傅里叶从埃及回来后，被任命（1802年1月2日）为伊泽尔省督，总部设在格勒诺布尔。这个地区当时正处在政治性的骚乱中；傅里叶的第一项任务就是恢复秩序。他遇到一场奇怪的反抗，并用一种荒谬可笑的方式把它平息了下去。傅里叶在埃及时曾经负责管理学院的考古研究。善良的格勒诺布尔市民们被学院的一些考古发现的宗教含义弄得心烦意乱，特别是对一些古迹所确定的年代，他们认为与《圣经》上的年代相矛盾。但是，当他在家乡附近进行进一步的考古研究，挖出一个他自己家族的圣徒、神圣的皮埃尔·傅里叶时，他们相当满意，并把傅里叶视为他们的密友；这位圣徒是傅里叶的叔祖父，他所以被作为圣徒来纪念，是因为他曾经创立过一个宗教教派。傅里叶的威信建立起来了，接着他就完成了大量有益的工作，排干沼泽地的水，扑灭疟疾，等等，使他的管区脱离了中世纪的状态。

正是在格勒诺布尔，傅里叶构思出不朽的 Theorie analytique de la chaleur（《热的解析理论》），这是数学物理学的一个里程碑。他在1807年提交了第一篇关于热的传导的论文。这篇论文很有发展前途，以致科学院把对热学的数学理论的贡献，设为它在1812年的大奖问题，以此鼓励傅里叶继续研究。傅里叶赢得了大奖，但并不是没有批评意见，他对这些意见感到很不愉快，但还是很好地接受了。

拉普拉斯、拉格朗日和勒让德是评阅人。他们在承认傅里叶的工作的创新和重要性的同时，指出数学处理上还有缺点，在严格性方面还有许多有待改进之处。拉格朗日本人曾经发现过傅里叶主要定理的一些特殊情形，但是由于他现在指出的困难，使他没

有能进行到一般结果。这些难以捉摸的困难具有那样一种性质，在当时要克服它们几乎是不可能的。还得经过一个多世纪的时间，人们才能够满意地解决它们。

顺便提一下，注意到这个争执代表着纯数学家和数学物理学家之间的一个基本区别，是很有意思的。纯数学家所能用的唯一武器，是精确、严格的证明。除非所引证的定理能够经得起它的时代所能提出的最严格的批评，否则纯数学家们是几乎不会用到它的。

198

另一方面，应用数学家和数学物理学家们很少那么乐观，会设想无限复杂的物质世界，能够用任何简单到了人类能够理解的数学理论去完全描述。他们对于这样一点也不会感到过分惋惜，即艾里的把宇宙作为一种微分方程的无限的、自解系统的美妙(或荒唐的)图画，实际上只是由数学的偏执和牛顿决定论所产生的一个幻想；他们在自己的后门有某个更真实的东西吸引着他们的注意——物质宇宙本身。他们能够试验并检验他们的故意不完善的数学推论，以之与经验判断相对照——这种判断，由于数学的真正性质，对于纯数学家是不可能的。如果他们的数学预见被试验所否定，他们并不象数学家可能做的那样，置物理证据于不顾，而是抛开他们的数学工具，去寻找更好的工具。

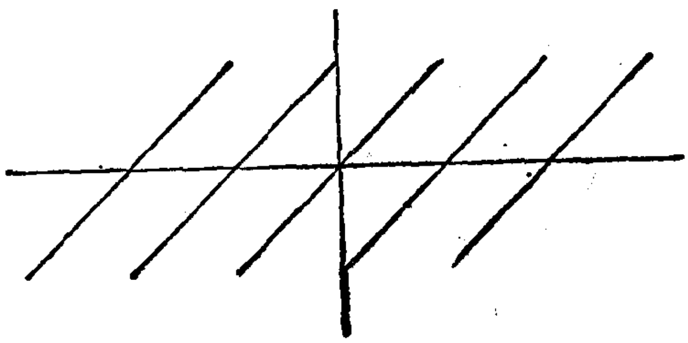
科学家们为了数学本身而对数学采取的这种冷淡态度，对于一类纯数学家，就象遗漏一个可疑的小小的下角标志，对另一类迂腐的学究一样令人激怒。结果是只有很少几个纯数学家对科学作出过重要贡献——当然，他们发明的许多科学家发现有用的(也许是不可缺少的)工具除外。这一切当中奇怪的是，正是反对科学家富于想象力地勇敢进行工作的那些有修辞癖的人，叫得最响，坚持数学与广泛传播的看法相反，认为它并不完全是一桩追根究底的、

小心翼翼力求准确的事情，而是创造性地富于想象力的，有时是不明确的，就象伟大的诗歌或音乐有时不十分明确一样。有时候，物理学家们在这方面，在数学家们自己的竞赛中打败了他们：开尔文勋爵无视傅里叶关于热学分析的杰作明显缺乏严格性，称它为“一首伟大的数学诗。”

正如已经说过的，傅里叶的主要进展的方向，是边界值问题（在牛顿那一章中阐述过）——微分方程的解适合指定的最初条件）也许是数学物理的中心问题。自从傅里叶把这个方法应用到热传导的数学理论以来，一个人才济济的世纪中的极有天赋的人们，已经比他曾经梦想过的走得更远了，但是他那一步是决定性的。他做的事情中，有一两件简单得可以在这里加以描述。

199

在代数中，我们要学习画出简单的代数方程的图形，并且很快注意到，我们所得到的曲线，如果延续到充分远的话，不会突然停止并永远终止。甚么样的方程会导致象下图中的无限重复的乏味的线段（长度有限，在两头都终止）的图形呢？这样的由直线或曲线的分开的线节构成的图形，在物理学中反复出现，例如在热学、声学和流体运动的理论中出现。可以证明，不可能用有限的、精确的数学表达式把它们表现出来。“傅里叶定理”提供了一个从数学上表达和研究这样的图形的方法：它把在某个区间内连续、或者在区间内只有有限数目的不连续点，且在区间内只有有限数目的转向点的已知的函数，表示成（在某些限制内）正弦或余弦的无限和，或正弦和余弦的无



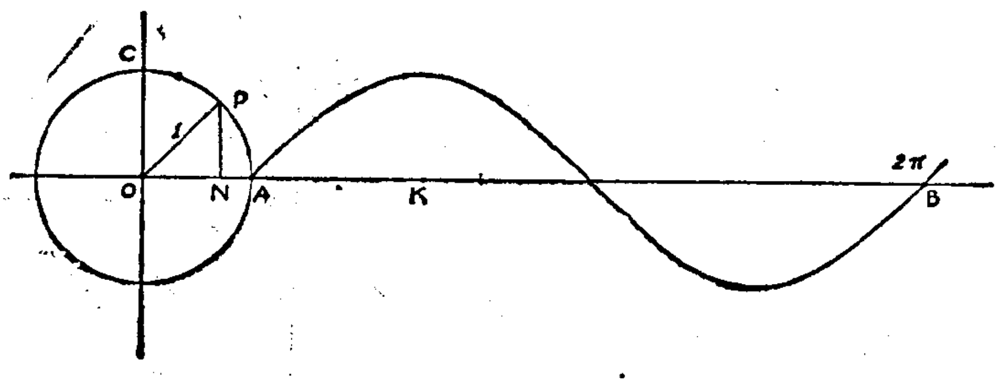
限和。"(这只是一个粗略的描述。)

既然提到了正弦和余弦，我们回想一下它们的最重要的性质，即**周期性**。设下图中圆的半径是1单位长度，通过中心O画互成直角的轴，如在笛卡儿几何中那样，标出AB等于2π单位长度；这

200

样，AB在长度上等于圆的周长(因为半径是1)。设点P从A开始，在箭头所示的方向描出圆的轨迹。画AN垂直于OA。那么，对于任何位置的P，NP的长度称为角AOP的**正弦**；ON则称为**余弦**；NP和ON象在笛卡儿几何中那样取它们的符号：NP在OA上方取正号，下方取负号；ON在OC的右边是正的，左边是负的。

不论P在任何位置，角AOP是四个直角(360°)的一部分，相应于弧AP在整个圆周上所占的部分。所以我们可以沿着AB标出与各段弧AP相当的2π的各部分，从而按比例标出这些角AOP。这样，当P在C处时，经过了整个圆周的1/4；因此，相应于角AOC，我们在AB上距$A(1/4)$处有点K。



在AB上的这些点的每一个上，我们画长度等于相应角度正弦的垂直线，根据正弦是正或负，决定垂直线在AB的上方或下方。这些垂直线的不在AB上的那一端落在画出的连续曲线上，就是**正弦曲线**。当P回到A点，开始重新沿着圆转时，曲线在B

以后重复，如此以至无限。如果 P 向相反方向旋转，曲线就向左重复。曲线在一个 2π 区间后重复：一个角度(这里是 AOP)的正弦是一个周期函数，周期就是 2π。把"正弦"[sine]这个字缩写成"sin"；如果 x 是任一角度，方程

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

表示 $\sin x$ 是 x 的以 2π 为周期的函数这一事实。

很容易看出，如果图中的整条曲线向左移动长度为 AK 的距离，那么它现在就是 AOP 的余弦的图形了。和前面一样，

$$\cos(x+2\pi)=\cos x,$$

"cos"是"cosine"(余弦)的缩写。

审查图形表明，$\sin 2x$ 通过它的全部周期比 $\sin x$"快一倍"，因此它的一个完整的周期的图形是 $\sin x$ 的一半那么长。同样，$\sin 3x$ 的完整的周期只需 $2\pi/3$，等等。对于 $\cos x$、$\cos 2x$、$\cos 3x$……也同样。 201

现在能够大致描述傅里叶的主要数学结果了。在已经提到的与"破碎"的图形有关的限制内，任何有一个确定得很好的图形的函数，都能用下面这种类型的方程

$$y=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\cdots\cdots$$
$$+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\cdots\cdots$$

表示出来，其中虚点表示两个系列按照指出的规则无限地继续下去，当 y，即任何 x 的已知函数，是已知时，系数 a_0，a_1，a_3，……，b_1，b_2，b_3，……是可以决定的。换言之，任何 x 的已知函数，比如说 $f(x)$，能够展成上述类型的级数，即三角级数或傅里叶级数。重复一下，所有这些都只在某些限制下成立，这些限制幸而在数学物理中不很重要；例外的情形是些很少或没有物理意义的、多少有些畸形的情形。再重复一次，傅里叶级数这项工作，是对边界值问题

的第一个伟大的进击。在牛顿那一章中给出的这种问题的例子是用傅里叶的方法解决的。在任何给定的问题中，都要求找出系数 $a_0, a_1, \cdots, b_0, b_1, \cdots$ 的适于计算的形式。傅里叶的分析提供了这个形式。

上面所描述的周期(简单周期)的概念，对于自然现象具有明显的重要性，潮汐、月相、季节，以及人们熟知的许多其它事情，本质上都是周期性的。有时候一个周期现象，诸如太阳黑子的反复出现，能够用一定数目的简单周期的图形相重叠而很好地逼近。那么这样一些情形的研究，就能化简为分析合成原来周期现象的单独的周期现象。

这个过程在数学上与在音乐上把音响分析成它的基本的和连续的和声是同样的。作为对音"质"的第一步粗略的逼近，只考虑基本的东西；通常只要几个和声的叠加就足以产生一个与理想的音响(其中有无限个和声)难以区分的音响了。同样的情形对于由"和声"或傅里叶分析考虑的现象也成立。人们甚至已经作了一些尝试，在反复出现的地震和年降雨量中去发现长周期(基本周期)。简单周期性的概念，在纯数学中和它在应用数学中同样重要。我们将会看到它被推广到多周期性(与椭圆函数和其它一些函数有关)，它又反作用于应用数学。

傅里叶完全知道他已经做出了头等重要的工作，他根本不注意对他提出批评的人，他们是对的，他错了，但是他按照自己的方法做的工作，足以使他有资格独立不羁。

当他1807年开始的工作在1822年完成，并收集在关于热传导的专著中时，人们发现顽固的傅里叶对他原先提交的论文一个字也没有改动。他就这样例证了弗朗西斯·哥尔登对所有作者的忠告"永勿怨恨批评，永勿回答它"的第二部分。傅里叶的不满在攻击

纯数学家们只专心于自己特定的事情而不在数学物理学方面盲目妄动是合理的。

一般说来，在拿破仑逃离厄尔巴岛，于1815年3月1日在法国海岸登陆时，傅里叶和法国的一切都进行得很顺利。所有的老兵们刚刚轻松自如地摆脱了使他们头痛的事，而这时造成头痛的原因又突然出现了，使得他们更加头痛。这时傅里叶在格勒诺布尔。他害怕民众会欢迎拿破仑归来，而再次发生无节制的狂热行动，于是他赶往里昂，去告诉波旁王室即将发生甚么事情。这些人一向愚蠢，不肯相信他。傅里叶在返回途中得知格勒诺布尔已经投降。傅里叶本人在布古万被俘，并被带到拿破仑面前。他现在面对的是他在埃及时十分了解，并学会用他的脑子而不是用他的心去怀疑的同一位老指挥官。拿破仑正俯身在一幅地图上，手里拿着一对罗盘。他抬起头来。

"喂，省督先生！你也向我宣战啦？"

"陛下，"傅里叶结结巴巴地说，"我的宣誓使我有责任这样做。"

"你说责任？你没有看见全国没有一个人同意你的主张？别自以为你的作战计划会吓倒我。我难受的只是看见在我的对手当中有一个埃及人，一个曾经和我一起风餐露宿的人，一个老朋友！还有，傅里叶先生，你怎么能忘记你之所以有今天，全靠我的栽培？"　203

傅里叶那家伙，记得拿破仑无情地把他丢在埃及，竟然能够听信这样的废话，而且喜欢它，他说了一大堆赞扬拿破仑的好心和他那强健的胃的话，但是极少提到他的头脑健全。

几天以后，拿破仑问这位现在效忠于他的傅里叶，

"你认为我的计划怎样？"

“陛下，我相信你会失败。你在路上会遇到一个狂热分子，那就一切都完了。”

“呸！没有人拥护波旁王朝——就连狂热分子也不拥护，至于失败嘛，你已经从报纸上看到，他们把我定为不合法的了。我本人要更加宽容：我满足于把他们赶出杜伊勒利宫！”

本性难移和拿破仑的自负应该结合为一体，而不应该把它们当做两回事。

第二次王政复辟以后，人们发现傅里叶在巴黎典当他的财物，以维持生计，但是不等他饿死，老朋友们可怜他，为他谋到了塞纳省统计局长的差事。1816年，科学院打算选举他为科学院院士，但是波旁政府下令，对他们以前的对手的朋友，不能以任何方式给予荣誉。科学院坚持自己的意见，于次年选举傅里叶为院士。波旁王朝反对傅里叶的这种作为，看来未免气量太小，但比起他们对可怜的老蒙日的作法，那就很大度了。是贵族就得引为高尚！

傅里叶的最后几年，是在黯淡的谈话中度过的。作为科学院的终身秘书，他总是能找到听众的。要说他吹嘘他在拿破仑手下取得的成就，那实在是说得太婉转了。他变成了一个令人难以忍受的、大喊大叫的讨厌的家伙。他没有继续他的科学研究工作，而是向他的听众吹嘘他打算做甚么。然而，他对科学的发展已做了比他份内更多的工作，而如果任何人类的工作堪称不朽的话，傅里叶的工作应该说是不朽的。他不需要自吹自擂或虚张声势。

傅里叶在埃及的经历，使他养成了一种奇怪的习惯，这个习惯可能加速了他的死亡。他认为，沙漠的炎热是对健康最理想的条件。他不仅把自己象木乃伊似地裹起来，还住在那样的房子里，他那些没有被烤熟的朋友们说，屋里热得比地狱和撒哈拉沙漠加在一起还要热。1830年5月16日，他因心脏病(有人说是动脉瘤)

去世，享年六十三岁。傅里叶属于一群杰出的数学家，他们的工作是那么重要，他们的名字已成为各种文明语言中的形容词。

蒙日的衰亡要慢一些，也更悲惨些。在第一次王政复辟以后，拿破仑对他一手造成的势利集团感到激怒和仇恨，他的权力刚刚一消失，这个势利集团就很自然地拆他的台。再次掌权后，拿破仑打算对这些忘恩负义的人狠狠地整治一下。蒙日这个善良的老平民，劝他发慈悲和明白事理：拿破仑可能会有一天发现他自己陷于绝境(在一次地震切断了所有的逃路以后)，应该对这些忘恩负义的人的支持表示感激。拿破仑平静了下来，明智地恩威并施。这样宽宏大量的处理，完全是由于蒙日的缘故。

拿破仑从滑铁卢逃跑以后，让他的部队自己想办法尽量逃出困境，蒙日回到巴黎。这时傅里叶的忠诚已经冷了下来；蒙日的忠诚却达到了沸点。

学校的历史课程常常讲到拿破仑的最后的梦想——征服美洲。蒙日的说法不同，并且是在一种更高——事实上是高得难以置信——的程度上。在被敌人包围，一想到不能在欧洲进行进一步的征服，而被迫闲下来无所事事就心惊胆战的情况下，拿破仑把他敏锐的目光转向西方，匆匆一瞥，从阿拉斯加到好望角，扫视了美洲。但是，象一个不健康的魔鬼一般，波拿巴渴望成为一个修士。他宣称，只有科学能够使他满意；他要成为第二个和无限伟大的亚历山大·冯·洪堡。

他向蒙日承认：“我希望在这个新的事业中，留下与我相称的著作和发明。”

究竟甚么是能够与一位拿破仑相称的工作呢？接着，这位掉下来了的鹰概述了他的梦想。

“我需要一个同伴，”他承认说，“首先让我跟上科学的现状。然后你[蒙日]和我将从加拿大到好望角，漫游整个欧洲大陆；在这漫长的旅途中，我们将研究科学界还没有作出定论的、地球物理的全部奇异的现象。”妄想狂？

205 “陛下，”蒙日惊呼道——他将近六十七岁了——“你的合作者已经找到了；我跟你一起去！”

又和他过去一模一样了，拿破仑粗暴地说出了他的想法！这个心甘情愿的老兵会妨碍他从巴芬湾到巴塔戈尼亚的闪电般的进军。

“你太老了，蒙日，我需要一个比较年轻的人。”

蒙日蹒跚地走开，去寻找“一个比较年轻的人。”他找到暴躁的阿拉戈，作为他那精力充沛的主子的理想旅伴。但是尽管他口若悬河，把这件事说得无尚光荣，阿拉戈吸取了他的教训，他指出，一个将军，能够象拿破仑在滑铁卢干的那样抛弃他的队伍，是不能当作领袖随便跟他到甚么地方去的，即便去舒适的美洲也不行。

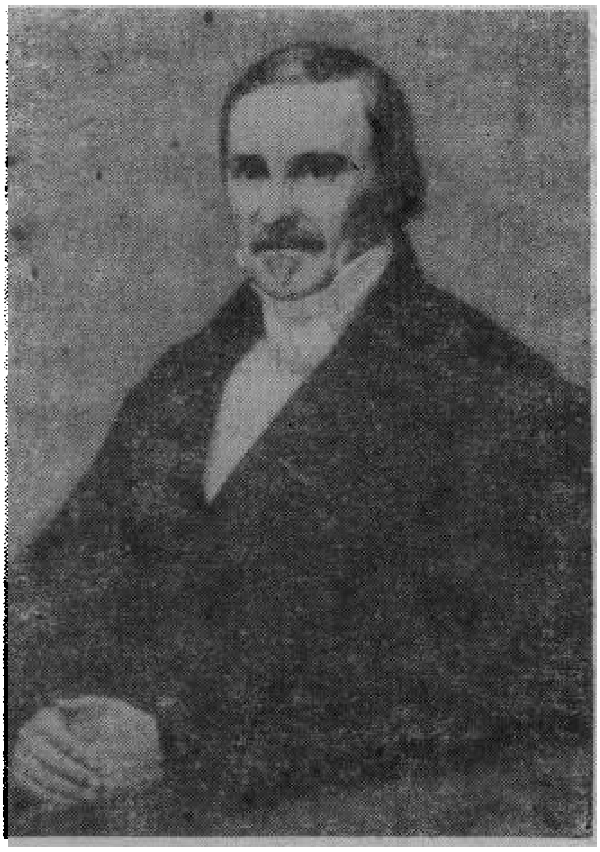
进一步的协商被英国人粗暴地中止了。到10月中，拿破仑已在考察圣赫勒拿岛了。留着征服美洲用的大量金钱落入了别人的口袋，而没有到科学家们手中，密西西比河畔或亚马逊河畔也就没有建立起“美洲学院”，来与它俯瞰尼罗河的庞大的孪生学院相比美。

蒙日既然享受了帝制时期的面包，现在该尝尝盐了。他作为一个革命者和那个自命不凡的科西嘉人的心腹的记录，使他的脑袋成为波旁王室极想得到的东西，而蒙日为了保住他的脑袋，便从一个贫民窟躲到另一个贫民窟。就算完全是出自气量狭小，装得神圣不可侵犯的波旁王室给予蒙日的待遇也该受到谴责。他们竟至狭隘到了剥夺这个老人最后的荣誉——这项荣誉和慷慨的拿破

仑毫无关系。1816年，他们命令把蒙日从科学院开除出去。这时象兔子一般驯服的院士们顺从了。

波旁王室的最后一点卑劣的作法，给蒙日的葬礼增加了光彩。正如他曾经预见到的那样，他在一次中风之后，经过长时间的昏迷不醒，然后去世。综合工科学校的年轻人是蒙日的骄傲，而他是他们的偶像。他曾经从拿破仑飞扬跋扈的干涉下保护过他们。1818年7月28日蒙日逝世时，综合工科学校的学生们要求准许他们参加葬礼。国王拒绝了他们的请求。

综合工科学校的学生是很守纪律的，他们遵守了这道禁令。但是他们比胆小的科学院院士机智勇敢。国王的命令仅限于葬礼。次日他们全体前往墓地，在他们的老师和朋友、加斯帕尔·蒙日的坟墓上献上一个花圈。



彭赛列

第十三章 光荣的日子

彭 赛 列

射影几何以最大的简便为我们打开了我们科学中的新领域，它恰如其分地被称为通往它自己的独特知识领域的最佳道路。

——费利克斯·克莱因

在第一次世界大战中，有好几次当法国军队被紧紧追赶又没有增援部队的时候，最高司令官把一个女歌手从她的闺房中拉出来，火速送往前线，给她从头到脚披上三色旗，命令她对精疲力竭的士兵唱《马赛曲》，这样来挽救当天的败局。女歌手唱完歌就坐上骄车溜回巴黎；振奋起来的军队向前挺进，第二天早晨，不无讽刺地，被检查过的报纸又一次一致向容易受骗的民众保证，“光荣的日子来到了”——没有提死亡人数。

在1812年，光荣的日子还在路上呢。女歌手们没有伴随着拿破仑·波拿巴的五十万大军向俄国胜利进军。当俄国人在战无不胜的大军面前退却时，法国士兵自己唱着歌，无垠的平原上回荡着激动人心的歌声，这歌声把暴君们从他们的宝座上赶下来，把拿破仑升到他们的位置上。

一切都进行得象最热情的歌手能够希望的那样光荣：在拿破仑越过涅曼河的六天前，他那杰出的外交策略间接地激怒了麦迪逊总统，使他把美国投入了一场对英国的疯狂的战争；俄国人比以往更快地朝莫斯科败退，大军勇敢地尽全力赶上反抗的敌人。在鲍罗季诺，俄国人掉过头来，战斗了，又败退了。拿破仑没有碰到反抗——除了来自反复无常的天气的阻力——继续进军莫斯科，从那里，他通知沙皇，他愿意考虑全体俄国部队的无条件投降。莫斯科的能干的居民们在总督的率领下，自己来处理这些问题，他们坚壁清野，放火烧了他们的城市，把它烧成平地，大火熏得拿破仑和他的全体士兵无处存身。拿破仑非常懊恼，但他仍然控制着局势，他无视这个明显的暗示——到此为止对他在军事上的一意孤行的第二个或第三个暗示——即“以剑杀人者必死于剑下”，不久就命令他的车夫快马加鞭，越过这时已上冻的平原火速驰回，去安排他与布吕歇尔在莱比锡会合，而让大军步行回国或者冻死，这就

207

随它的便了。

在被抛弃的法国军队中，有一个年轻的工程军官，让·维克托·彭赛列(1788年7月1日—1867年12月23日)，他在巴黎综合工科学校学习时，和后来在梅斯的军事学院期间，曾经受到蒙»(1746—1818)的新画法几何和较年长的卡诺的«位置的几何(1803年出版)的启发。卡诺(拉扎尔-尼古拉-玛格丽特·卡诺，1753年5月13日—1823年8月2日)的革命的、虽然多少有点儿反动的大纲，是为了“把几何从分析的难解的符号中解放出来”而制定的。

彭赛列在他的经典著作«分析学和几何学的应用»(1862年第二版，1822年首次出版)的序言中，详细记述了他在那场灾难性的从莫斯科撤退中的经历。1812年12月18日，内伊元帅率领下的法军精疲力尽的残部，在克拉斯诺伊吃了败仗。在那些留在冰冻的战场上等死的人中，有年轻的彭赛列。他那身工程军官的制服救了他的命。一个搜索队发现他还活着，就把他带到俄军本部审问。

作为一个战俘，这个年轻的军官被迫穿着他的破烂的制服步行了近五个月，越过冰封的平原，只靠一点儿配给的黑面包维持生命。在冷得连温度计上的水银柱都经常冻住的严寒中，彭赛列的很多伙伴都悲惨地死在路上，但是他强健的体力使他走完了全程，在1813年3月，他进了伏尔加河畔萨拉托夫的监狱。一开始他疲惫得不能进行思考。但是当“灿烂的四月的太阳”恢复了他的活力时，他记起他曾经受过很好的数学教育，为了使艰难的流放生活稍微好过一点，他决定尽可能多地把他学过的东西重写出来。正是这样，他创立了射影几何学。

一开始，他没有书，只有很少一点点工具，他从算术到高等几

何和微积分，回忆了他所知道的全部数学。彭赛列还辅导跟他一起的军官们为考试作准备，因为要是他们还能再看见法国，他们是必须参加这些考试的，这些工作，使他快活了起来。有一种传说认为，一开始彭赛列只有从使他不至于冻死的可怜的小火盆中捡出来的几小块木炭，用来把他的图形画在牢房的墙上。他作了一个有趣的观察，实际上他学过的数学中的所有细节和复杂的展开，都已经忘得精光了，而一般的、基本的原理，在他的记忆中仍然象过去一样清晰。对于物理和力学也是这样。

1814 年 9 月，彭赛列回到了法国，随身带着"在萨拉托夫的俄国监狱里(从 1813 年到 1814 年)写的七个笔记本的手稿，以及若干其它的文字材料，旧的和新的都有"，在这些材料中，他这个二十四岁的年轻人，给了射影几何自从德扎尔格和帕斯卡在十七世纪开始这门学科以来的最强的推动力。他的杰作的第一版(已经提到过了)是 1822 年出版的，书中没有上面引用过的详细的"为他的生命辩解"的东西，但是它发动了十九世纪的一个巨大的浪潮，向前推动了射影几何、一般的现代综合几何，以及代数运算中出现的"虚数"的几何解释，即从几何上把这种"虚数"解释为空间的"理想"元素。它也提出了强有力的、(一时)争论不休的"连续的学说"，我们过一会儿就叙述这个学说，该学说把显然没有关系的图形的性质统一成一致的、独立的统一体，从而大大简化了几何结构的研究。在彭赛列的比较一般的观点下，例外和棘手的特例只不过是已经熟知的事物的不同方面。这部经典论著也充分利用了有创造性的"对偶原理"，介绍了彭赛列本人设想出来的"互反"方法。简言之，这个年轻的军事工程师给几何添加了整整一大批新武器，而他曾经被丢在克拉斯诺伊的战场上等死，要不是他的军官制服使他看上去象一个俄军本部要询问的可能的对象，他确实会在天亮前死

去。

209 这以后的十年(1815—1825年)，彭赛列作为军事工程师的职责，使他极少有时间实现他的真正抱负——在几何中开拓他的新方法。许多年之后他才得到解脱。彭赛列高度的责任感和他必然的办事效率，使他容易成为目光短浅的上司们的牺牲品。有些要他承担的任务，只有具有他这样才干的人才能完成，例如，在梅斯创立一所实用机械学的学校，在综合工科学校改革数学教育。但是关于防御工事的报告，他在国防委员会的工作，以及他在伦敦和巴黎的国际博览会机械部的主管职务(1851—1858年)，只提一提他的无数日常工作中的这几项就够了，这些都能够由才干较低的人去完成。不过，他的重要的科学功绩并没有被忽视。科学院选举他(1831年)做拉普拉斯的继任者。出于政治上的原因，彭赛列在三年之后才接受了这项荣誉。

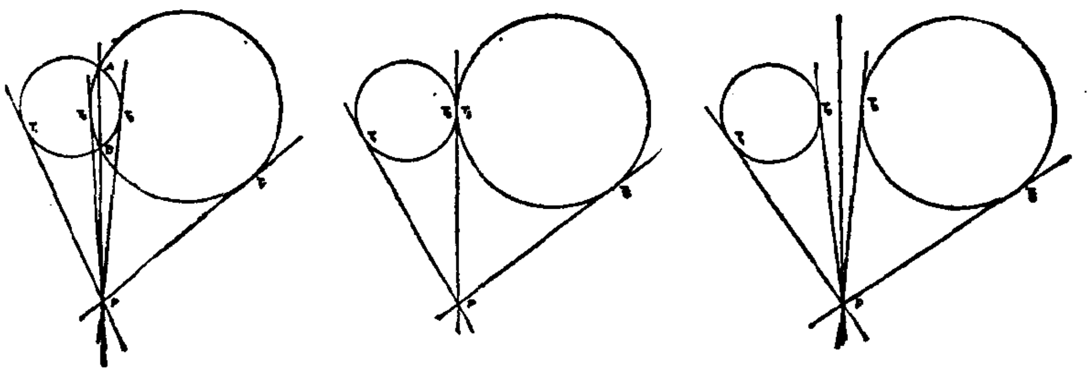
彭赛列成年后的整个生活是他自身两个方面的长期内心冲突的过程，一个方面是生就去做永恒的工作，另一个方面是接受目光短浅的政治家和愚钝的军事专家们硬推给他的一切琐碎或肮脏的工作。彭赛列自己渴望逃脱，但是在拿破仑的军队中训练得深入骨髓的错误的责任感，迫使他舍本逐末，只务虚名，而不求实效。他没有过早地和长期地患精神分裂，是他体格健壮的明显证据。而他差不多到七十九岁去世时一直保持着他的创造能力，则是他的压制不住的天才的一个闪光的证明。当他们想不出更好的事情让这个极有天赋的人打发他的时间时，他们就派他在法国各地无目的地跋涉，检查纱厂、丝厂和亚麻布工厂。他们并不需要一个彭赛列去做那种事情，他也知道这一点。要是他的独特的才能在这些事情上是必不可少的，那么在法国他是决不会反对去做这些事的人，因为他决不是那种有才智的假装正经的人，这种人认为每一次

科学与工业一握手，就会失去她长期保持的纯贞。但是他并不是唯一能找到的做这种工作的人，因为也许巴斯德①就在从事解决啤酒、蚕和人类各自的疾病这些同等重要的事情。

我们现在来看看，彭赛列为了征服射影几何，设计或改造的一、两件武器。首先是他的"连续性原理"，它涉及到当一个图形部分遮住了(由投影或其它方法)另一个图形时，几何性质的不变性。这无疑是相当含糊的，但是彭赛列自己对这个原理的陈述，也从来不是很精确的，并且事实上，把他卷入了与更加保守的几何学家的无休止的争论之中，他有礼貌地称这些几何学家为老顽固——当然，总是用了适合一个官员和绅士身份的高贵的措词。原理具有很大的启发式的价值，但是它本身并不总能为它所提示的定理提供证明，由于留心到这一点，我们可以从几个简单的例子中看出它的精神。

210

想象两个相交的圆。设它们相交在点 A 和点 B。用直线把 A 和 B 联接起来。图形明显地标出了两个实点 A、B 和两个圆的公共弦 AB。现在想象两个圆被渐渐拉开，公共弦很快就成了两



① 巴斯德(Pasteur，1822—1895)，法国化学家，细菌学家。——译者

个圆在它们的接触点处的公共切线。在目前的任何阶段，下面的定理(通常是中学几何中的一个练习)成立：如果在公共弦上任取一个点 P，可以从它向两个圆做四条切线，如果这些切线与圆接触的点是 T_1, T_2, T_3, T_4，那么线段 PT_1, PT_2, PT_3, PT_4 长度相等。反过来，如果问所有的点 P 应该在什么地方，才能使两个圆的四条切线线段相等，答案是在公共弦上。用通常的语言简单叙述所有这一切，我们说，点 P 移动使得从它到两个相交圆的切线线段相等，那么 P 的轨迹(只意味着位置)是两个圆的公共弦①。所有这些都是熟知的和直接了当的；没有如一些人可能会说的，在"连续的原理"进入的下一步，会有神秘和不可理解的成份。

把这两个圆完全分开。它们的两个交点(或者在最后的一瞬间，它们相接触的一点)在纸上不再看得见了，"公共弦"被留下来悬在两个圆之间，显然和两个圆都不相交。但是我们知道，仍然有一个切线线段相等的轨迹，而且很容易证明这个轨迹是一条垂直于连接两个圆心的直线，就象原来的轨迹(公共弦)那样。仅仅作为一种表达方式，如果我们反对"虚数"，我们就继续说两个圆相交在平面的无限部分的两个点，即使两个圆已经被分开了，我们也说新的直线轨迹仍然是圆的公共弦：交点是"虚的"或"理想的"，但是联接它们的直线(新的"公共弦")是"实的"——我们确实把它画在了纸上。

如果我们以笛卡儿的方式，写出圆和直线的代数方程，那么我们在求方程交点的代数中所作的一切，在扩大了的几何中都有它独特的对应，而如果我们不首先扩充我们的几何——或者至少增加它的词汇，以记录"理想的"元素——许多在代数上有意义的东

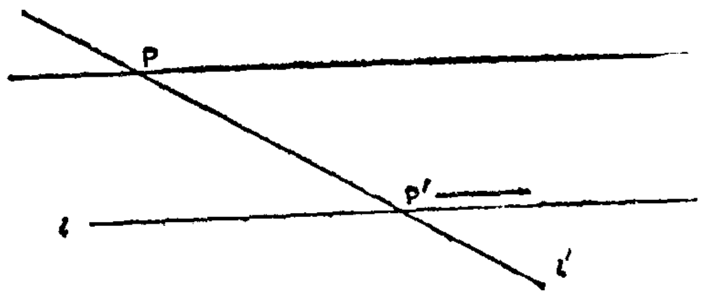
① 重要的是，如果点 P 落在圆的外面，切线是实的(可见的)；如果 P 在圆的内部，切线是"虚的"。

西在几何上就是无意义的。

所有这些当然都要求在逻辑上讲得通，而凡是需要的地方也都讲得通，那就是说，包括在几何上有用的"连续性原理"的应用是讲得通的。

平行线提供了这个原理的一个更重要的例子。在说明这个例子之前，我们不妨重复一个可敬的、著名的法官的话，这是几天前他在有人对他讲起这件事情时说的。这位法官不舒服；一个业余数学家想使这位老朋友高兴起来，就给他讲了些关于无限的几何概念的东西。那时他们正在法官的花园中散步。当法官听到"平行线相交于无限"时，他停了下来，一动不动。"布兰克先生"，他特别着重地说，"任何说平行线相交于无限或其它任何地方的人，绝对没有正确的判断力"。为了防止争论，我们可以象以前那样说，这只是一种表达方式，用来避免恼人的例外和单独情形成为令人恼怒的特殊情形。但是一旦对这种说法的意见一致了，逻辑上的一致性就要求它贯穿始终，而无需拘泥于逻辑语法和措辞法的规则，彭赛列就是这样做的。 212

为了了解这种说法的合理性，想象一条固定的直线 l 和一个不在 l 上的点 P。通过 P 随便画一条直线 l' 与 l 相交于 P'，再想象 l' 绕 P 旋转，使得 P' 沿着 l 向远处滑动。P' 什么时候停止滑动呢？我们说它停止滑动，是在 l 和 l' 成为平行时，或者，如果我们愿意的话，也可以说是在交点 P' 在无限时。由于已经找出过的



原因，这种说法是方便的和可以作为参考的——不是象法官可能认为的那样，是疯人院的产物，而是在几何中可以做的有趣的、有时是非常实用的事。

以同样的方式，在无限处添加“理想”点、线、平面，或者“区域”，就可以丰富直线、平面和三维空间(以及更高维的空间)的可见的、有限的部分。要是法官碰巧看到了这一点，他可能会欣赏下面这个关于无限在几何中的作用的令人吃惊的例子：平面上的任何两个圆相交于四个点，其中的两个点是虚的，在无限远处。如果这两个圆是同心的，它们在两个落在无限远的直线上的点上互相接触。还有，平面上的所有的圆都通过在无限远处的同样两个点——它们通常用 I 和 J 表示，有时被不大恭敬的学生称作艾萨克[Issac]和雅科布[Jacob]。

在帕斯卡那一章，我们叙述了几何中射影性质与度量性质的不同的意义。在此我们可以回头看一看阿达玛对笛卡儿的解析几何的看法。阿达玛在其它的事情中观察到，现代的综合几何通过提出在代数和分析中的重要研究，为一般的几何报答了代数。这个现代的综合几何就是彭赛列研究的对象。虽然这一切当时看上去可能相当复杂，我们可以从十九世纪四十年代取一个环来完成这条链子，因为这不仅对纯数学史，就是对最近的数学物理也确实是重要的。

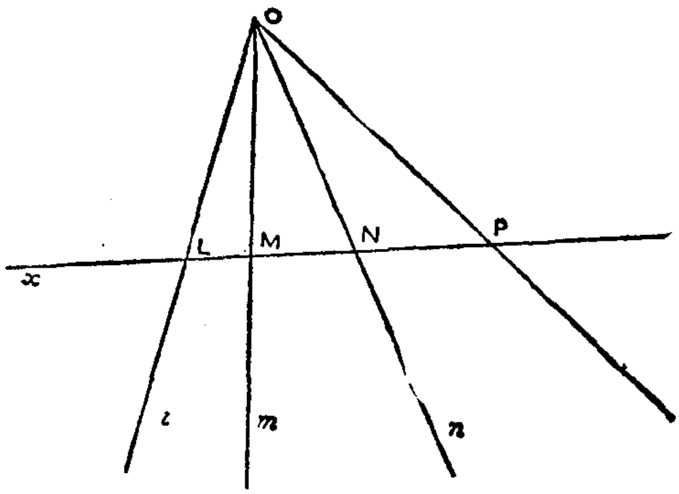
从十九世纪四十年代取来的这个环，是由布尔，凯莱、西尔维斯特以及其他人开创的不变量的代数理论，它(如将在后面一章中叙述的)对当前的理论物理具有根本的重要意义。彭赛列和他的学派的射影几何在不变量理论的发展中起了重要作用：几何学家们发现了许多在射影下不变的图形的性质；十九世纪四十年代的代数学家们，特别是凯莱，把几何的射影作用转换成分析学的语言，

并把这个转换应用到表达几何关系的代数的笛卡儿方式上，这样他们就能在代数不变量理论的构思中取得惊人的快速进步。要是德扎尔格这位十七世纪的勇敢先驱者，能够预知他的巧妙的射影方法会导致什么结果，他可能也会大吃一惊的。他知道他作出了一些很好的东西，但是他也许根本不知道它究竟有多好。

德扎尔格去世时，艾萨克·牛顿是一个二十岁的年轻人。没有证据表明牛顿曾经听说过德扎尔格的名字。即使他听到过，要是他预先知道，由他这个年长的同代人锻造的不起眼的一环，会形成一条有力的链子的一部分，这条链子在二十世纪会把他的宇宙万有引力定理从被认为是不朽的根基上拉下来，他也会吃惊的。因为如果没有从凯莱和西尔维斯特的代数工作中自然发展起来的张量分析这个数学工具，爱因斯坦或任何其他人就不可能挪动牛顿的宇宙万有引力。

214

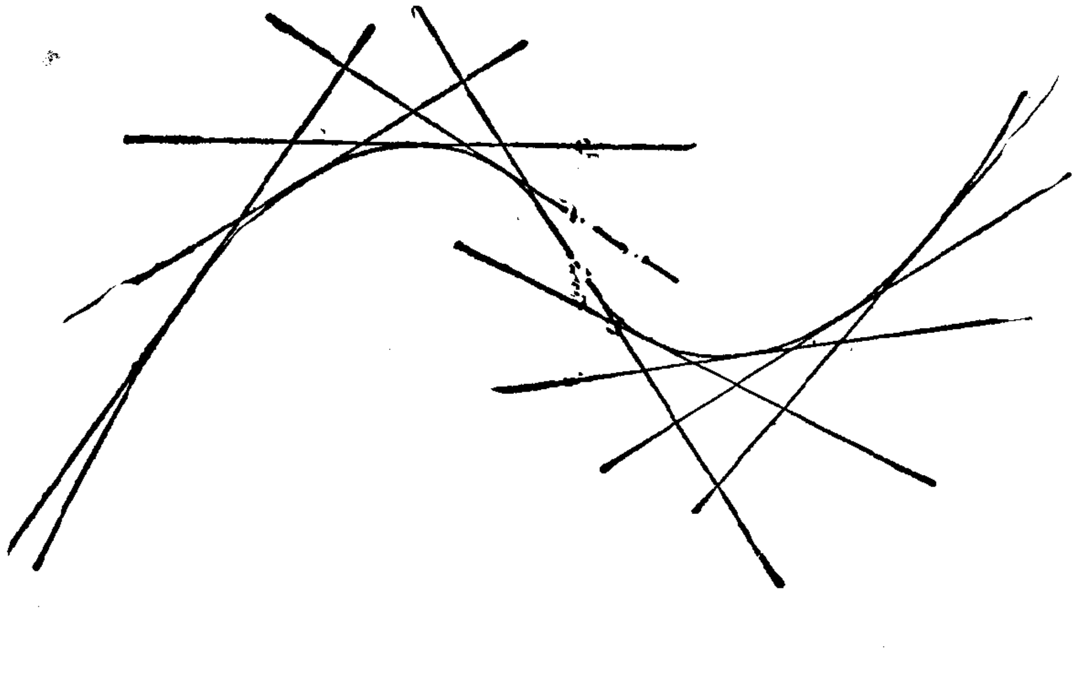
射影几何中的一个有用的概念是交比。通过一个点 O，任意画四条直线 l, m, n, p。再画与这四条直线相交的任意一条直线，记 x 与四条直线的交点分别为 L, M, N, P。这样我们就有了 x 上的线段 LM, MN, LP, PN。由此形成比例 $\frac{LM}{MN}$ 和 $\frac{LP}{PN}$。最后我们取这两个比例的比，就得到了交比 $\frac{LM \times PN}{MN \times LP}$。关于这个交比的最令人吃惊的事情是，对于直线 x 的所有位置，它都有同样的数值。



后面我们要谈到弗利克斯·克莱因把欧几里得几何和普通的非欧几何统一到一个广泛的几何之中。这个统一之所以可能是因为，凯莱修改了度量几何据以成立的距离和角度的通常概念。在这个修改中，交比起了主要作用，凯莱通过交比，并利用他自己设想的"理想"元素，终于使量度几何成为投影几何的一部分。

为了结束对彭赛列用过的这种工具的不完全的描述，我们要提一下硕果累累的"对偶原理"。为简单起见，我们只考虑这个原理在平面几何中起的作用。

首先注意到，可以用两种方法考虑连续曲线：或者把它看成由动点生成的，或者把它看成由直线转动扫出来的。为了了解后一种方法，想象在曲线的每一点上画出的切线。这样点与线就相对



215

于曲线密切和交互地联系在一起了：通过曲线上的每一个点，有一条曲线的线；在曲线的每一条线上，有一个曲线的点。在前面这个句子中，用“在”代替“通过”，那么在“：”之后用“；”分开的两个肯定说法，除了“点”和“线”的位置是互换的以外，是相同的。

作为一个术语，如果一条线通过一个点，我们说这条线(直线或曲线)是在这个点上，并且我们注意到，如果一条直线在一个点上，那么这个点必在这条直线上，反之亦然。为了使这个对应具有普遍性，我们给欧几里得几何(通常的中学几何)在其中有效的通常的平面，即所谓的度量平面，“贴上”已经描述过的那种“理想”元素。这样添加的结果就是“射影平面”：一个射影平面包含着一个度量平面的所有普通的点和直线，此外，还包含着一组理想点，这些理想点都被假定为落在一条理想的直线上，以致每一条普通的直线上都有一个这样的理想点。①

用欧几里得的语言，我们说两条平行线有同样的方向；用射影的术语，这就成了“两条平行线有同样的理想点”。再者，在旧的几何中，如果两条或更多条直线有同样的方向，它们是平行的；在新的几何中，如果两条或更多条直线有同样的理想点，它们是平行的。在射影平面上的每一条直线，被设想为在它上面有一个理想点（“在无穷远处”）；所有的理想点被认为构成一条理想线，“在无穷远处的直线”。 216

这些概念的目的，是要避免由于假设的平行的存在而必要的欧几里得几何的例外的陈述。这点在关于彭赛列对连续性原理的阐述中，已经评论过了。

① 这个定义，和很快要给出的具有同样性质的其它定义，都取自已故的韦斯利·扬所著《投影几何》(芝加哥，1930年)。任何学过普通几何的一般中学课程的人，都可以理解这本小书。

有了这些准备，现在可以叙述平面几何中的对偶原理了：平面射影几何中的所有命题都是成对出现的，因而通过交换"点"和"线"这两个字所起的作用，从特定的命题对中的一个命题，立刻就能推出另一个命题。

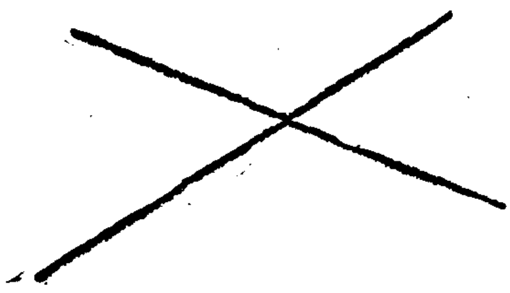
彭赛列在他的射影几何中把这个原理利用到了极点。随便翻开任何一本关于射影几何的书，我们注意到许多页的命题都是印成两栏的，这是彭赛列采用的一种方法。在两栏中对应的命题是互成对偶的；如果证明了其中的一个，就没有必要证明另一个了，因为对偶原理就包含了后一个的证明。这样，不用付出附加的劳动，几何的内容一下就翻番了。作为对偶原理的一个例子，我们给出下面一对。读者可能会认为这并不怎么令人兴奋。费力大收效小。它能做得更好吗？

在左栏(217 页) 中的命题是我们已经知道的帕斯卡的神秘的六边形；右栏的是布里安生(1785—1864)利用对偶原理发现的定理。布里安生在综合工科学校上学的时候，发现了这个定理；它在 1806 年发表在该校的«校刊»上。两个命题的图形看上去毫不相干。这可以表明彭赛列使用的方法的力量。

布里安生的发现是一个把对偶原理置于几何图形上的发现。这个原理的力量的更加惊人的例子，可以在任何一本关于射影几

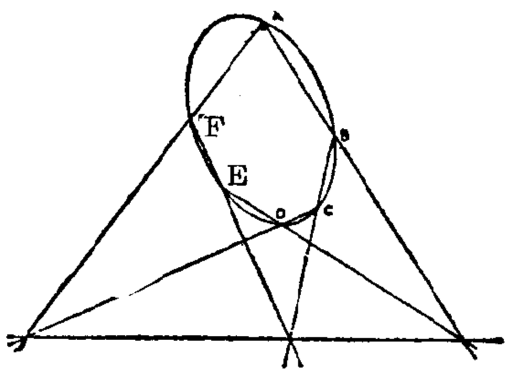


两个相异的点在一条直线上，且仅在一条直线上。

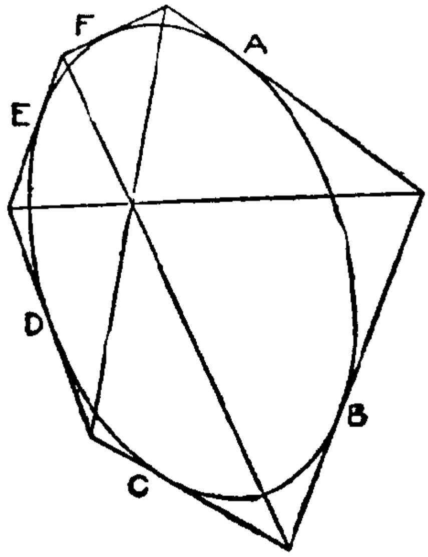


两条相异的直线在一个点上，且仅在一个点上。

何的教科书中找到，特别是在这个原理向通常的三维空间的推广中找到。在这个推广中，点和面这两个字所起的作用可以互换；直线保持原样。

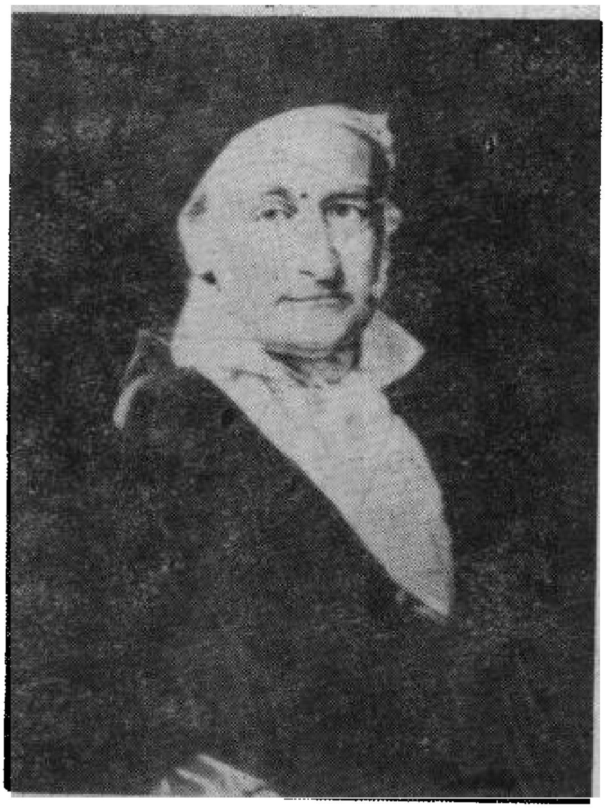


如果 A、B、C、D、E、F 是一个圆锥截线上的任意点，那么直线偶 AB 和 DE，BC 和 EF，CD 和 FA 的交点在一条直线上；反之亦然。



如果 A、B、C、D、E、F 是一个圆锥截线上的切线，那么联接 A 与 B 和 D 与 E，B 与 C 和 E 与 F，C 与 D 和 F 与 A 的交点偶的直线交于一点；反之亦然。

射影几何的引人注目的美和它的证明的优美，使它成为十九世纪的几何学家特别喜爱的研究课题。有能力的人们蜂涌进这个新的金矿，很快就夺走了它最容易接近的宝藏。今天，大多数专家们似乎一直认为，就专业数学家感兴趣的范围来说，这个学科已经发掘尽了。不过，可以相信，在它里面仍然有一些象被忽略了的对偶原理一样明显的东西。无论如何，对于在其事业某一阶段的业余爱好者和专业工作者，它是一个容易学到的，具有迷人的优点的学科。射影几何与其它一些数学领域不同，它有幸拥有很多极好的教科书和专论，其中的一些出自几何学大师之手，包括彭赛列本人。



高斯

第十四章　数学家之王

高　　斯

系统的算术的进一步精炼和发展，就象本世纪[十九世纪]的数学在创新的科学思想方面产生的其它一切，是与高斯密切结合在一起的。

——利奥波德·克罗内克

阿基米德、牛顿和高斯这三个人，在大数学家中自成一个等

级，试图按照功绩排列他们的位置，不是普通人的事。这三个人都在纯数学和应用数学方面掀起了浪潮：阿基米德评价他的纯数学高于它的应用，牛顿把他的数学发明应用于科学，似乎为这样作找到了完全正当的理由；而高斯宣称，他干纯数学还是应用数学，对他都一样。然而，高斯把高等算数，他那个时代最缺乏实际意义的数学研究，推崇为全部数学的皇后。

数学家之王高斯的门第决不是王族。他是一个贫穷人家的子弟，1777年4月30日出生在德意志不伦瑞克邦一个简陋的村舍里。他的祖父是一个贫穷的农民。1740年，这位祖父在不伦瑞克定居，当园丁，过着贫困的生活。他有三个儿子，第二个儿子格哈德·迪德里希于1744年出生，这就是高斯的父亲。除了这唯一的荣誉以外，格哈德作为园丁、水渠管理人和砌砖工人艰苦劳动的一生，没有什么值得注意的地方。

关于高斯的父亲，我们得到的印象是，他是一个正直、极为诚实的、粗鲁的人，他对儿子们的严厉有时近乎粗暴。他言语粗俗，笨手笨脚。诚实和坚持不懈的努力渐渐使他能过得稍微舒适一些，但是他的境况从来没有宽裕过。这样一个人会竭尽全力去阻挠他的小儿子，不让他得到适合他的能力的教育，这是不足为奇的。要是父亲成功了，这个有天赋的孩子就得从事这家庭的一个行当，只是由于一连串幸运的偶然事件，高斯才免于成为一个园丁或砌砖工人。高斯孩提时代是恭敬而顺从的，虽然他后期从没有指责过他可怜的父亲，但也坦率地表示他从来没有真正爱过他。格哈德在1806年去世。到那个时候，他曾尽一切力量加以阻挠的儿子，已经完成了不朽的工作。

219

在他母亲那一方面，高斯是真正幸运的。多罗特娅·本茨的父亲是一个石匠，他三十岁就死于肺结核病，这是他那一行有损健康

的工作条件造成的后果，他留下了两个孩子，多罗特娅和她的弟弟弗里德里希。

这里高斯的天才的遗传血统是明显的。弗里德里希由于经济困难而不得不当了一名纺织工人，但他是一个非常聪明而和蔼的人，他那敏锐的、不肯安静的头脑，在与他的生计相去甚远的领域中发挥自己的才干。弗里德里希作为一个织工，在他那一行里很快赢得了声誉，他能织出最好的锦锈，这是他完全靠自己掌握的一门艺术。弗里德里希发现他姐姐的孩子具有类似的头脑，这位聪明的舅舅就在这个年轻天才的才智上磨炼自己的才智，通过他自己好奇的观察和有点嘲讽的人生哲学，他尽力唤起这孩子的敏捷的逻辑思维。

弗里德里希知道他正在做甚么；高斯当时也许并不知道。但是他有一个照相似的记忆力，终生清晰地保持着他对幼儿和孩提时代的各种印象。长大成人后，回顾弗里德里希为他做的一切，回忆起那个被过早的死亡剥夺了他取得成就的机会的、富于创造力的有才智的人，高斯悲叹，“天生的才华在他身上白费了。”

多罗特娅在1769年移居不伦瑞克。三十四岁时(1776年）她和高斯的父亲结婚。第二年她的儿子出世了。他受洗礼的全名是约翰·弗里德里希·卡尔·高斯。后来他在他的杰作上签名简单地签上卡尔·弗里德里希·高斯。如果说一个伟大的天才在弗里德里希·本茨身上白费了，他的名字却在他感恩的侄子的名字中保存了下来。

高斯的母亲是一个性格坚强、非常聪明、富于幽默感的、坦率的妇女。从她的儿子出生那天，直到她本人九十七岁逝世，儿子一直是她的骄傲。这个两岁的“神童”，以他令人吃惊的智慧给所有注意到他非凡的成长，把它看做非尘世的事情的人，留下了深刻的

220

印象；当他进入少年时期仍然保持着并超过了他幼年的智慧时，多罗特娅·高斯站在她的儿子一边，挫败了她固执的丈夫要让孩子象他一样无知的企图。

多罗特娅希望并期待着她的儿子做出伟大的事情。她有时也可能怀疑过她的梦想是否能成为现实，这从她吞吞吐吐地询问那些能够判断她儿子的能力的人就可以看出。由此，在高斯十九岁时，她问他的从事数学的朋友沃尔夫冈·鲍耶，高斯是否能成为什么人物。当鲍耶喊出"欧洲最伟大的数学家！"时，她高兴得哭了。

她一生的最后二十二年是在她儿子家里度过的，最后四年她完全失明了。要说呢，高斯本人对名气几乎从不在意；他的成功就是他母亲的生活。①他们之间总是有着最全面的理解，高斯报答了她在他早年对他的勇敢的保护，使她度过了一个安宁的晚年。在她失明后，除了他自己，他不让任何人服侍她，在她最后长期患病期间，他亲自照料她。她于1839年8月19日去世。

关于许多可能会剥夺阿基米德和牛顿的数学贵族地位的意外事件，高斯本人回忆起在他最早的童年时期的一件事。有一次春天发大水，从他家的农舍旁边流过的小渠泛滥了。高斯正在水边玩，被冲进水里，差一点淹死。要不是幸好有一个工人碰巧在附近，他的生命可能就在该时该地结束了。

在整个数学史中，没有什么与高斯孩童时期的早熟相似的。人们不知道阿基米德在什么时候显露出天才的迹象。牛顿最早表现出他极高的数学才能时，可能也没有受到注意。虽然看来难以置

① 关于高斯与他父母的关系的传说，仍然有待证实。虽然，如在后面要看到的，母亲站在儿子一边，父亲是反对他的；但是，由于当时的（通常也是现在的）习惯，在一个德国家庭中，是父亲起决定作用。——我后面要提到一些从认识高斯一家的成员、特别是知道高斯怎样对待他的儿子们的、活着的人那里听来的传说，这些传说涉及到第一手的证据；但是我不担保它们是否可靠，因为那些人都很老了。

信，高斯却是在他三岁以前就显示出了他的天才。

221 星期六的一天，格哈德·高斯正在计算他管辖的工人一周的工钱，他不知道他年幼的儿子正非常专心地跟着他计算。格哈德快要结束他长长的计算时，吃惊地听到这个小孩儿尖声地说，"爸爸，算错了，应该是……"核对账单的结果，表明高斯说的数是对的。

在这以前，这孩子就从他的父母和他们的朋友那里学着字母的发音，并且自己学会了读书。虽然据推测，他在知道字母时也知道了数字 1, 2, 3, …… 的意义，可是没有人告诉过他任何有关算术的事。晚年他喜欢开玩笑，说他在会说话以前就知道怎样数数了。他终生保持着作复杂心算的非凡能力。

高斯刚过七岁就进了他的第一所学校，这所学校是中世纪的可怜的残余，由一个叫比特纳的强壮的匹夫管理，他对于他管束下的一百来个孩子的教学方法，就是把他们鞭打到这样一种愚蠢的地步，他们害怕得连自己的名字都忘记了。这又是感情用事的反动分子们对过去的日子的想往。正是在这个地狱般的地方，高斯交了好运。

头上两年没有发生什么特别的事情。后来，高斯十岁时开始上算术课。因为这是一门新课，孩子们都没有听说过累加是怎么回事。英勇的比特纳要出一道他用几秒钟就能由公式找到答案的、长长的加法问题，在那时是很容易的。这个问题是下面这种类型的 81297＋81495＋81693＋…＋100899，其中从一个数到下一个数的步长一直是相同的（这里是 198），还要把给定数目的项（这里是 100 项）加在一起。

该校的习惯是，先算出答案的孩子把他的石板放在桌子上；第二个孩子把他的石板放在第一个的上面，等等。比特纳刚刚把这道题念完，高斯就把他的石板搁在了桌上："它放在那儿了，"他说

——用他的农民的土话说是“Ligget se'”。然后，在剩下的时间里，其他孩子都在辛辛苦苦地算题，他却叉着手坐在那里，比特纳不时讽刺地瞥他一眼，心想，班上这个年纪最小的孩子准是又一个笨蛋。时间到了，比特纳检查了石板。高斯的石板上只有一个数字。高斯一直到晚年都很喜欢讲述他写下的那个数字怎样是正确的，其他人的怎样却是错误的。没有人教过高斯怎样快速地作这样的题的诀窍。一旦知道了方法，它就是很平常的了，但是一个十岁的孩子一下就自己发现了它，这就不那么平常了。

222

这打开了高斯通向不朽的大门。比特纳对这个十岁的孩子未经指导就做出来的事情感到非常惊讶，他很快就补救了他自己的过错，至少对他的一个学生成了一名仁慈的教师。他自己花钱买了能够找到的最好的算术课本，把它送给高斯。这孩子很快就读完了这本书。比特纳说：“他超过我了，我没有办法教给他更多的东西了。”

比特纳靠他自己的力量，也许不能为这个年轻的天才帮多少忙。但是出于幸运的机会，这位教师有一个助手，叫约翰·马丁·巴特尔斯(1769—1836)，是一个非常喜欢数学的年轻人，他的职责是帮助初学者学写字，给他们削鹅毛笔。在这个十七岁的助手和这个十岁的孩子之间，产生了热烈的友谊，它一直持续到巴特尔斯逝世。他们一起学习，在困难的问题上互相帮助，并详细阐述在他们的代数和分析入门这些普通教科书上的证明。

在这段早期的工作中，发展了高斯一生的一个主要兴趣。他很快掌握了二项式定理，

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1\times 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}x^3+\cdots\cdots,$$

其中n没有必要是正整数，它可以是任何数。如果n不是正整数，右边的级数是无限的(不终止的)，为了说明这个级数何时真正等于$(1+x)^n$，必须研究对x和n需要加什么限制，才能使无穷级数收敛到一个确定的、有限的极限。因为，如果$x=-2, n=-1$，我们就得出荒唐的结论$(1-2)^{-1}$，就是$(-1)^{-1}$，或者$1/(-1)$，也就是-1，等于$1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots$等等，以至无穷；那就是说，-1等于"无限数"$1+2+4+8+\cdots\cdots$，这是胡扯。

223 在年轻的高斯向自己提出无穷级数是否收敛，是否真能使我们计算出用它们表示的数学表达式(函数)以前，较早的分析学家们并未费脑筋去解释由于不加鉴别地使用无限过程而引起的神秘(和胡扯)。高斯与二项式定理的很早的相遇，鼓舞他作出他的一些最伟大的工作，他成了第一个"严格主义者。"当n不是一个大于零的整数时，二项式定理的证明甚至在今天也超出了初级教科书的范围。高斯不满意他和巴特尔斯在他们的书里找到的证明，高斯作了一个证明。这使他开始进入数学分析。分析学的真正精髓在于正确使用无限过程。

就这样很好地开始的工作，将要改变数学的整个面貌。牛顿、莱布尼兹、欧拉、拉格朗日、拉普拉斯——都是他们各自时代的大数学家——实际上对于现在可以接受的、涉及无限过程的证明毫无概念。是高斯第一个清楚地看到，可能会导致象"负1等于无穷"这样荒唐的结论的"证明"，根本就不是证明。即使在某些情形，一个公式提供了没有矛盾的结果，它在数学中也没有地位，除非确定了严格的条件，它在这些条件下能继续产生没有矛盾的结果。

高斯赋与分析学的严格性，在他自己的习惯和他的那些同代人——阿贝耳、柯西——及后继者——维尔斯特拉斯、戴德金——的习惯的影响下，渐渐使整个数学领域相形见绌，高斯以后的数学

成了与牛顿、欧拉和拉格朗日的数学完全不同的东西。

在建设性的意义上，高斯是一个革命者。在他受完小学教育以前，使他不满足于二项式定理的同样的批判精神，又使他向初等几何的证明提出疑问。十二岁时他已经在斜眼看欧几里得几何基础了；到十六岁，他已经第一次瞥见了不同于欧几里得几何的一种几何。一年以后，他开始彻底批判数论中那些他的前辈们感到满意的证明，并从事于填补空白、完成只做了一半的工作这些异常艰难的任务。算术是他最早获得成功的领域，成了他所喜爱的研究领域和他的巨著的所在。高斯对于什么是证明的本质，具有确信无疑的感知，同时又具有从来没有被超过的、丰富的数学创造能力。这二者的结合是无坚不摧的。　224

巴特尔斯不仅引导他进入代数的奥秘，还为他做了更多的事。这位年轻的教师认识不伦瑞克的一些有影响的人物。他现在做的事就是让这些人对他的发现感兴趣。他们也对高斯非凡的天才留下了很好的印象，又使他引起了不伦瑞克公爵卡尔·威廉·斐迪南的注意。

公爵在1791年第一次接见了高斯。高斯那时十四岁。这孩子的朴实和局促不安的羞怯，赢得了慷慨的公爵的欢心。高斯离开时，得到了他的教育将继续下去的保证。第二年(1792年2月)高斯进了不伦瑞克的卡罗林学院。公爵付了学费，并且继续负担费用，直到高斯完成学业。

高斯在十五岁进卡罗林学院以前，已经通过自学和年龄较大的朋友们的帮助，在古典语言方面取得了很大的进步，这样就促使他一生中的一个危机提早出现了。在他愚钝而讲求实际的父亲看来，学习古典语言真是蠢透了。多罗特娅·高斯为她的儿子力争，她

胜利了，公爵给他在大学预科的两年学习提供了津贴。高斯在大学预科学校闪电般地精通了古典语言，使教师们和学生们都感到惊讶。

高斯本人受到哲学研究的强烈吸引，不过他不久就在数学中找到了更迷人的吸引力，这对科学是幸运的。高斯在进大学时已掌握了容易学的拉丁文，他的许多最伟大的著作都是用拉丁文写的。在法国大革命和拿破仑垮台以后，那场横扫欧洲的、顽固的、民族主义的浪潮，就连高斯这样的榜样也无力抵挡，这真是令人遗憾的灾难。代替足以使欧拉和高斯满意的、任何一个学生都能在几星期内掌握的、容易的拉丁文，科学工作者们现在必须在自己的语言之外，再具备两种到三种语言的阅读能力。高斯尽可能地抵制，但是当他在德国的天文学界的朋友们催促他用德文写他的天文学著作时，甚至他也不得不让步了。

高斯在卡罗林学院学习了三年。在这期间他掌握了欧拉、拉格朗日的较为重要的著作，而最重要的是牛顿的《原理》。一个伟大人物所能得到的最高赞扬，是从与他同一等级的另一个伟大人物那里得到的赞扬。高斯从来没有降低他作为一个十七岁的少年时对牛顿的评价。其他人——欧拉、拉普拉斯、拉格朗日、勒让德——出现在高斯流畅的拉丁文中的称赞是至高无上；牛顿是最高。

还在卡罗林学院时，高斯就开始了他对算术的研究，这些研究后来将使他流芳百世。他那非凡的计算能力现在起作用了。他直接探究数本身，用它们作实验，利用归纳法发现了一些深奥的一般定理，这些定理，甚至他也要费一番气力才能证出来。用这种方法，他重新发现了“算术的宝石，”“光辉的定理，”欧拉也曾用归纳法发现过它，人们把它叫做二次互反律，高斯是第一个证明它的

人。(勒让德曾试图证明它,但他的证明忽略了一个难点。)

整个研究起源于一个许多算术的初学者都会向自己提出的简单问题:在循环小数的每一周期中有多少数字?高斯为了找到说明这个问题的线索,对 n 从 1 到 1000 计算了所有的分数 $1/n$ 的小数表示。他没有找到他在寻找的宝藏,但是他发现了伟大得无与伦比的东西——二次互反律。因为这是很简单地陈述的,我们将描述它,同时介绍高斯发明的、在算术的术语和记号中的一个革命性的改进,同余。下面涉及的所有的数都是整数(普通完全整数)。

如果两个数 a, b 之差($a-b$ 或 $b-a$)可以用数 m 整除,我们就说 a, b 相对于模 m 同余,或者简称为模 m 同余,我们用 $a\equiv b \pmod m$ 的符号表示它。这样,$100\equiv 2 \pmod 7$,$35\equiv 2 \pmod{11}$。

这个方案的优点在于,它使我们想起了我们写代数方程的方法,用一个简洁的记号表示了算术可除性的有些无从捉摸的记号,提醒我们试着把一些在代数中导致有趣的结果的方法,引进算术(它比代数困难得多)。例如,我们能够把一些方程相"加",倘若模都是相同的,我们发现同余也能"加"起来,得到另外一些同余。

设 x 表示一个未知数,r 和 m 表示已知的数,r 不能被 m 整除。 226
是否有一个 x 使得

$$x^2\equiv r \pmod m ?$$

如果有,r 就称作一个 m 的二次剩余,如果没有,r 就称作一个 m 的二次非剩余。

如果 r 是 m 的二次剩余,那么必定能够找到至少一个 x,其平方被 m 除余 r;如果 r 是 m 的二次非剩余,那么就没有其平方被 m 除余 r 的 x。这些就是上面定义的直接结论。

举例说明:13 是 17 的二次剩余吗?如果是,必须能够找到同余

$$x^2\equiv 13(\bmod 17)$$

用1, 2, 3, …… 去试，我们发现 $x=8, 25, 42, 59$, …… 都是解($8^2=64=3\times17+13$, $25^2=625=36\times17+13$; 等等)，所以13是17的一个二次剩余。但是 $x^2\equiv5(\bmod 17)$ 没有解，所以5是17的一个二次非剩余。

现在自然要问，一个给定的 m 的二次剩余和二次非剩余是些什么呢？也就是说，在 $x^2\equiv r(\bmod m)$ 中给定 m，当 x 跑遍所有的数1,2, 3, ……时，什么样的数 r 能够出现，什么样的数 r 不能出现呢？

不用费太大力气就能表明，要回答这个问题，限定 r 和 m 都是素数就足够了。所以我们重新说明这个问题：如果 p 是一个给定的素数，什么样的素数 q 能使同余 $x^2\equiv q(\bmod p)$ 可解呢？在算术的目前状态下，这要求得太多了。不过，这种情形并不是毫无希望的。

在下面一对同余中存在着美妙的“互反”，

$$x^2\equiv q(\bmod p),\ x^2\equiv p(\bmod q),$$

其中 p 和 q 都是素数：两个同余都可解，或两个都不可解，除非 p, q 被4除时都余3，在那种情形下，一个同余是可解的，另一个同余是不可解的。这就是二次互反律。

它是不容易证明的。事实上，它使欧拉和勒让德困惑过。高斯在十九岁时给出了第一个证明。由于这个互反在高等算术以及代数的许多高深部分中非常重要，高斯试图找到它的根源，他反复考虑了许多年，直到他一共给出了六种不同的证明，其中有一个取决于正多边形的尺规作图。

227

用一个数字举例说明，能够阐明这个规律。首先，取 $p=5$, $q=13$。由于5和13被4除时都余1，所以 $x^2\equiv13(\bmod 5)$, $x^2\equiv5$

(mod 13)一定都可解或都不可解。这一对的情形是都不可解。对于 $p=13$, $q=17$,二者被4除都余1,我们得到 $x^2\equiv17 \pmod{13}$, $x^2\equiv 13 \pmod{17}$, 又是一定都可解或都不可解。这一对的情形是都可解:第一个同余有解,$x=2$, 15, 28, ……;第二个有解:$x=8$, 25, 42, ……。还要试验的只是当 p, q 都被4除余3的情形。取 $p=11$, $q=19$。那么根据这条规律,$x^2\equiv19 \pmod{11}$ 和 $x^2\equiv11 \pmod{19}$ 恰好有一个一定可解。第一个同余没有解;第二个有解:7, 26, 45, ……。

仅只这样一个规律的发现,就是一项值得注意的成就。由于它是由一个十九岁的青年首次证明的,这就会使每一个试着要证明它的人相信,高斯在数学上不仅只是有能力的。

高斯在1795年10月他十八岁时,离开卡罗林学院,进了格丁根大学,那时他仍然没有决定是以数学还是以哲学作为他毕生的事业。他已经发现了(在他十八岁时)"最小二乘"法,这个方法今天在大地测量学中,在观测的简化中,实际上在被测量的任何事物的"最可能"值是由大量测量得到的所有工作中,都是不可缺少的。(最可能值是由使"残量"——粗略地说,与假定的精确度的偏差——的平方和最小得到的。)高斯与勒让德共享这一荣誉,勒让德在1806年独立发表了这个方法。这项工作是高斯对观测误差理论感兴趣的开始。误差的正态分布的高斯规律,以及和它一起的钟形曲线,是今天所有使用统计学的人,从品格高尚的智力测验者,直到不择手段的市场操纵者,都熟悉的。

1796年3月30日标志着高斯一生的一个转折点。在那一天,距他二十岁生日正好一个月,高斯明确地决定了从事数学。语言学的研究仍然是他终生保持的一项爱好,但是哲学在3月的那个 228

难忘的一天，永远失去了高斯。

正如已经在费马那一章里讲过的，十七边的正多边形就是那颗骰子，它的幸运的掷下，使高斯跨过了他的鲁比肯河。①同一天高斯开始记他的科学日记(Notizenjournal)。它是数学史上的一份最宝贵的文件。第一段记录了他的伟大发现。

只是到了1898年，高斯去世后四十三年，这本日记才在科学界传播，当时格丁根皇家科学院从高斯的一个孙子手里借来这本日记，进行鉴定研究。它由十九张小八开纸组成，包括一百四十六个发现或计算结果的极简短的说明，最后一个说明的日期是1814年7月9日。1917年，复制件发表在高斯著作集的第十卷(第一部分)中，和它一起发表的有几位担任编辑的专家对它的内容所作的详尽分析。无论如何，高斯在1796年至1814年这段多产期间的所有发现并没有全部记录下来。但是许多匆匆忙忙记下来的点滴，足以确立高斯在这样一些领域——例如椭圆函数——中的优先权，而他的一些同代人拒不相信他在这些领域走在他们前面。(回想一下高斯出生在1777年。)

要是在这本日记中埋藏了几年或几十年的东西，当时就立刻发表的话，它们可能会给他赢来半打伟大的声誉。一些内容在高斯生前从来没有发表过，当其他人赶上他的时候，他在他自己写的任何著作中都从未说过他比他们领先。但是记录在那里。他确实比一些怀疑他的朋友们的话的人领先。这些领先的东西并不是纯粹不足道的。它们中的一些成了十九世纪数学的主要领域。

有几则日记表明，日记完全是它的作者的私事。如1796年7

① 鲁比肯河为意大利中部的一条河。公元前四十九年凯撒喊着"骰子已经掷下了"领兵渡过此河，他一渡过河必然和罗马执政庞培一战。后常用跨过这条河来比喻下重大决心。——译者

月10日的日记上，记着

$$\mathrm{E}\gamma\mathrm{PHKA!\ num} = \triangle + \triangle + \triangle。$$

翻译过来，这是模仿阿基米德欢呼"Eureka!"(找到了)，它说明每一个正整数都是三个三角形数的和，一个三角形数是数到0，1，3，6，10，15，……中的一个，其中每一个(0以后的)都具有$1/2\,n(n+1)$这个形式，n是任意正整数。另一种说法是，每一个形式为$8n+3$的数都是三个奇数平方的和：$3=1^2+1^2+1^2$；$11=1+1+3^2$；$19=1^2+3^2+3^2$，等等。要想轻而易举地证明它是不容易的。 229

更难理解的是1796年10月11日的日记中神秘的一则，"Vicimus GEGAN。"这次高斯缚住了什么样的怪龙呢？再有，1799年4月8日，他用整齐的方框圈起REV. GALEN时，他征服了什么样的巨人呢？虽然这些东西的意义已经永远失去了，但是留下来的那一百四十四个，大多数是够清楚的。特别是有一个具有头等的重要性，等我们讲到阿贝耳和雅可比时就会看出了：1797年3月19日的日记表明，高斯已经发现了一些椭圆函数的双周期性。他那时还不到二十岁。再有，一则较晚的日记表明，高斯已经看出了一般情形的双周期性。要是他发表了这个结果，它本身就足以使他名声显赫。但是他从来没有发表它。

为什么高斯没有披露他的伟大发现呢？这比他的天才要容易解释——如果我们接受他本人的简单说明的话。我们一会儿就讲述这个说明。一个更为离奇的说法是W. W. R. 鲍尔在他著名的数学史中讲述的故事。按照这种说法，高斯把他的第一篇杰作«Disquisitions Arithmeticae»[«数学研究»]交给了法国科学院，但它只是被轻蔑地拒绝了。这个不应有的耻辱深深地刺伤了高斯，致使他决定从此以后只发表任何人都会承认的、在内容和形式上都无可指摘的东西。这个诽谤性的传说完全不可信。1935年

它被彻底否定了，当时法国科学院的官员们详细地研究了档案，查明《研究》从未交给科学院，更不用说被拒绝了。

高斯为自己辩护，说他从事科学著作，只是出于他天性的最深刻的激励，至于这些著作是否要为了其他人的教育而出版，对他来说，完全是次要的事情。高斯有一次对一位朋友说的另一番话，解释了他的日记和他迟迟不发表的原因。他说，在他二十六岁以前，有那样一堆势不可挡的新思想在他脑海中翻腾，以至他几乎无法控制它们，他的时间只来得及记录下来一小部分。这本日记只包含一些曾经使他煞费苦心地思考了好几个星期的研究成果的最后的简短说明。作为一个年轻人，高斯仔细考虑了假想的证明的紧闭的、断不开的锁链，阿基米德和牛顿就是用这样的锁链缚住了他们的灵感；他决定按照他们的伟大榜样，在自己身后只留下完美的艺术品，要极其完美，达到增一分则多，减一分则少的地步。工作本身必须突出、完整、简明和有说服力，达到它的辛劳必须不留痕迹。他说，一座大教堂在最后的脚手架拆除和挪走之前，还算不上是一座大教堂。高斯抱着这样的理想工作，他宁肯三番五次地琢磨修饰一篇杰作，而不愿发表他很容易就能写出来的许多杰作的概要。他的印章是一棵只有很少几个果实的树，上面刻着座右铭 Pauca sed matura（少些，但是要成熟）。

230

这些努力完善后的果实确实是成熟的，但并不总是容易消化的。达到目标的所有的脚迹都被抹去了，高斯的追随者们要重新发现他走过的道路是不容易的。结果，他的一些著作必须等待很有天赋的解释者作出解释后，一般的数学家才能够理解它们，看出它们对尚未解决的问题的重要意义，并向前迈进。他的同代人请求他放宽他那僵硬无情的完美，以便数学可以前进得更快些。但是高斯从没有放宽。直到他去世以后很久，人们才知道，有多少十九世纪

的数学，高斯在1800年以前就已经预见到并领先了。要是他公布了他知道的结论，那么，很可能数学现在要比目前的状况前进了半个世纪或者更多。阿贝耳和雅可比就能够在高斯停下来的地方开始，而不必把他们的大部分最好的精力用在重新发现高斯早在他们出生以前就知道的东西上了，非欧几何的创造者们就能够把他们的天才转到其他的事情上了。

谈到他自己，高斯说他"只是一个数学家"，这对他是不公正的，除非我们记起在他那个时代的"数学家"，也包括现在所说的数学物理学家。实际上，他的第二个座右铭①

大自然，你是我的女神，

我愿意在你的规律面前俯首听命……，

真正概括了他献身于他那个时代的数学和物理科学的一生。他的"只是数学家"的一面，只能在下面的意义上去理解：他没有象他指责莱布尼兹做的那样，把他卓越的天资广泛地撒播在一切他可能获得丰收的领域里，而是把他最伟大的才能发展到完美的境地。 231

在格丁根大学的三年(1795年10月—1798年9月)是高斯一生中著述最多的时期。由于斐迪南公爵的慷慨，这个年轻人无需为经济担心。他在他的工作中入了迷，只交了很少几个朋友。这些朋友中的一个是沃尔夫冈·鲍耶，高斯把他说成是"我所知道的最了不起的人物，"他要成为高斯终生的朋友。这个友谊和它在非欧几何的历史上的重要意义，长得无法在这里讲述；沃尔夫冈的儿子约翰，实际上走了高斯在非欧几何的创造中走过的同样的道路，一点儿不知道他父亲的老朋友占了他的先。从高斯十七岁起就使

① 见莎士比亚的《李尔王》第一幕，第二场，1—2行，高斯作了重要改变，把法律(law)改成了规律(laws)。[译文见《莎士比亚全集》第九集，人民文学出版社]——译者

他不知所措的那些思想，现在——部分——清楚了，并归纳得有条理了。他从1795年起就一直在构思一部关于数论的伟大著作。现在这部著作成型了，到1798年，这部«Disquisitiones Arithmeticae»（算术研究）实际上完成了。

高斯为了熟悉在高等算术中已经作过的工作，确信他给了他的前辈们以他们应得的荣誉，在1798年前往赫尔姆斯泰特大学，因为该校有一所很好的数学图书馆。他在那里发现，他的名声已先他而至。他受到了图书馆馆长、数学教授约翰·弗里德里希·普法夫(1765—1825)的热烈欢迎，他就住在普法夫家里。高斯和普法夫成了好朋友，虽然普法夫一家看不起他们的客人。普法夫显然认为让他的刻苦工作的年轻朋友作一些锻练是他的责任，为此他和高斯一起在傍晚散步，讨论数学。由于高斯对自己的工作不仅是谦虚的，而且沉默寡言，普法夫学到的也许没有他本来可能学到的那样多。高斯极其钦佩这位教授（他当时是德国最著名的数学家），这不只是因为他有很深的数学造诣，还因为他单纯、坦率的性格。高斯在他一生中，只对一种人感到反感和蔑视，这就是明知自己错了又不承认错误的、佯装有学问的人。

高斯在不伦瑞克，偶尔也在赫尔姆斯泰特，度过了1798年的秋天（他那时二十一岁），最后润色他的«研究»。他希望能尽早出版，但是由于莱比锡的出版商碰到了困难，这部书直到1801年9月才印行。高斯为了对斐迪南为他所作的一切表示感谢，把这部书题献给这位公爵——“Serenissimo Principi ac Domino Carolo Guilielmo Ferdinando.”

232

如果有过一个慷慨的保护人值得他的被保护人的尊敬的话，那么斐迪南就应该受到高斯的尊敬。当这个年轻的天才为了他在离开格丁根以后的前途焦虑不安时——他试着找一些学生来教，

但没有成功——公爵解救了他，出资印刷了他的博士论文(赫尔姆斯泰特大学，1799年)，并给予他一笔适当的津贴，使他可以继续他的科学工作，而不至于受贫穷的妨碍。高斯在他的献词中说："您的仁慈，使我摆脱了一切其它任务，使我能够专心写作本书。"

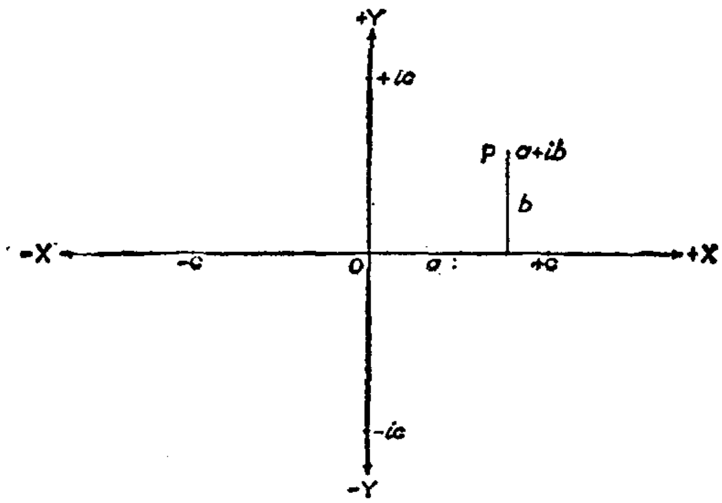
在叙述《研究》之前，我们要看一下高斯的博士论文，1799年赫尔姆斯泰特大学根据这篇论文，在高斯缺席的情况下授予他博士学位，论文为：Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus revolvi posse (每一个单变量的有理整函数都能分解成一阶或二阶实因子的一个新证明)。

代数中的这个里程碑只有一处不对头。题目中的最后几个字似乎隐含着，高斯只是给其他已经知道的结论加了一个新的证明。他应该删去"新"字。他的证明是第一个证明。(这个论断将在后面证实。)在他以前的一些人发表过他们以为是这个定理——通常称为代数基本定理——的证明的东西，但是没有人得出过一个证明。高斯对逻辑上和数学上的严格决不让步，坚持要有一个证明，并给出了第一个证明。这个定理的另一个等同的陈述是，每一个单个未知的代数方程有一个根，这个论断是初学者经常认为当然成立而对其意义一无所知的。

如果一个疯子乱涂了一堆数学符号，不能仅仅因为在外行看来这些符号与高等数学如出一辙，就认为他涂写的东西有什么意义。正如不能因为说代数方程有一个根，就认为这个论断有什么意义，除非我们能说出方程有哪一种根。我们模模糊糊地感觉到有一个数可以"满足"一个方程，但是半磅黄油不行。

高斯使这种感觉明确了，他证明了任何代数方程的所有的根都是形式为 $a+bi$ 的数，其中 a, b 是实数（相应于在一条给定的直线上，如在笛卡儿几何中的 x 轴上，从定点 O 量度的距离的正数、零或负数），i 是 -1 的平方根。这种新类型的"数"$a+bi$ 叫复数。

顺便提一句，有些人对复数作了一个条理清楚的说明，并把它们解释为一个平面上标出的点，象今天初等代数教科书中做的那样，高斯就是一个最早这样做的人。



P 的笛卡儿直角坐标是(a, b)；点 P 也被标成 $a+bi$。这样，平面上的每一个点恰好与一个复数相对应，与在 XOX' 上的点相对应的数是"实数"，与在 YOY' 上的点对应的数是"纯虚数"（它们都具有形式 ic, c 是一个实数）。

"虚数"这个词是代数最大的灾难，但是由于它早已得到公认，数学家们无法取消它。其实根本就不该用它。各种关于初等代数的书籍用旋转给虚数作了一个简单的解释。这样，如果我们把乘积 $i\times c$（c 是实数）解释成线段 Oc 绕 O 点旋转一个直角，Oc 就旋转到 OY 上；再用 i 去乘的乘积，即 $i\times i\times c$，把 Oc 再旋转一个

直角，这样总的效果就是把 Oc 旋转了两个直角，致使 $+Oc$ 成了 $-Oc$。作为一种运算，用 $i\times i$ 去乘的乘积与用 -1 去乘的乘积有同样的效果，用 i 去乘的乘积与旋转一个直角有同样的效果，这些解释（如我们刚刚看到的）是一致的。如果我们愿意，我们现在在运算中可以写 $i\times i=-1$，或者 $i^2=-1$；从而旋转一个直角的运算用符号表示即 $\sqrt{-1}$。

所有这些当然什么也没有证明。它也不意味着要证明什么。没有什么要证明的；我们给代数中的符号和运算指定能够导致一致性的不管什么样的意义。虽然利用旋转的解释什么也没有证明，可是它暗示对于显然命错了名的“虚数”，谁也没有理由使自己陷入一种神秘的惊奇状态。对于进一步的细节，我们可以参考几乎任何一本初等代数的中学课本。

高斯认为，在刚刚解释过的意义上，每一个代数方程有一个根的定理非常重要，因而他给出了四种明确的证明，最后一个证明是在他七十岁时给出的。今天，一些人会把这个定理从代数（它把自身限制于能够在有限步完成的过程）转移到分析。甚至高斯也假定多项式的图形是连续曲线，而且如果多项式是奇次的，图形一定至少与坐标轴相交一次。对于任何一个初学代数的人，这都是显然的。但是在今天，没有证明它就不是显然的，而要试图证明它，又一次导致了与连续和无限有关的那些困难。就象 $x^2-2=0$ 这样简单的方程的根，也不能在任何有限步内精确地计算出来。当我们讲到克罗内克时，还要更多地说到这一点。现在我们讲述《算术研究》。

《研究》是高斯的第一部杰作，一些人认为是他最伟大的杰作。在这之后，他就不再把数学作为唯一兴趣了。当它在1801年（高斯那时是二十四岁）出版之后，他把他的活动范围扩大到包括在数

学和实际两方面的天文学、大地测量学和电磁学。但是算术是他最喜爱的学科，他在后期感到后悔，一直没有抽出时间来写出他年轻时计划写的第二卷。这本书有七"节"。本来还有第八节，但是为了缩减印刷费用删去了。

235 前言的第一句描述了这本书涉及的一般范围。"这本著作中包含的研究结果，是属于涉及到整数和分数的那部分数学，根式[无理数]除外。"

前三节论述同余理论，特别详尽讨论了二项同余 $x^n \equiv A \pmod p$，其中给定的整数 n 和 A 是任意的，p 是素数，未知整数是 x。这个精采的算术理论，与相应的二项方程 $x^n = A$ 的代数理论有许多相似之处，但是它独特的算术部分，比之与算术毫无相似之处的代数，更是无与伦比地丰富和困难。

在第四节，高斯发展了二次剩余的理论。在这里可以找到二次互反律的第一个发表了的证明。证明是由令人惊奇的应用数学归纳法得出来的，是在任何地方都能找到的那种巧妙的逻辑的一个极好的例证。

第五节一开始从算术的观点讨论二元二次形式，不久又伴随着讨论据发现对二元理论的完成必不可少的三元二次形式。二次互反律在这些困难的计划中起了十分重要的作用。对于所说的第一种形式，一般的问题是要讨论不定方程

$$ax^2+2bxy+cy^2=m$$

的关于整数 x, y 的解，其中 a, b, c, m 是任意给定的整数；对第二种形式，研究的主题是方程

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dxz+2eyz+fz^2=m$$

的整数解 x, y, z, 其中 a, b, c, d, e, f, m 是给定的整数。这个领域中的一个看起来容易、实际上困难的问题，是要给 a, c, f, m

施加能够保证不定方程

$$ax^2+cy^2+fz^2=m$$

的关于整数 x、y、z 的解存在的充分必要的限制。

第六节把前面的理论应用到各种各样的特殊情形，例如 $mx^2+ny^2=A$ 的整数解 x, y，其中 m, n, A 是任给的整数。

236

在很多人认为是这部著作的顶峰的第七节，也是最后一节中，高斯应用前面的发展，特别是二次同余理论，精采地讨论了代数方程 $x^n=1$，其中 n 是任意给定的整数，把算术、代数和几何一起编织成一个完美的图案。方程 $x^n=1$ 是画 n 边的正多边形，或者 n 等分圆周的几何问题的代数公式(查看代数学或三角学的任何一本中级课本)；算术的同余 $x^m\equiv1 \pmod p$，其中 m, p 是给定的整数，p 为素数，是贯穿代数和几何，并给这个图案以它的简单意义的线索。任何学过普通的中学代数课程的学生，都能理解这个无瑕的艺术品，但是我们不向初学者推荐《研究》(后来的一些作者把高斯著作的简明扼要的形式，改写成了更容易理解的形式)。

以前有些人——费马、欧拉、拉格朗日、勒让德和其他一些人——用其他方法作过所有这一切中的许多部分，但是高斯完全从他个人的观点进行讨论，添加了许多他自己的东西，并从他对有关问题的一般公式和解答，推出了他的前辈们得出的许多孤立的结果。例如，费马用他的"无限下推"的艰难方法，证明了每一个形式为 $4n+1$ 的素数是两个数的平方和，并且只有一种和的方式；他的这个美妙的结论，是高斯对二元二次形式的一般论述的自然结果。

高斯晚年时说，"《算术研究》已经成为历史，"他是对的。《研究》的出版给高等算术提出了一个新方向，这样，在十七和十八世纪是一堆五花八门、互不相干的特殊结果的数论，采取了统一的形

式，上升到在数学科学中与代数、分析和几何同等的显赫地位。

这部著作本身被称作"七个封印的书"。它是很难读的，甚至对专家们也是如此，但是它所包含的和部分隐藏在它简明的、综合的证明中的宝藏，现在想分享它们的人都可以得到，这多半是高斯的朋友和弟子彼得·古斯塔夫·勒热纳·狄利克雷(1805—1859)努力的结果，他首先打开了七个封印。

237 有能力的鉴定家应该立刻就看出这部杰作的价值。勒让德①一开始可能会认为高斯对他有点不够公正。但是在他自己那部大部分被高斯的«研究»所替代的数论专著的第二版(1808年)序言中，他是热情的。拉格朗日也慷慨地予以赞扬。他在1804年写给高斯的信中说，"你的«研究»使你立刻上升到第一流数学家的行列，我认为最后一节包含着很久以来所曾做出的最美好的分析发现……。请相信，先生，没有人比我更真挚地为你的成功喝彩。"

«研究»受其经典的完美风格的限制，不大容易理解，当有天赋的年轻人终于开始深入研究这部著作时，由于一个书商的破产，他们无法买到这本书。甚至高斯最喜爱的弟子艾森斯坦也从未拥有一部。狄利克雷要幸运得多。他那册书在他所有的旅途中伴随着他，他睡觉时把书放在枕头下面。睡觉以前他总要努力阅读一些难懂的段落，希望——经常实现——他会在夜里醒来，发现重读一下，这些段落就清楚了。

在讲到费马时提到的一个令人惊奇的定理，是属于狄利克雷的，即每一个算数级数

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ \cdots\cdots$$

包含着无穷多个素数，其中a，b是没有比1大的公因子的整数。

① 阿德里安-玛丽·勒让德(1752—1833)。由于篇幅所限，不能叙述他的生平。年轻的数学家们吸收或超过了他的许多最好的工作。

这是由分析证明的，这一点本身就是一个奇迹，因为定理考虑整数，而分析论述连续，非整数。

狄利克雷在数学上作了比他详述《研究》多得多的工作，但是我们没有篇幅来叙述他的生平。不幸我们也没有篇幅留给艾森斯坦，他是十九世纪初期那些过早去世了的、才气焕发的年轻人中的一个，而且令人难以理解的是，象高斯这样一个人，据说曾经说过，"只有三个划时代的数学家，那就是阿基米德、牛顿和艾森斯坦。"要是高斯确实说过这话（这是无法查证的），那么仅仅由于是他说的，就值得注意，因为高斯是不轻率说话的人。 238

在离开高斯进行大量活动的这个领域之前，我们可能要问，为什么他从来没有去解决费马大定理。他自己作了回答。巴黎科学院在1816年提出，以证明这个定理成立（或证明其不成立）作为它在1816年—1818年期间的获奖问题。奥尔贝斯在1816年3月7日从不来梅写信给高斯，试图怂恿他参加竞争："亲爱的高斯，对我来说，你着手这项工作是理所当然的。"

但是"亲爱的高斯"不受引诱。两星期后他回信，说明了他对费马大定理的看法。"我非常感激你告诉我巴黎大奖赛的消息。但是我对作为一个孤立的命题的费马定理，实在没有甚么兴趣，因为我可以很高兴地提出一大堆这样的既不能证明其成立，又不能证明其不成立的命题。"

高斯接着说，这个问题使他回想起了他对于高等算术的伟大扩展的一些旧的想法。这无疑是指库默尔、戴德金和克罗内克将独立发展起来的代数数的理论（在后面几章论述的）。但是高斯心目中的理论是那样一些东西中的一个，他宣称，对于只是透过黑暗模模糊糊地看到的目标，无法预见能够取得甚么样的进展。为了在这样一个困难的探索中取得成功，必须吉星高照，而高斯这时的

情况是这样的，由于大量工作分散了他的注意力，他不能埋头于这样的冥思苦想，就象他“在幸运的年代1796—1798年”那样，“那时我想出了《算术研究》的主要论点。我仍然确信，如果我象我敢于希望的那样幸运，如果我在那个理论中迈出了主要的几步，那么费马的定理就会只是最没有意思的推论中的一个。”

也许今天所有的数学家都会惋惜，高斯偏离了他通过黑暗的进军，由于“我们称之为行星的一对毫无价值的土块”——高斯本人的话——意外地在夜空中闪烁，把他引入了歧途。不如高斯伟大的数学家——例如拉普拉斯——也许就能够作出高斯在计算谷神星和智神星的轨道时所作过的一切，即使这个问题是属于牛顿说的数学天文学中最困难的那类问题。但是高斯在这些问题上取得的辉煌的成功，使他立刻在欧洲被公认为最好的数学家，并因此给他挣来了一个舒适的职位，使他能够在相对的平静中工作；所以，也许那些毫无价值的土块倒真是他的吉星呢。

239

高斯一生的第二个伟大的阶段开始于十九世纪的第一天，这一天也是哲学史和天文学史上用红字标明的一天。自从1781年威廉·赫歇尔爵士(1738—1822)发现了天王星，因而把那时已知的行星数目增加到哲学上令人满意的七个以来，天文学家们一直孜孜不倦地搜索太空，寻找太阳家族的其它一些成员。按照博德的规律，它们应该存在于火星和木星的轨道之间。搜索一直毫无结果，直到巴勒莫的朱塞佩·皮亚齐(1746—1826)在十九世纪的第一天，观察到他一开始误认为是一颗正接近太阳的小彗星的星星，但是它不久就被认出是一个新的行星——后来命名为谷神星，今天所知道的一大群很小的行星中的第一个。

根据长久以来关于事实对推测的争论可作出的最令人啼笑皆

非的判断之一，谷神星的发现与著名哲学家乔治·威廉·弗里德里希·黑格尔(1770—1831)对胆敢寻找第八个行星的天文学家的讽刺性攻击的发表，正好在同一时候。黑格尔断言，要是他们稍稍注意一下哲学，立刻就会明白，只能有七个行星，不多也不少。因此他们的搜寻是愚蠢的浪费时间。毫无疑问，黑格尔方面的这个小小的失误，已经由他的追随者们作了满意的解释，但是他们还没有谈到突破他那威风凛凛的禁令的几百个小行星。

这里援引高斯对那些忙于他们并不懂得的科学问题的哲学家们的看法，是很有意思的。这种看法特别适用于那些没有首先在一些艰难的数学问题上磨尖他们的笨嘴壳，却想掘起数学的基础的哲学家。相反地，它使人联想到，为什么我们自己时代的伯特兰·A. W. 罗素(1872—　　)、阿弗雷德·诺思·怀特海(1861—　　)和戴维·希耳伯特(1862—　　)会对数学和哲学作出了卓越的贡献：这些人是数学家。

1844年11月1日高斯写信给他的朋友舒马赫说："你在当代哲学家谢林、黑格尔、内斯·冯·埃森贝克和他们的追随者身上看到同样的东西[数学上的无能]；他们的那些定义难道不使你毛骨悚然吗？读读古代哲学史中当时的大人物——柏拉图和其他人(我把亚里斯多德除外)——在解释方面所用的方法。但是甚至就康德本人来说，常常也好不了多少。我认为他对分析命题与综合命题所作的区分，要末是平凡不足道的，要末是错误的。"高斯在写这封信时已经充分掌握了非欧几何，非欧几何本身就足以驳倒康德关于"空间"和几何所说的一些东西，而他也许是过于傲慢了。

决不能从有关纯数学的术语的这个孤立的例子，就认为高斯不了解哲学。他了解。一切哲学上的进展对他都有着极大的魅力，

尽管他常常不赞成取得这些进展所使用的方法。他曾经说过，“有些问题，例如令人感动的伦理学，或我们与上帝的关系，或关于我们的命运和我们的未来的问题，我对这些问题的解答，比对数学问题的解答重视得多；但是这些问题完全不是我们能够解答的，也完全不是科学范围内的事。”

谷神星对于数学是一个灾难。要了解高斯为什么要那样毁灭性地、认真地对待它，我们必须记住，在1801年，牛顿的庞大形象（已去世七十多年）仍然给数学蒙着阴影。当代的“大”数学家们，是那些孜孜不倦地完成牛顿的天体力学大厦的人，如拉普拉斯。数学依然被当作数学物理——象当时那样——和数学天文学。阿基米德在纪元前三世纪所看出的数学作为一门独立学科的幻象，已经在牛顿的光辉的照耀下消失了。直到年轻的高斯再次抓住这个幻象，数学才被承认为一门其首要职责是为它自身工作的科学。正当他满可以在那些将要成为数学王国的未经耕耘过的荒野上，开始紧张地工作起来的时候，那个微不足道的泥块，小行星谷神星，在他二十四岁时吸引了他无与伦比的智慧。

241 不能只怪谷神星。非凡的心算天才——它的有经验的发现已经给了数学以《算术研究》——也在这出悲剧中起了致命的作用。他的朋友们，还有他的父亲，看见既然公爵供他受了教育，而年轻的高斯还没有找到一个能赚钱的职位，他们感到着急，他们对于使这个年轻人成为一个沉默的隐士的工作的性质完全不了解，以为他疯了。就在这时，在新世纪的黎明，高斯所缺少的机会向他扑来了。

一颗新的行星，在它极难观察到的位置被发现了。要从能够得到的少得可怜的数据，计算出行星的轨道，这项工作就是拉普拉斯本人也会感到困难。牛顿曾经宣称，这种问题属于数学天文学中最困难的问题。需要确立一条轨道，其精确度要足以保证谷神星

在围绕太阳旋转时能用望远镜观察到，光是确立这条轨道所需要的算数，就很可能难倒今天的电动计算机；但是对于这个年轻人，当他感到时间紧迫或是懒得伸手去拿对数表时，他那非凡的记忆力能够使他不用对数表，所有这些没有止境的算术——是对数，不是算数——就象一个幼儿的游戏一样。

为什么不纵容他那可爱的癖好呢？为什么不象他以前从来没有过的那样去计算，算出这条困难的轨道，让数学名流的独裁者们真正又惊又喜，从而有可能在一年以后，让耐心的天文学家们，在牛顿的引力定律判定必然会找到谷神星的地方——假如这条定律确实是一条自然定律的话——重新发现谷神星呢？为什么不做这一切，抛开阿基米德的不实在的幻象，忘掉他日记里那些等着展开的、他自己的卓绝的发现呢？一句话，为什么不成名呢？公爵的慷慨一向是由衷的，然而在这年轻人的内心最隐秘的地方，伤害了他的自尊心；荣誉、受重视、合于当时的时尚被承认为"伟大的"数学家，或许还有继之而来的经济上的独立——所有这一切现在都是他垂手可得的。高斯，这位空前的数学之神，伸出他的手，摘下了在他自己年轻一代中的廉价名声这个死海的果实。

将近二十年的时间，孩子气的高斯怀着抑制不住的喜悦，在他的日记里描述的那些隐约闪现的、难以捉摸的东西，躺在那里无人理睬，几乎被忘记了。谷神星被重新发现了，恰恰是在年轻的高斯经过极其巧妙和详细的计算，预计一定会找到它的地方发现的。小小谷神星的微不足道的姊妹行星小惑星、灶神星和婚神星，很快就被公然蔑视黑格尔而到处窥探的望远镜观察到了，它们的轨道也被发现完全符合高斯富于灵感的计算。欧拉需要三天时间才能完成的计算——据说正是这种计算使他双目失明——现在只是几小时辛苦的简单练习了。高斯规定了方法和程序。将近二十年间，

他自己的大部分时间都花在天文学的计算上了。

但是甚至这样使人变得迟钝的乏味的工作，也不能磨灭高斯的创造天才。1809年他发表了他的第二部杰作，Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium（《天体沿圆锥截线绕日运动的理论》），这篇著作根据观测得到的数据，包括困难的摄动分析，对确定行星和彗星轨道作了详尽的讨论，制定了许多年中支配计算天文学和实际天文学的规律。这是一项伟大的工作，但是如果高斯展开躺在他的日记里被忽略了的那些线索，就能够容易地作出比这更伟大的工作。《天体运动理论》实质上没有给数学增加新的发现。

谷神星被重新发现以后，公认以惊人的速度到来。拉普拉斯立即欢呼这位年轻的数学家和他地位相当，不久又欢呼超过了他。不久以后，亚历山大·冯·洪堡(1769—1859)男爵这位著名的旅行家和业余科学爱好者，问拉普拉斯，谁是德国最伟大的数学家，拉普拉斯回答"普法夫。"冯·洪堡当时正支持高斯担任格丁根天文台台长，他惊讶地问道，"那末高斯怎么样?"拉普拉斯说，"哦，高斯是世界上最伟大的数学家。"

谷神星插曲以后的十年，对高斯来说，幸福多，悲哀也多。甚至在他事业的那个早期阶段，也不是没有中伤他的人。留心上流人士动向的一些杰出人物，嘲笑这个二十四岁的年轻人，把他的时间浪费在计算小行星的轨道这种毫无用处的消遣上。谷神星可能是田野的女神，但是任何神智清醒的人都很清楚，这个新的行星上长出的谷物，决不会找到道路，进入星期六下午的不伦瑞克市场。无疑他们是对的，但是三十年以后，当他奠定电磁学的数学理论基础和发明电报的时候，他们也用同样的方式嘲笑他。高斯让他们去享受他们的俏皮话。他从来没有公开答复，但是他在私下表示

惋惜，这些正人君子，科学的卫道士，竟会由于气量狭小而显得那么愚蠢。与此同时，他继续他的工作，感谢欧洲知识界倾注在他身上的荣誉，但是决不特意去恳求它们。

不伦瑞克公爵给这个年轻人增加了津贴，使他能够在二十八岁时结婚(1805 年 10 月 9 日)。女方是不伦瑞克的约翰妮·奥斯特霍夫。订婚三天以后，高斯给他在大学时的老朋友沃尔夫冈·鲍耶写信，表示他的难以相信的幸福。“生活在我面前停滞了，象一个有着新的鲜明色彩的永恒的春天。”

这次婚姻，生了三个孩子：约瑟夫、米娜和路易，据说老大继承了他父亲心算的天赋。约翰妮在 1809 年 10 月 11 日生下路易以后，撇下她年轻的丈夫去世了。他的永恒的春天变成了冬天。虽然为了幼小的孩子的缘故，第二年(1810年 8 月 4 日)他再次结婚，但是有很长时间高斯谈起他的前妻就十分悲痛。第二个妻子米娜·瓦尔德克是他前妻的密友，她生了两个儿子和一个女儿。

有些流言蜚语，说高斯和他的几个儿子关系不好，可能有天赋的约瑟夫除外，他从来没有给他父亲惹什么麻烦。据说有两个儿子离家出走，跑到美国去了。其中一个据说留下了许多后代，至今仍然居住在美国，这里就不可能再多说什么了，只除了在美国的子孙中有一个在内河航运的全盛时期，在圣路易斯成了一个富裕的商人；最早去的两个儿子都是密苏里的农场主。高斯和他的女儿们一起始终是很幸福的。一种关于几个儿子的恰恰相反的传说(是四十年前一些老人证实的，他们对高斯一家的记忆可以认为是可靠的)，断定高斯对他的儿子是非常仁慈的，不过有几个儿子相当粗野，使他们的父亲操不尽的心。人们认为高斯对他父亲的记忆，会使他对他的儿子们抱同情态度。

244

1808 年高斯失去了他的父亲。两年前他的恩人在悲惨的情况下死去，使他遭受到甚至更严重的损失。

斐迪南公爵不仅是学术的开明的庇护人和一位仁慈的统治者，而且也是一个第一流的军人，由于他在七年战争(1756—1763)中作战英勇、战功赫赫，他曾博得腓德烈大帝的热烈赞扬。

斐迪南在七十岁时奉命指挥普鲁士军队，试图拼死抵挡拿破仑率领下的法军，这时，这位公爵前往圣彼得堡请求俄国援助德意志的使命已经失败。奥斯特利茨战役(1805 年 12 月 2 日)已成为历史，普鲁士发现它在压倒优势的力量面前被抛弃了。斐迪南在法军向奥尔施泰特的萨勒河和耶拿进军途中，与法军遭遇，遭到惨败，他本人身负重伤，往家乡撤退。

这时拿破仑权势达到顶峰，大腹便便地亲自登场。斐迪南战败时，拿破仑驻扎在哈雷。来自不伦瑞克的一个代表团，等待着这位胜利的全法兰西的皇帝，为被他打败的勇敢的老人，向他恳求宽大。这位伟大的皇帝会不会对军规破例作出让步，让他衰弱的敌人在自已的炉边安静地死去呢？他们向他保证，公爵已不再是危险的了，他快死了。

但是时间不对头，正碰上拿破仑一次周期性地发脾气。他不仅拒绝了，而且拒绝得那么粗鄙，那么不必要地粗暴。为了显示他自已作为一个大人物的真正身份，拿破仑在拒绝之外，还不必要地中伤他这位可敬的对手，歇斯底里地嘲笑这位垂死的人作为一个军人的能力。受到侮辱的代表团没有别的办法，只能努力使他们好心的统治者免除死在监狱里的耻辱。同样是这些德意志人，大约九年以后，在滑铁卢战斗得象有组织的魔鬼一般，帮着把这位法国皇帝打入绝境，这看来是不足为怪的。

这时高斯住在不伦瑞克。他的住宅就在大路边。晚秋的一个

早上，他看见一辆医院里的手推车正匆匆地驶过。里面躺着正逃往阿尔托纳途中的垂死的公爵。高斯怀着难以用言语表达的深情，看见这位待他胜过他亲生父亲的人，象一个被追赶的罪犯，急急忙忙地离去，去在躲藏的地方死掉。当时他什么也没有说，后来也没有说什么，但是他的朋友们注意到他更加沉默了，他一向严肃的天性变得更加严肃了。就象笛卡儿早年一样，高斯害怕死亡，一位密友的去世，使他终生怀着一种隐约而沉重的恐惧因而心情沮丧。但高斯充满了活力，他还不会去死或经历死亡。1806年11月10日，公爵在阿尔托纳他父亲的住宅中去世。

慷慨的保护人去世了，高斯必须寻找一个可靠的生计来养活他的一家人。这是不成问题的，因为这位年轻的数学家的名声现在已传遍欧洲。圣彼得堡早就图谋让他成为欧拉的当然继承人，因为在欧拉1783年去世后，始终没有找到配得上他的人来替代他。1807年向高斯提出了明确的、讨人满意的建议。亚历山大·冯·洪堡和其他有影响的朋友们，不愿看见德意志失去这位世界上最伟大的数学家，经过他们的努力，高斯被任命为格丁根天文台台长，并享有给大学学生讲授数学的特权——必要时也是义务。

高斯无疑可以得到一个数学教授的职位，但是他宁愿在天文台任职，因为这个职务为他不受干扰地进行研究工作提供了较好的前景。虽然说高斯憎恨教书可能太重了，但是给普通大学生讲课确实没有给他甚么乐趣，只有当一个真正的数学家找到他时，高斯和他的学生们坐在桌子旁，才会情不自禁地透露出在他充分准备好的讲课中的方法的秘密。遗憾的是促使他这样做的机会太少了。大部分占用了高斯的宝贵时间的学生，最好是去做别的事情而不要学数学。1810年高斯在写给他的好朋友、天文学家弗里德里希·威廉·贝塞尔(1784—1846)的信中说："这个冬季我给三个学

生开两门课。这三个学生当中，一个只是中等水平，另一个不到中等水平，第三个既没有水平又缺乏才能。这就是干数学这一行的负担。”

格丁根天文台在当时——法国人正在为了它给予德意志人的好政府的利益而尽情地掠夺德意志——能够付给高斯的薪俸不多，但是足够高斯和他家庭的简单需要。奢侈的生活从来没有吸引过这个早在十几岁时就把一生献给科学的数学家之王。如同他的朋友冯·瓦尔特肖森所写的："正如他年轻的时候一样，在他整个老年时代，直到他辞世的那天，始终保持为一个简朴的高斯。一间小书房，一张铺着绿色台布的小小的工作台，一张漆成白色的必备的书桌，一张单人沙发，在他七十岁以后，又有一把扶手椅，一个带灯罩的灯，一间没有生火的卧室，简单的饮食，一件晨衣和一顶天鹅绒的便帽，这些就足以满足他的全部需要了。”

如果说高斯是节俭、朴素的，1807年侵入德意志的法国人就更节俭、更朴素了。按照他们的看法，要统治德意志，奥尔斯泰特和耶拿的胜利者就应该超出现有情况许可地对战败者处以罚金。这些敲诈勒索者认为高斯既然是格丁根的教授和天文学家，应该强迫他给拿破仑的战争基金贡献出两千法郎。这笔大数目高斯完全无力支付。

不久，高斯收到他的朋友、天文学家奥尔贝斯的一封信，信里附来了这笔罚款，还为一位学者竟然被勒索这样微小的款项而表示愤慨。高斯对慷慨的朋友的同情表示感谢，但是拒绝接受这笔钱，立即把它退回给了捐赠者。

并不是所有的法国人都象拿破仑那样贪婪。高斯退回奥尔贝斯的钱不久，收到拉普拉斯一张友好的短笺，告诉他，这位著名的法国数学家已为世界上最伟大的数学家付了两千法郎的罚金，并

且认为能够从他朋友肩上卸下这个不应有的负担是一种荣幸。由于拉普拉斯是在巴黎付的这笔罚金，高斯无法把钱还给他。然而他拒绝接受拉普拉斯的帮助。不久，一笔意想不到的(而且是主动提供的)意外之财，使他能够按照当时市场的利率，把钱还给了拉普拉斯。一定是流传着高斯蔑视施舍的说法，下一次帮助他的尝试成功了。法兰克福的一个敬慕者匿名寄来了一千盾。高斯因为找不到寄钱的人，不得不接受了这笔馈赠。

他的朋友斐迪南的死，德意志在法国人劫掠下的悲惨的境况，经济状况的窘迫，以及他第一个妻子的去世，都对损害高斯的健康，使他在三十岁出头时生活陷于不幸起了作用。对于因长期工作过度而加剧的疑病症，采取了保健措施也无济于事。他从不向他的朋友们吐露他的不幸，对他们来说，他永远是一个安详的通信者，但是在一件私人的数学手稿上他吐露了——仅仅一次。高斯在1807年被任命为格丁根天文台的台长以后，有三年时间，有时回到他日记中所记述的大事中的一件上去。在一篇关于椭圆函数的手稿上，纯科学的问题突然被一行清晰的铅笔字打断了："对我来说，死亡比这样的生活更可爱。"他的工作成了他的麻醉剂。

247

1811—1812年(1811年高斯三十四岁)情况有了好转。又有了一个妻子来照顾他幼小的孩子们，高斯开始得到一些安宁。这时，几乎恰好在他第二次结婚一年以后，高斯在1811年8月22日黄昏第一次观测到的那颗伟大的彗星，突然之间燃烧了起来。这是一个试验高斯为征服小行星而发明的武器的劲敌。

他的武器证明是适用的。欧洲各国迷信的人们敬畏地注视着这耀眼的景象，当彗星接近太阳，把它那燃烧着的小弯刀变得柔软时，他们从那火一般的刀刃上看出了上天发出的严厉警告：上帝对拿破仑震怒了，对这个残忍的暴君厌烦了；而这时高斯满意地看见

彗星沿着他很快地为它设计出的、精确到最后一个小数的轨道行进。随后的一年，迷信的人们还看见了他们自己的预言，在莫斯科的大火，和拿破仑的大军在俄罗斯冰雪覆盖的原野上的覆灭中，得到了证实。

这是那些罕见的例子中的一个：群众的解释与事实相符合，并导致比科学更重要的结果。拿破仑本人有一个低劣的轻信的头脑——他相信"预感"，真诚地相信有一种慈善的、不可测知的天意，而他的大屠杀是符合天意的，他认为自己是一个知天命的人。一颗无害的彗星高高扬起它那巨大的尾巴划过天空，这个天上的景象，很可能会在拿破仑这样的人的下意识中留下它的印象，并且搅乱他的判断。这样一个人对数学和数学家近乎迷信的崇敬，对双方都不是什么很大的光荣，尽管人们对双方都常常引用它，作为彼此增光的一个主要的证明。

数学在军事上的用途，就连傻瓜都很清楚，拿破仑除了对于数学在这方面的价值有些肤浅的鉴赏力以外，对于他的同代人如拉格朗日、拉普拉斯和高斯这些大师们所从事的数学一无所知。他在中学学习粗浅的初等数学时，是一个灵敏的学生，但是太早就转到别的事情上去了，不能证明他有出息，就数学来说，他从来也没有成长起来。一个有着拿破仑的被证实了的能力的人，竟能如此严重地低估他所不了解的问题的困难，乃至对拉普拉斯摆出一付屈尊俯就的样子，尽管这似乎不大可信，但却是事实，他竟然荒谬可笑地放肆到对这位《天体力学》的作者保证说，他一旦能找到一个月空闲的时间，就要读这部书。牛顿和高斯可能胜任这项任务，至于拿破仑，无疑会在他那一个月里一页页地翻这本书，但不会怎么累。

248

记录下面这件事是令人高兴的：高斯十分骄傲，不会把数学出

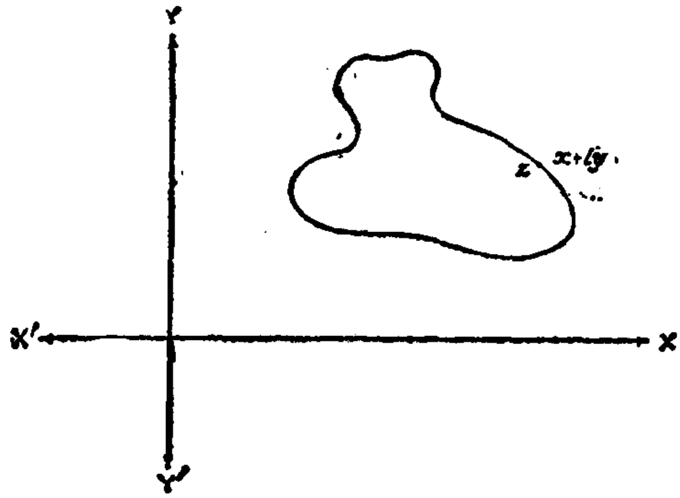
卖给拿破仑一世，不会象他的一些朋友们错误地极力主张他去做的那样，去求助于这位皇帝的虚荣心，凭借他那臭名昭著的、对一切与数学有关的事情的尊重，请求他免除那两千法郎的罚金。拿破仑倒是可能因为受到奉承而发发慈悲。但是高斯忘不了斐迪南的死，他认为，他本人和他所崇拜的数学，最好是不要有一个拿破仑式的人物来屈尊关心。

在这位数学家与这位军事天才之间，再也找不出比他们各自对一位失败的敌人的态度更尖锐的对比了。我们已经看见了拿破仑是怎样对待斐迪南的。当拿破仑垮台时，高斯没有欣喜若狂。他平静地、以一种超然的兴趣，阅读他所能找到的有关拿破仑生平的一切著作，并且尽可能地去了解一个象拿破仑那样的头脑的活动方式。这种努力甚至给了他相当的乐趣。高斯具有强烈的幽默感，他从他勤勉的农民祖先那里继承来的直率的现实主义态度，也使他容易对夸大的言词一笑置之。

如果高斯公开了他向贝塞尔吐露的一项发现，那么1811年可能就是可以与1801年——《算术研究》出版的那一年——相比的、数学上的里程碑了。高斯已经完全弄懂了复数和它们作为解析几何平面上的点的几何表示，他向自己提出了研究这样的数的今天称为解析函数的问题。

复数 $x+iy$，其中 i 表示 $\sqrt{-1}$，表示点 (x, y)。为简单起见，可以用一个字母 z 来表示 $x+iy$。当 x, y 在任何指定的连续方式各自取实值时，点 z 就在平面上移动，显然不是随意移动，而是以由 x, y 取值的方式所决定的方式移动。当给 z 指定一个值时，取一个单值的任何包含 z 的表达式，诸如 z^2 或 $1/z$ 等等，称为 z 的一个单值函数。我们用 $f(z)$ 表示这样一个函数。这样，如果 $f(z)$ 是　249

特定的函数 z^2，使得这里 $f(z)=(x+iy)^2=x^2+2ixy+i^2y^2=x^2-y^2+2ixy$（因为 $i^2=-1$），那么显然当给 z，即 $x+iy$，指定任何值，例如 $x=2$，$y=3$，从而 $z=2+3i$ 时，这个 $f(z)$ 就因此确切地决定了一个值；这里，对于 $z=2+3i$，我们得到 $z^2=-5+12i$。



并不是所有的单值函数都在单复变量函数的理论中进行研究；单演函数被挑选出来进行详尽的讨论。在我们描述了"单演"意味着什么以后，再来说明这样做的原因。

让 z 移动到另一个位置 z'。函数 $f(z)$ 取到另一个值 $f(z')$，由 z' 代替 z 得到。现在用变量的新值和旧值之差去除函数的新值和旧值之差 $f(z')-f(z)$，这样就有 $[f(z')-f(z)]/(z'-z)$，正象在计算一个图形的斜率以找出图形所表示的函数的导数时做过的那样，这里我们让 z' 无限接近 z，从而 $f(z')$ 同时接近 $f(z)$。但是此处出现了一个值得注意的新现象。

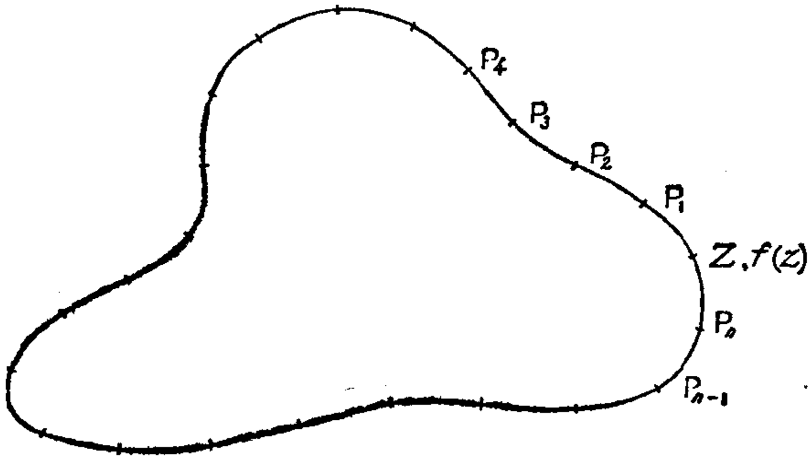
250 z' 怎样移动到与 z 重合，在这里没有一条统一的途径，因为 z' 在与 z 重合之前，可以经由无限多个不同的路径，在复数平面上移动。我们无法指望当 z' 与 z 重合时，$[f(z')-f(z)]/(z'-z)$ 对所有这些路径的极限值都一样，一般说来是不一样的。但是如果

$f(z)$是这样的，使得刚刚描述过的极限值，对z'移动到与z重合时所经过的所有路径都是一样的，那么就说$f(z)$在z（或者在代表z的点）是单演的。一致性（以前描述过）和单演性是单复变量解析函数的特殊的特征。

流体运动（以及数学电学和不使角度扭曲的地图的数学表示）的理论的广阔领域，是很自然地由单变量解析函数处理的，由这个事实能够推断出解析函数的一些重要意义。假定这样一个函数$f(z)$被分成"实"部（不含"虚单位"i的部分）和"虚"部，比如说$f(z)=U+iV$。对于特殊的解析函数z^2，我们有$U=x^2-y^2$，$V=2xy$。想象一个在平面上流动的流体层。如果流体的运动没有涡流，运动的流线就可以通过画出曲线$U=a$，其中a是任意的实数，由某个解析函数$f(z)$得到，同样可以由$V=b$得到等位线。让a，b变动，我们就得到我们想要多大就有多大的面积内运动的一个完整的图形。对于一个给定的情形，比如说围绕着一个障碍物流动的流体的情形，问题的困难部分在于选择什么样的解析函数，整个事情就大大倒退了：研究了一些简单的函数，寻找了它们适合的物理问题。非常奇怪的是，许多这些人为地准备的问题，被证明在空气动力学和流体运动理论的其他实际应用中是最有用的。

单复变量解析函数的理论，是十九世纪数学取得成功的最大领域之一。高斯在给贝塞尔的信中，说明了这个广阔的理论中的基本定理有多么重要，但是他没有公开它，而留待柯西和后来的维尔斯特拉斯去重新发现。由于这是数学分析史上的一个里程碑，我们要简单地描述它，但略去严格的公式所要求的所有细微的区别。

想象单复变量z在一个没有打圈或扭结的有限长的闭曲线上移动。我们直观地懂得这条曲线上一段的"长度"的意义是什么。



在曲线上标出 n 个点 P_1, P_2, …, P_n, 使得 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, …, P_nP_1的每一段都不超过某个预先指定的有限长度 l。在每一个这样的线段上，选一个不在线段的两端的点；对相应于该点的 z 的值，形成 $f(z)$ 的值；把这个值与点所在的线段的长度相乘。对于所有的段都同样这样做，再把结果加起来。最后当段的数目无限增加时，取这个和的极限值。这给出了 $f(z)$ 对于曲线的"线积分"。

这个线积分何时为零呢？为了使线积分为零，充分的条件是 $f(z)$ 是在曲线上和曲线内的每一点 z 都解析(一致和单演)。

这就是高斯在 1811 年告诉贝塞尔的伟大定理，它和同一类型的另一个定理，在独立地重新发现它的柯西手里，将以推论的形式产生分析学的许多重要的结果。

天文学并没有占据高斯三十五、六岁时的全部惊人的精力。1812 年，这一年拿破仑的大军拼命挣扎着进行穿过冰冻的平原的后卫战斗，也是在这一年，高斯发表了另一项伟大的工作，这是关于超级几何级数

$$1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)x^2}{c(c+1)1\times 2}+\cdots\cdots,$$

的工作，其中虚点表示级数按照所示的规律无限继续下去，下一项 252
是

$$\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{x^3}{1\times 2\times 3}。$$

这个研究报告是另一个里程碑。正如已经指出的，高斯是现代第一个严格主义者。在这项工作中，他决定为了使这个级数收敛(在本章早些时候解释过的意义上)，必须给 a, b, c, x 加上一些限制。这个级数本身不只是为了训练分析运算的技巧而研究它，然后把它忘掉的教科书中的练习。它作为特殊情形——由给 a, b, c, x 的一个或更多个指定特殊值得到的——包括了分析中的许多重要的级数，例如，用于在牛顿天文学和数学物理中反复出现的对数、三角函数和其它一些函数的计算和造表中的级数；广义的二项式定理也是一个特例。通过研究这个级数的一般形式，高斯一举解决了许多问题。从这项工作中，发展出了对十九世纪物理学中的微分方程的许多应用。

选择这样一个课题来认真研究，是高斯的特点。他从不发表不知道的东西。当他发表什么东西时，它不仅本身是完成了的，而且还充满了许多想法，足以使他的后继者们，能够把高斯发明的东西应用到新的问题上去。虽然由于篇幅所限，无法讨论高斯对纯数学的贡献的这个重要特点的许多例子，但是甚至在最简单的概述中，有一个例子也是不容忽视的，这就是关于双二次互反律这项工作。它的重要性在于，它给高等算术提供了一个完全出人意料的新方向。

既然已经解决了二次互反的问题，高斯考虑任何次数的二项

同余的一般问题就是很自然的了。说 m 是一个给定的、不能用素数 p 整除的整数，设 n 是一个已知的正整数，如果还能找到一个整数 x，使得 $x^n \equiv m \pmod p$，那么就称 m 为 p 的一个 n 次剩余；当 $n=4$ 时，m 是 p 的一个双二次剩余。

253 二次二项同余($n=2$)的情形，对 n 超过 2 时没有什么提示。高斯要包括在他的《算术研究》被抛弃了的第八节(或者如他告诉索菲·热尔曼的，也许包含在计划了但是没有实现的第二卷)中的一个内容是，讨论这些高次同余，研究相应的互反律，即 $x^n \equiv p \pmod q$、$x^n \equiv q \pmod p$，其中 p, q 是有理数，之间的相互关系(关于可解或不可解的)。特别是 $n=3$, $n=4$ 的情形是要研究的。

1825 年的论文，以伟大的先驱者们的全部勇气开辟了新天地。在经过多次导致了无法忍受的复杂程度的错误开端之后，高斯发现了进入他的问题中心的"自然"途径。有理整数 1, 2, 3, ……不适宜于双二次互反律的论述，因为它们是适于二次的；必须发明一类全新的整数。这些被称为高斯复数，是所有那些形式为 $a+bi$ 的复数，其中 a, b 是有理数，i 表示 $\sqrt{-1}$。

为了说明双二次互反律，必需对这些复整数的算术可除性规律作详尽的初步讨论。高斯作了这样的讨论，因而开始了代数数的理论——也许这就是他在作出对费马大定理的估计时脑子里所想到的。对于三次互反($n=3$)，他也用同样的方式发现了正确的途径。他关于这个问题的工作，可以在他死后发表的文章中找到。

当我们讲到库默尔和戴德金的经历时，这个伟大进展的重要性就更清楚了。暂时只需说高斯最喜爱的弟子艾森斯坦解决了三次互反问题就够了。他还发现了双二次互反律和椭圆函数理论的某些部分之间的、令人惊奇的联系，高斯在这方面作过深入的研究，但是没有透露他发现了甚么。

高斯复整数当然是所有复数的一个子类，人们可能会认为，所有的数的代数理论，会产生包括整数在内的算术理论，作为一个平凡的细节。实际情况决不是这样的。与算术理论相比，代数理论是幼稚而容易的。也许有理数（形式为 a/b 的数，其中 a，b 是有理整数）能够提出为什么会如此的原因。我们总是能够用一个有理数去除另一个有理数，得到另外一个有理数：a/b 用 c/d 除，产生有理数ad/cb。但是一个有理整数由另一个有理整数去除，并不总是另一个有理整数：7 被 8 除是 7/8。因此，如果我们必须把我们限制在整数这个数论最有兴趣的情形，我们就在起步之前缚住了我们的双手，拴住了我们的双脚。这就是高等算术比代数（高等或初等）困难的一个原因。 254

高斯还在几何和数学对大地测量学、牛顿引力理论和电磁学的应用方面，作出了同等重要的进展。一个人怎么可能完成这样大量的最高水平的工作呢？高斯以他特有的谦虚宣称，“如果其他人也象我这样思考数学真理，也象我这样深入，这样持久，那末，他们也能作出我所作出的这些发现。”也许是这样。高斯的解释使人想起牛顿的解释。当有人问牛顿，他是怎样在天文学中作出超过所有他的前辈的发现时，他回答：“总是想着它们。”对牛顿来说，这也许是平淡无奇的，对平常人就不是这样了。

高斯不由自主地专注于数学思想——这本身当然也需要解释——回答了围绕着他的一部分谜。高斯年轻的时候会被数学“抓住”。他在和朋友们谈话的时候，会突然沉默下来，沉浸在他无法控制的思想中，一动不动地站在那里，茫然地凝视着周围的一切。过后他控制住了自己的思想——或者它们失去了对他的控制——，他有意识地把他的全部力量用于解决一个困难问题，直到成功为

止。他一旦抓住了一个问题，在征服它之前是不会放手的，尽管他可能会同时专注于几个问题。

他在一个这样的例子中(参见«研究», 636 页)，讲述了他怎样在长达四年之久的时间里，几乎没有一个星期不花一些时间去试着解决一个确定的符号是正还是负。最后解答自己突然出现了。但是如果以为它会象一颗新星那样自己冒出来，而不需要那些"浪费了"的时间，那就完全没有抓住要点。高斯经常在花费了几天或几个星期毫无结果地从事某项研究之后，在经过了一个不眠之夜继续工作时，发现障碍消失了，全部解答清楚地闪现在他的脑海中。紧张而持久地集中精力的能力，是他的秘密的一部分。

这种在自己思考的世界中忘掉自己的能力，高斯与阿基米德和牛顿是相似的。在另外两个方面，他也和他们不相上下：他具有精密观察的天赋和科学独创能力。这些才干，使他能够设计出他的科学研究所必须的仪器。大地测量学中的回光仪就归功于高斯，这是一个巧妙的装置，信号可以利用反射光即刻实地传播出去。回光仪在当时是一大进步。在高斯手里，他所用的天文仪器也得到了显著的改进。为了用于他对电磁学的重要研究，高斯发明了双线磁强针。作为他在机械方面的独创才能的最后一个例子，我们可以回想他在 1883 年发明了电报，他跟和他一起工作的威廉·韦伯(1804—1891)，不用说是把它用来传送消息了。数学天才与第一流的实验才能的结合，是全部科学中一种极为罕见的情形。

高斯本人极少关心他的发明可能有的实际用途。他象阿基米德一样，宁要数学，不要地上的全部王国；别人可以采集他的劳动的实际成果。但是，他在电磁学研究中的合作者韦伯，清楚地看到了格丁根的这个小小的电报对文明意味着甚么。我们记得铁路在十九世纪三十年代初刚刚出现。韦伯在 1835 年预言，"当全球都

覆盖上一张铁路和电报的网时，这张网所提供的服务，就可以与人体的神经系统的作用相当了，部分作为运输的方法，部分作为以闪电的速度传播思想和大事件的方法。”

我们已经提到过高斯对牛顿十分钦佩。高斯知道他自己的一些杰作使他付出了多么巨大的努力，因此他由衷地欣赏牛顿花在他最伟大的工作上的长期准备和不间断的思考。牛顿和苹果落下来的故事使高斯非常愤慨。“愚蠢！”他喊道，“如果你愿意，就相信这个故事好了。但是事情的真象是这样的：一个愚蠢的、爱管闲事的人问牛顿，他是怎样发明万有引力的。牛顿看出他是在和一个只有儿童的智力水平的人打交道，想要避开这个讨厌的家伙，就回答说一个苹果掉了下来，打在他的鼻子上。那个人完全明白了，非常满意地走开了。”

苹果的故事在我们自己的时代也有过反映。当有人追问爱因斯坦，是什么使他得出了他的引力场理论时，爱因斯坦回答，他问过一个从房子上掉下来，落在一堆干草上没有受伤的工人，他在下落的途中是否注意到了重力的“力”在拉他。当被告知没有力拉过他时，爱因斯坦立刻看出，在时空的一个充分小的范围内，“引力作用”能够由观察者（下落的工人）的参照系的一个加速度来代替。这个故事，如果是真的，也可能全是胡说。使爱因斯坦产生他的想法的，是为了掌握两个意大利数学家里奇和莱维-奇维塔的张量微积分，而花费了几年的艰苦劳动。这两位数学家本人是黎曼和克里斯托费尔的弟子，而这两人又受到了高斯的几何工作的启迪。

256

高斯也对阿基米德无限钦佩。他在谈到阿基米德时说，我不能理解阿基米德怎么会没有发明计数法的十进制或与它相等的东西（有与10不同的基数）。阿基米德设计了一种远远超出希腊记号的表示能力的方法，用来书写和处理数字，他的这项完全非希

腊式的工作，按照高斯的说法，已经把十进制记数法及其最首要的位值原理 ($325=3\times10^2+2\times10+5$) 掌握在他手里了。高斯把这个疏忽看成是科学史上最大的灾难。"要是阿基米德作出了那个发明，现在的科学就会上升到甚么样的高度啊！"他喊道，想到他自己的那一大堆算术和天文学计算，要是没有十进制记数法的话，甚至对他说来这些计划也是不可能的。高斯充分重视改进了的计算方法对全部科学的重要意义，他在自己的计算上拼命工作，直到把好多页的数字化简为几乎一眼就能扫过去的几行为止。他自己的许多计算工作是用心算的；改进计算方法是想要给那些没有他那么高的天赋的人。

尽管高斯对有关统计学、保险学和"政治算术"科学的一切问题，都有浓厚的兴趣和洞察力，使他足以成为一名优秀的财政大臣，但是他与牛顿晚年不同，担任公职的奖赏从来没有吸引过他。一直到他最后患病，他始终满足于他的科学和他简单的消遣。广泛阅读欧洲文学和古代经典著作，对世界政治的带批判性的关心，掌握外国语言和新的科学(包括植物学和采矿学)，这些就是他的业余爱好。

257 英国文学特别吸引他，尽管象莎士比亚的悲剧那些比较阴暗的方面，使这位对一切形式的苦难都异常敏感的伟大数学家受不了。他小心翼翼地挑选着欢快些的名著。沃尔特·司各特爵士(他是高斯的同代人)的小说一出版，他就热心地阅读，但是《凯尼尔沃思》的不幸结局使高斯难过了好几天，他后悔读了这本小说。司各特的一处失误，"月亮在西北方明朗地升起"，把他逗得大笑起来，一连好几天，他忙着在他能找到的所有的本子上改正这个错误。他尤其喜欢用英文写的历史著作，特别是吉本的《罗马帝国的衰亡》和麦考莱的《英国史》。

对于他的转瞬即逝的年轻的同代人拜伦爵士，高斯几乎是抱着反感的。拜伦的装腔作势，他那喋喋不休的悲观厌世，他那娇揉造作的愤世嫉俗，以及他那浪漫派的漂亮面孔，完全迷住了多愁善感的德意志人，甚至超过了他对感觉迟钝的英国人的吸引力，这些英国人——至少年龄较长的男人——认为拜伦有点象头蠢驴。高斯看透了拜伦的装模作样，并且讨厌他。没有一个象拜伦那样沉缅于醇酒与美人的人，能够象这位眼睛发亮、手发颤的下流诗人那样自称厌倦了这个世界。

就一位有知识的德国人来说，高斯对他本国文学的趣味是有些不平常的。耶安·保罗是他喜爱的德国诗人；对哥德和席勒——他们的生活部分与他自已相重叠——他评价不很高，他说，哥德是不令人满意的。由于和席勒的哲学原则完全不一致，高斯不喜欢他的诗。他把《顺从》称为一部亵渎神明的腐化堕落的诗，在他那一册的页边上写着"靡菲斯特！"①

高斯终生保持着他青年时代掌握语言的能力。语言对于他不仅是一种爱好。在他年事日高的时候，为了检验他的脑子的灵活程度，他会有意地去学习一种新的语言。他认为这种练习有助于使他的脑子保持年轻。他在六十二岁时开始认真学习俄文，没有任何人的帮助，两年不到他就能流畅阅读用俄文写的散文和诗体著作，并且完全用俄文和他在圣彼得堡的科学界朋友们通信。在格丁根访问过他的俄国人，认为他讲俄语也很流畅。他象喜欢英国文学那样喜欢俄国文学。他也试过梵文，但不喜欢它。 258

他的第三个爱好是世界政治，每天都要花费他一小时左右的时间。他定期去文献博物馆，通过阅读博物馆订阅的全部报纸，从

① 欧洲中世纪关于浮士德的传说中的魔鬼。——译者

伦敦的《泰晤士报》到格丁根的地方报，他随时了解发生的事件。

在政治方面，知识上的贵族高斯是彻底的保守派，但是决不反动。他所处的时代，国内外都动荡不安。暴民统治和形形色色的政治暴行使他产生了——如他的朋友冯·沃尔特豪森所说——“一种难以形容的恐惧。”1848年的巴黎起义使他极为沮丧。

高斯本人出身寒微，从婴儿时期就熟悉“人民群众”的智力和道德，他记得他所看见的，他认为“人民”的智力、道德和政治敏感——总的看来，正象蛊惑民心的政客所发现和认为的那样——都是极端低下的。

当卢梭的“自然状态的人”聚集成为暴民，或者当人们在内阁、议会、国会和参议院中协商时，这种对于人所固有的道德、正直和智慧的怀疑，无疑部分是由于高斯作为一个科学家，熟知在法国大革命最初的日子里，“自然状态的人”是怎样对待法国科学家的。也许真如革命者们宣称的，“人民不需要科学，”但是对于一个具有高斯的性格的人，这样的声明是一个挑战。为了接受这个挑战，高斯这方面也表示了他对一切为了自己的利益而把人民引上骚乱的“人民的领袖们”的尖刻的蔑视。当他年老时，他认为不论在任何国家，和平和简单的满足是唯一的好事。他说，如果德意志发生内战，他宁愿立即死掉。他把庞大的拿破仑方式的国外征服，视为不可理解的疯狂。

这些保守的情绪，并不是一个号召全世界蔑视天体力学规律，停滞在一个僵死的、一成不变的、过去的天堂中的反动分子的情绪。高斯相信改革——只要它们是明智的。如果脑子不能去判断甚么时候改革是明智的，甚么时候不是明智的，那么人体还有甚么器官能去判断呢？高斯有足够的头脑，看出他自己那改革的一代人中，一些伟大的大政治家的野心在把欧洲引向何处。表面现象并

259

不能取得他的信任。

高斯的比较进步的朋友们，把他的保守主义归咎于他把自己紧紧局限于他的工作。这或许有些关系。高斯一生的最后二十七年，只有一次是在天文台以外度过的，那时他为了让亚历山大·冯·洪堡高兴，而去柏林参加了一次科学会议，洪堡是想要在那里炫耀他。但是一个人并不是总得飞遍各地去看在发生些什么事。头脑和阅读报纸（即使在它们说谎的时候）和政府报告（特别是在它们说谎的时候）的能力，有时比再多的观光访问和旅馆休息室里的闲扯都更好些。高斯呆在家里，读报，几乎读的东西都不相信，思考，得出了真理。

高斯的另一个力量来源，是他在科学上的安详从容，和完全没有个人野心。他的全部野心就是促进数学的发展。当对手们怀疑他坚持说的他早已预见到它们——不是吹牛，而是与他手上处理的问题有关的事实——时，高斯没有拿出他的日记来证实他的优先权，而是让他的陈述立脚于它自身的价值。

勒让德是这些怀疑者中最直言不讳的。有一次经历使他成为高斯终生的敌人。高斯在他的《天体运动理论》中曾经提到他很早发现的最小平方法。勒让德在高斯之前，于1806年发表了这个方法。他怀着极大的愤怒写信给高斯，实际上是指责他不诚实，并抱怨说高斯有那么丰富的发现，原可以顾及体面，不盗用最小平方法，那是勒让德视为他自己最珍爱的东西的。拉普拉斯加入了这场争吵。他没有说他是否相信高斯所肯定的，确实比勒让德领先十年或者更早，但是他保持他一向讨好的态度。高斯显然不屑于就这件事再争论下去。但是他在给一个朋友的信中指出了证据，要是高斯不是那么“傲慢而不屑于争吵”，这个证据当时就可以结束这场争论。他说，“我在1802年就把这整个问题告诉奥尔贝斯了。”

而如果勒让德对此有所怀疑，他本可以问问奥尔贝斯，他手上有手稿。

这次争论对数学后来的发展是最不幸的，因为勒让德把他没有根据的怀疑告诉了雅可比，这样就阻止了那位椭圆函数理论的才华横溢的青年开发者，与高斯建立起亲密的关系。这场误会尤其令人遗憾的是，因为勒让德是一个品德高尚的人，他本人是极为公正的。他命中注定要在一些领域里被比他富于想象力的数学家超过，他漫长而勤劳的一生，大部分都花费在这些领域中，而他的辛劳被年轻人——高斯、阿贝耳和雅可比——表明是多余的。高斯在每一步都走在勒让德前面。然而当勒让德指责高斯做事不公正时，高斯感到他本人在危难时被舍弃了。他写信给舒马赫(1806年7月30日)，埋怨说，“看来我是命中注定，几乎在我所有的理论工作中都与勒让德碰车。在高等算术中，在与椭圆求长法[寻找曲线的弧长过程]有关的超越函数的研究中，在几何的基础中，都是这样，而现在，这儿[在最小平方法中，它]……也用在勒让德的工作中，而且确实用得很漂亮。”

随着高斯死后发表的著作和前些年的大量通信的详尽出版，所有这些老的争论都彻底解决了。结果对高斯有利。还剩下另一方面他是受到批评的，这就是他对欢迎别人的伟大工作，特别是比较年轻的人的工作，缺乏热诚。当柯西开始发表他在单复变量函数理论中的光辉发现时，高斯对它们置若罔闻。这位数学家之王没有对这个年轻的法国人说一句赞扬或鼓励的话。是呀，为什么要说呢？高斯本人(如我们所知)在柯西开始这项工作以前很多年，就已得出了这个问题的实质。一篇关于这个理论的论文将成为高斯的一篇名著。还有，当哈密顿关于四元数的著作(下一章将要论述)在1852年，高斯去世前三年，引起他的注意时，他什么也

没有说。他为什么要说呢？这个问题的关键早已记在他三十多年前的笔记中了。他保持沉默，没有提出他的优先权。正如对他在单复变量函数理论、椭圆函数和非欧几何中的领先地位一样，高斯满足于做了这些工作。

四元素的要旨在于这样一种代数，它之于三维空间中的旋转，就象复数的代数之于平面的旋转。但是在四元素(高斯称它们为变换)中，代数的一个基本规则打破了：$a\times b=b\times a$不再成立，而且不可能作出保持这个规则的三维旋转的代数。十九世纪的一个 261 伟大的数学天才哈密顿，以爱尔兰人的充沛的精力，记录了他是怎样为发明一个能够满足要求的、无矛盾的代数奋斗了十五年，一直到一个幸福的灵感使他想到，在他寻找的代数中$a\times b$不等于$b\times a$。高斯没有说他用了多长时间达到这个目的；他只是用了几页纸记录了他在代数中的成功，没有给数学留下更多想像的余地。

如果说高斯在他发表的表示感谢的言词中有点冷漠，对那些竭力找他交往，以求得无私的探讨的人，他和他们的通信以及科学方面的关系，都是很亲切的。他在科学上的友谊之一，不仅是出于数学上的兴趣，它表明了高斯对待妇女科学工作者的开明观点。他在这方面的博大胸襟，对他那一代的任何人来说也是很突出的；对一个德意志人来说更是没有先例的。

这里论及的这位女士是索菲·热尔曼(1776—1831)——正好比高斯大一岁。她和高斯从未见过面，在格丁根大学根据高斯的推荐，授与她名誉博士学位之前，她在巴黎去世。由于一种奇怪的巧合，我们将看到十九世纪最杰出的女数学家，另一位索菲，在柏林大学因为性别关系拒绝授与她学位的许多年以后，从这同一所开明的大学获得她的学位。对于妇女，索菲似乎是一个幸运的名字——只要她们与宽宏大度的教师交往。我们这个时代的主要女

数学家埃米·纳脱(1882—1935)也是来自格丁根。①

索菲·热尔曼在科学方面的兴趣包括声学、弹性的数学理论,以及高等算术,她在所有这些领域中都作了出色的工作。特别是对研究费马大定理作出了一项贡献,这项贡献在1908年导致美国数学家伦纳德·尤金·迪克森(1874—)在这方面取得很大的进展。

262 索菲被《算术研究》所深深吸引,写信把她自己在算术方面的一些意见告诉了高斯。她担心高斯会对女数学家怀有偏见,便用了一个男人的名字。高斯对这位有天赋的通信者评价很高,用优美的法语称呼她为"勒布朗先生。"

法军入侵汉诺威时,索菲做了一件对高斯有利的事,这时勒布朗不得不脱下她的——或他的——伪装,向高斯泄露了她的真实姓名。1807年4月30日,高斯写信对他的通信者为了他的缘故与法国将军佩尔内进行交涉,表示感谢,并对这场战争深表遗憾。接着,他高度赞扬了她,并表示了他本人对数论的热爱。由于后面一点是特别有趣的,我们从这封信中摘录一段,它表明了高斯富于人情味的亲切的一面。

"但是怎么向你描述看见我尊敬的勒布朗先生把他自己变成了这位杰出的人物[索菲·热尔曼]时,我的钦佩和惊讶呢,这位杰出人物对于我发现是难以置信的东西,作出了这样光辉的榜样。对一般抽象科学,首先是对数的奥秘发生兴趣,是极为罕见的:我们不会对此感到惊讶;这门卓越的科学,只向那些有勇气深入探索它的人,展现它迷人的魅力。按照我们的习惯和偏见,女性要熟悉这

① 说"来自"是对的。当嗅觉灵敏的纳粹因为弗劳莱因·纳脱是犹太人而将她从德国驱逐出境时,宾夕法尼亚大学的布赖恩·莫尔学院接纳了她。她是世界上最富于创造力的抽象代数学家。新日耳曼启蒙运动开始不到一星期,格丁根便失去了高斯所珍爱的、并奋斗终生力求维护的开明与公正。

些棘手的研究工作，必定会遇到比男性多得多的困难，但是当一个女性成功地越过了这些障碍，深入到其中最难解的部分时，那就毫无疑问，她必定具有最崇高的勇气、非凡的才能和超人一等的天才。确实，没有什么东西能以如此令人高兴而明确的方式向我证明，这门以如此多的欢乐丰富了我的生活的科学的吸引力，不是如你喜欢用来为它增辉而说的：是幻想中的。"他接下去和她讨论数学。这封信结束时的日期，令人高兴地提到："Bronsvic ce 30 Avril 1807 jour de ma naissance——不伦瑞克，1807 年 4 月 30 日，我的生日。"

高斯 1807 年 7 月 21 日写给他的朋友奥尔贝斯的一封信表明，他不仅只是出于对一个年轻的女敬慕者的礼貌。"……拉格朗日对天文学和高等算术很感兴趣；有两个试验定理(对于什么样的素数，2 是三次剩余或双二次剩余)，我前不久也曾写信告诉过他的，他认为是'属于最美妙而最难证明之列的'。但是索菲·热尔曼把这些定理的证明寄给了我；我还没有来得及把它们看完，但是我相信它们是对的，至少她是从正确的方向着手解决这个问题的，只不过稍微啰嗦了一些……"高斯所说的那些定理是，对于什么样的奇数 p，同余方程 $x^3\equiv2(\mathrm{mod}\,p)$，$x^4\equiv2(\mathrm{mod}\,p)$ 是可解的。

263

十一

要阐述高斯对数学、纯数学和应用数学的全部突出的贡献，需要写一本很厚的书(也许比写牛顿所需要的篇幅还要长)。这里我们只能考虑一些还没有提到的、比较重要的工作，我们将选择那些给数学增添了新方法，或者圆满解决了突出问题的工作。从粗略然而方便的时间表(由高斯著作的编辑们编排的)中，我们概括高斯在 1800 年以后兴趣所在的主要领域如下：1800—1820 年，天文学；1820—1830 年，测地学、曲面理论、保角映射，1830—1840

年，数学物理，特别是电磁学、地磁学，和根据牛顿定律的引力理论；1841—1855年，拓扑学，与单复变量函数相联系的几何。

高斯在1821—1848年期间，是汉诺威(格丁根当时在汉诺威政府管辖之下)和丹麦政府在广泛的测地勘测中的科学顾问。高斯积极投身于这项工作。他的最小二乘法和他在设计处理大量数值数据的格式方面的技巧，有了充分发挥的机会，但是更重要的是，在精确测量一部分大地曲面中出现的问题，无疑提出了与所有曲面有关的更深刻、更一般的问题。这些研究将引出相对论的数学。这个课题并不是新的，高斯的几位前辈，特别是欧拉、拉格朗日和蒙日，已经研究过关于一些类型的曲面的几何，但是它仍然有待于高斯去解决全部一般性的问题，从他的研究中产生了微分几何的第一个伟大的时期。

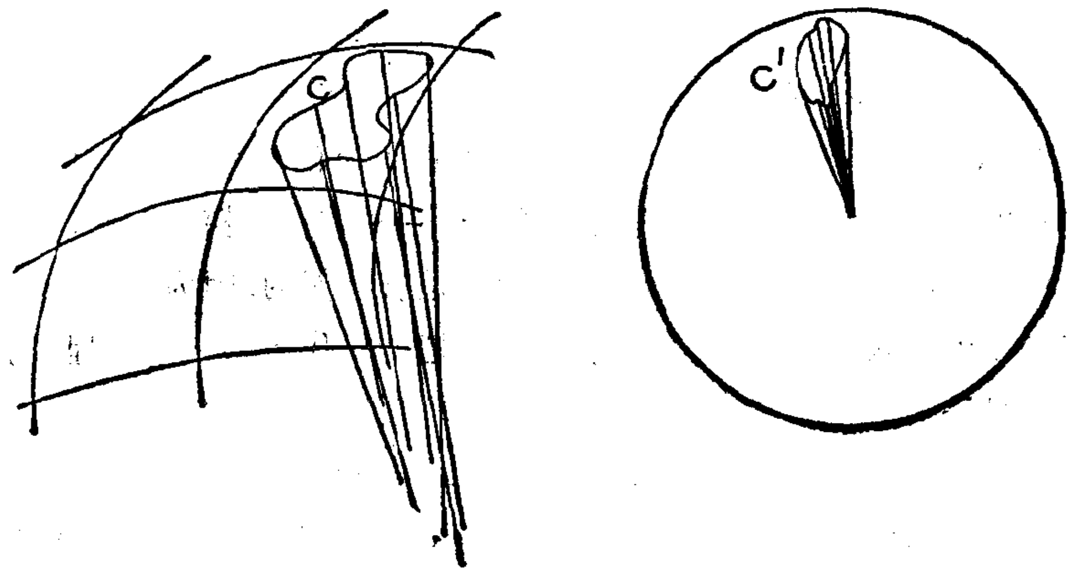
微分几何可以被粗略地描述为在一个点的邻近处，使得距离的高于二次的幂可以被省略，对曲线、曲面等等的性质的研究。黎曼受到这项工作的启发，在1854年写出了构成几何基础的假设的经典论文，接着开始了微分几何的第二个伟大的时期，今天它被应用于数学物理，特别是广义相对论中。

264

高斯在他的关于曲面的著作中考虑的三个问题，提出了对数学和科学具有重要意义的理论，这三个问题是曲率的测量，保角表示(即映射)，和曲面的可贴性。

"弯曲的"时空，是对一个用四个坐标而不是用两个坐标描述的"空间"的熟知且可见的曲率的纯数学扩展，它的不必要的神秘运动是高斯关于曲面的工作的自然发展。他的一个定义说明了这一切的合理性。问题是要设想出一些精确的方法，来描述曲面的"曲率"怎样从曲面的一个点变到另一个点；这种描述必须满足我们对于"弯曲得多"和"弯曲得不多"的直观感觉。

由一个没有扭结的闭曲线C围成的曲面，其任何部分的全曲面是如下定义的。曲面在给定点的法线是通过该点的直线，它垂直于在给定点与曲面相切触的平面。C的每一个点处有一根曲面的法线。想象所有这些画出来的法线。现在，想象从一个半径为单位长度的球(可以在与所考虑的曲面有关的任何位置)的中心，画出所有平行于C的法线的射线。这些射线将在单位半径的球上交出一条曲线，比如说C'。球面上由C'围出的那一部分的面积，就定义为给定曲面上由C围出的那一部分的全曲率。稍微想象一下就会看出，这个定义与所要求的普通概念是一致的。 265



高斯在曲面研究中开拓的另一个基本概念是参数表示。

表示平面上的一个特殊点，要求两个坐标。在球面或象地球那样的球体上也一样：在这种情形下坐标可以被想象为经度和纬度。这说明了二维流形意味着什么。一般说来，如果要表示(使具有个性)一类东西(点、声音、颜色、线)中的每一个特殊成员，恰好n个数是充分必需的，那么就说这个类是一个n维流形。在这样的表示中，人们同意，只给类中成员的一些特点指定数。这样，如果我

们只考虑声音的音高，我们就有了一个一维流形，因为一个数，声音的振动频率，就足以决定音高；如果我们加上声高——在某个适当的音阶上测定——声音现在就是一个二维流形了，等等。如果我们现在把曲面看作是由点构成的，我们就看出它是一个(点的)二维流形。我们发现，用几何的语言把任何二维流形说成"曲面"，并把几何推理用于流形——希望发现一些有趣的东西——是很方便的。

上述考虑导致曲面的参数表示。在笛卡儿的几何中，三个坐标之间的一个方程表示一个曲面。设(笛卡儿)坐标是 x, y, z。代替用联系 x, y, z 的单独一个方程表示曲面，我们现在用三个方程：

$$x=f(u, v), y=g(u, v), z=h(u, v),$$

其中 $f(u, v)$, $g(u, v)$, $h(u, v)$ 是新变量 u, v 的函数表示，使得当这些变量被消去(除去——字面的意思是"放在门槛上")时，结果就是曲面的 x, y, z 方程。这种消去是有可能的，因为用两个方程可以解出两个未知数 u, v；然后可以把结果代入第三个方程。例如，如果

266

$$x=u+v, y=u-v, z=uv,$$

我们从前面两个方程得到 $u=1/2(x+y)$, $v=1/2(x-y)$，因此从第三个方程得到 $4z=x^2-y^2$。现在当变量 u, v 独立地跑遍任何指定的数集时，函数 f, g, h 就取了一些数值，x, y, z 就在其方程是上述三个的曲面上移动。变量 u, v 称为曲面的参数，三个方程 $x=f(uv)$, $y=g(u, v)$, $z=h(u, v)$ 称为曲面的参数方程。当这种表示曲面的方法用于研究点与点之间变化很快的曲面的曲率和其它性质时，它要比笛卡儿方法优越得多。

注意，参数表示是内在的；它的坐标参照曲面本身，而不是象

笛卡儿方法那样，参照一组外在的或外来的，与曲面无关的轴。也观察两个参数 u, v 直接表明曲面的二维性质。地球上的经度与纬度是这些内在的、“自然的”坐标的例子；按照三个穿过地球中心画的互相垂直的轴航海，就象按照笛卡儿方法航行一样，是非常方便的。

这个方法的另一个优点是，它很容易推广到任意维数的空间。只要增加参数的数目，象前面那样做就足够了。当我们谈到黎曼时，我们会看到这些简单的想法怎样导致了毕达哥拉斯和欧几里得的度量几何的推广。这个推广的基础是由高斯奠定的，但是它们对于数学和物理科学的重要意义，直到我们这个世纪才受到充分重视。

大地测量学研究还向高斯提示了几何学中另一个有力的方法，即保角映射方法的发展。在画一幅地图，比如说格陵兰地图之前，有必要先决定一下要保留些什么。距离要象在墨卡托的投影中那样被扭曲，以至于使格陵兰与北美洲相比较呈现出夸大了的重要性吗？或者距离应该保持下来，使得地图上的一英寸，不管是沿参照线（比如说经度和纬度）在什么地方量度的，都总是对应于在地球表面测量的同样距离吗？如果是这样，就需要一种映射。这种映射应该不保持除我们希望保持的特点以外的特点；例如，如果地球上的两条道路在某个角度相交，那么在地图上表示这些道路的线将在不同的角度相交。那种保持角度的映射称为保角映射。在这样的映射中，早些时候描述过的单复变量解析函数的理论，是最有用的工具。

保角映射的题目经常用于数学物理及其应用，例如静电学、流体力学和它的分支空气动力学，在最后这个学科中，它在机翼理论中起了重要作用。

高斯一向仔细耕耘并取得成功的另一个几何领域，是曲面的可贴性，它要求决定什么样的曲面能够不拉伸、不撕裂地弯曲得贴到另一个给定的曲面上。在这里，高斯发明的方法又是具有普遍性的，并具有广泛的用途。

高斯也对科学的其他部门进行了重要研究，例如对电磁学、包括地磁学，毛细现象，引力规律为牛顿定律的椭球体之间的吸引力(行星是特殊类型的椭球体)，以及屈光学，特别是与透镜组有关的屈光学等这些科学部门的数学理论，都作出了重要的研究。最后这个部门给他提供了一个应用他的纯抽象的方法（连分法）的机会，这个方法是他在年轻时为了满足对数论的好奇心而发展起来的。

高斯不仅仅把所有这些东西极端地数学化了，他还善于用他的双手和双眼，是一个极其准确的观察家。他发现的许多特殊的定理，特别是他在电磁学和引力理论的研究中发现的定理，成了所有在物理科学方面严肃工作的人们必不可少的工具。高斯在他的朋友韦伯的帮助下，为所有的电磁现象寻找一个满意的理论达许多年之久。由于没有找到他认为满意的理论，他放弃了这项尝试。如果他发现了电磁领域中的克拉克·麦克斯韦(1831—1879)方程，他可能就满意了。

这些伟大的工作为高斯博得了无可争议的数学家之王的头衔，为了结束这个已经很长但仍远未完全的一览表，我们必须提及这样一个学科，关于这个学科他除了在1799年的论文中顺便提了一下以外，什么也没有发表，但是他预言它将成为数学的一个主要关心的课题——拓扑学。不可能在这里给出它意味着什么的专门的定义(这要求连续群的概念)，但是可以从一个简单的例子中得到这个学科讨论的问题类型的一些线索。在一根线上打上任意一种结，然后把线的两端系在一起。用肉眼把一个“简单的”结和一个

268

"复杂的"结分开是很容易的。但是我们怎么能对两个结的差异作出精确的数学说明呢？虽然高斯关于这个问题什么也没有发表，但是他开了个头，就象我们在他死后发表的论文中看到的那样。这个学科中的另一类问题是，决定在一个给定的曲面上，能使我们把这个曲面展平到平面上的剖线的最小数目。对于一个锥面，一道剖线就够了；对于一个环面，需要两道剖线；对于一个球面，如果不允许伸展的话，有限数目的剖线是不够的。

这些例子可能使人想到，整个学科是微不足道的，但是如果真是如此，高斯就不会赋与它以特殊的重要性了。他对它的重要特性的预见，已经在我们这一代实现了。今天一个活跃的学派（包括很多美国人——J.W. 亚历山大、S. 莱夫谢茨，O. 凡勃伦，以及其他一些人）正在发现拓扑学，或者如人们有时称它为"位置的几何学"，在几何和分析学中具有的广泛的分布。现在看来，高斯没有能从他对谷神星的研究中，挤出一两年的时间，来把他关于这个广阔理论的思想条理化，是非常可惜的，因为这个理论会成为他晚年的梦想和我们自己青年时代的现实。

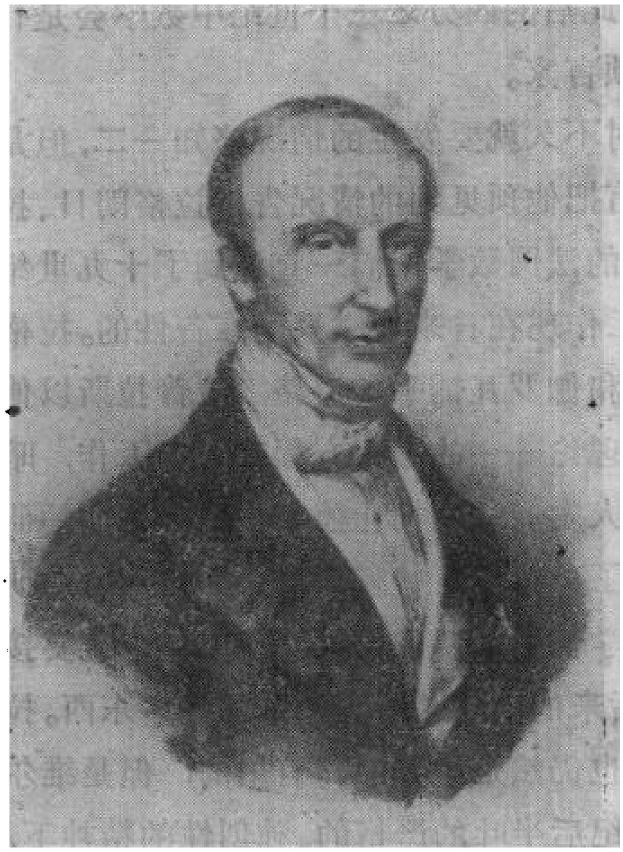
他的最后几年充满了荣誉，但是他并没有得到他有权享受的幸福。在他去世前几个月，他那致命的疾病显露出最初的症状时，高斯仍然象他过去那样思想敏捷活跃，有着丰富的创造力，他并不急于休息。

他幸免于一次暴死，这使他更加沉默寡言，他实在不能谈起一个朋友的突然死亡。二十多年来，他在 1854 年 6 月 16 日第一次离开格丁根，去看他的城市和卡塞尔之间正在建设中的铁路。高斯一直对铁路的建造和运行抱有强烈的兴趣，现在他要看见一条建造中的铁路了。马忽然脱缰奔跑，把他从马车上抛了下来，他没

269 有受伤，但是吓坏了。他康复了，当铁路在1854年7月31日到达格丁根时，他高兴地目睹了通车典礼。这是他最后一天舒适的日子。

随着新的一年开始，他开始因为心脏扩张和气短感到非常痛苦，水肿病的症状出现了。然而他只要能工作就工作，尽管他的手痉挛，他那优美清晰的书写最后难于辨认了。他写的最后一封信是给戴维·布鲁斯特爵士的，谈到电报的发明。

他几乎一直到最后都是完全清醒的，经过一番要活下去的努力挣扎以后，他在1855年2月23日凌晨安详地去世，享年七十八岁。他活在数学的每一个地方。



柯西

第十五章　数学与风车

柯　　西

一个人可能连他的主祷文也念颠倒了。

——西班牙谚语

在十九世纪的前三十年，数学突然之间成了与它在十八世纪史诗般的牛顿后的时代大不相同的东西。这种改变，是在空前普遍和自由的发明创造之后，证明的更加严格方面。今天同类的情

况又清晰可见，敢于去预测此后的四分之三个世纪中数学会是什么样子的人，不过是鲁莽的预言家。

十九世纪初，只有高斯对不久就要发生的情况略知一二，但是他的牛顿式的谨慎，使他没有把他预见到的情况告诉拉格朗日、拉普拉斯和勒让德。虽然伟大的法国数学家们一直活到了十九世纪的前三分之一，他们的许多工作现在看来似乎只是准备性的。拉格朗日在方程理论上为阿贝耳和伽罗瓦铺平了道路；拉普拉斯以他在牛顿天文学——包括引力理论——的微分方程方面的工作，暗示了十九世纪数学物理的惊人发展；而勒让德在积分学方面的研究，给阿贝耳和雅可比提示了分析学所曾得到的一个最丰富的研究领域。拉格朗日的分析力学仍然是现代的；但是甚至它，也要接受在哈密顿和雅可比，以及后来的庞加莱手里增加的许多东西。拉格朗日在变分法方面的工作也仍然是经典的和有用的，但是维尔斯特拉斯的工作也在十九世纪后半叶的严格的、独创性的精神下，给它提供了新的方向，而这个方向在我们自己的时代又得到了扩展和革新(美国和意大利的数学家在这次发展中起了主要作用)。

271 奥古斯坦·路易·柯西，是伟大的法国数学家中思想明确地属于现代的第一个，他于1789年8月21日——巴士底狱陷落后不到六个星期——出生在巴黎。作为一个大革命的孩子，他为自由和平等付出了代价，带着营养不良的躯体长大成人。只是由于他父亲的外交手腕和机智，柯西才终于在半饥饿中幸存了下来。他活过了恐怖时期，从综合工科学校毕业，为拿破仑服务。在拿破仑的秩序垮台后，柯西从革命和反革命两方面都遭到了重大的损失。他的工作在一定程度上受到他那个时代的社会动荡的影响。如果说革命或类似的事情确实影响过一个科学家的工作，柯西应该是证

明这个事实的第一流的研究样品。他在数学发明方面有特别丰富的能力和只被超过了两次——被欧拉和凯莱超过——的多产能力。他的工作就象他的时代，是革命的。

现代数学的两个引起兴趣的主要问题应归功于柯西，这两个问题中的每一个都标志着与十八世纪数学的断然决裂。第一个是把严格性引进了数学分析。要给这个进展的重要性找到一个适当的比喻是困难的，也许下面的比喻可以说明问题。假定整个民族多少世纪以来一直是向谬误的神明顶礼膜拜，而突然间向他们揭示了他们的错误。在引进严格性之前，数学分析就是整整一座谬误之神的万神殿。在这方面，柯西与高斯和阿贝耳一起，是伟大的先驱者。高斯本可以在柯西进入这个领域之前很久就领先了，但是他没有，正是柯西尽快发表论文的习惯和他对实际教学工作的天赋，使人们接受了数学分析中的严格性。

柯西给数学增加的第二个具有根本重要性的东西，是在相反的方面——组合方面。柯西抓住了拉格朗日在方程理论上的方法的核心，把它抽象化，开始了群论的系统创建。这项工作的性质留待后面详述；暂时我们只注意柯西的观点的现代性。

柯西没有打听他发明的东西是否有用，甚至对数学的其它分支是否适用，他根据它作为一个抽象体系的自身价值而发展了它。除了既愿意写关于数的难题的论文，也愿意写关于水力学或"宇宙体系"的论文的通才欧拉之外，他的前辈们发现他们的灵感来自数学的应用。这种说法当然有许多例外，特别是在算术中，但是在柯西以前，很少有人(如果有的话)在纯粹代数运算方面找到有利可图的发明。柯西看得更深一些，他在代数公式的对称性下面，看出了运算和它们的组合规律，把它们独立出来，由此导致了群论。今天，这个初级的然而复杂的理论，在纯数学和应用数学的许多领

域，从代数方程到几何和原子结构的理论中，具有根本的重要性。只需提到它的一项应用，它是晶体几何的起因。它后来的发展(在分析学方面)远远地深入到高等力学和微分方程的现代理论。

柯西的生活和性格，象可怜的唐·吉诃德的生活和性格那样影响着我们——有时我们不知道应该笑还是应该哭，只好用咒骂来折衷一下。他的父亲路易-弗朗索瓦在德行和虔诚方面都堪称典范，但是容易过头。只有老天爷知道老柯西是怎样逃脱上断头台的，因为他是一个议会律师，一位有文化的绅士，一位很有造诣的古典学者和圣经学者，一位顽固迷信的天主教徒，而且是巴士底狱陷落时的巴黎警察中尉。法国大革命爆发前两年，他和玛丽·马德莱娜·德西斯特结婚，她是一位出色的、不十分聪明的妇女，和他本人一样，也是一位顽固迷信的天主教徒。

奥古斯坦是六个孩子(两个儿子、四个女儿)中最大的一个。柯西从父母那里继承了许多可贵的品质，这些品质使他们的传记读起来，象那些为十六岁以下的法国女学生编的爱情故事一样，其中的男女主角都象上帝的圣洁的天使那样纯洁，那样缺乏性感，读起来象煮黄瓜那样枯燥乏味。既然他的父母是那样的，柯西成长为一个十九世纪三十年代和四十年代当教会采取守势时，天主教的顽固的吉诃德，或许是很自然的事情。他为他的宗教信仰痛苦，为此他是值得尊敬的(即使他是他的同事们所指责的自命不凡的伪君子，或许也值得人尊敬)，但是他也不只一次完全应该受痛苦。他关于圣洁之美的没完没了的说教，把人们激怒了，引起对他虔诚的计划的反对，而这些计划，并不总是应该受到反对的。阿贝耳本人是一位大臣的儿子，也是一个一本正经的基督教徒，他在写回家的信中，表达了柯西一时的古怪行为所引起的普遍的厌恶，“柯西是

373

一个偏执的天主教徒——这对一个科学家是一件奇怪的事情。"这句话着重的自然是"偏执"，而不是它所形容的天主教徒。我们将要遇到的两个最优秀的人，也是两个最伟大的数学家，维尔斯特拉斯和埃尔米特，都是天主教徒。他们是虔诚的，但是并不偏执。

柯西的童年时代是在法国大革命最残酷的血腥时期度过的。那时学校都关闭了，既不需要科学也不需要文化，公社对有文化的人和科学家们，或者听其饿死，或者把他们装上车送到断头台去。老柯西为了逃避这场明显的灾难，举家迁往阿格伊村他乡下的地方去了。他在那里一直度过了恐怖时期，他本人过着半饥饿的生活，主要靠他能够种植的少量水果和蔬菜，养活他的妻子和还在婴儿期的儿子，结果柯西长得很瘦小，发育不全。他将近二十岁时才开始从他早期的营养不良中恢复过来，而且一生都得当心他的健康。

这种隐居的生活，持续了将近十一年，渐渐变得不那么严格了，在这十一年期间，老柯西担负起对他的孩子们的教育。他自己编写教科书，有几本是用他擅长的流畅的诗体写成的。他认为诗歌使得语法、历史，特别是伦理学，对青少年不那么引起反感。这样，年轻的柯西也能自由流畅地写他自己的法文诗和拉丁诗，这是他一生都为之着迷的。他的诗充满了崇高的感情，极好地反映了他那虔诚、无可指责，但是另一方面也是平凡的生活。课程大部分是狭隘的宗教教育，他母亲在这方面帮了很大的忙。

阿格伊与拉普拉斯侯爵和克劳德-路易·贝托莱伯爵（1748—1822）庄严的庄园毗邻，贝托莱是著名的古怪的化学家，他因为精通火药，在恐怖时期保住了脑袋。这两个人是好朋友。他们两家的花园用一道共同的墙隔开，墙上开了一扇门，各家都有一把钥匙。尽管数学家和化学家都不虔诚，老柯西却硬要和他那著名的、

吃得很好的邻居交朋友。

贝托莱从不到任何地方去。拉普拉斯比较喜欢交际，不久就开始走访他朋友的小屋，他在那里看见年轻的柯西，不禁大吃一惊，柯西是那么瘦弱，不能象正常地养育的孩子那样跑来跑去，他象一个忏悔的修士，全神贯注地读他的书，看起来好象读得津津有味。没有多久，拉普拉斯就发现这孩子有着非凡的数学才能，于是劝告他，一定要节省他的力气。不出几年，拉普拉斯就要忧心忡忡地听柯西关于无穷级数的演讲，担心这个年轻人在收敛方面的发现会摧毁他自已的天体力学这整座大厦。"宇宙体系论"在那一次以一发之差几乎被粉碎；地球的几乎是圆形的轨道的稍微大一点的椭圆率，以及拉普拉斯据以作出他的计算的无穷级数，都会要转向了。幸而他的天文学的直觉挽救了他，使他免遭大难，因为经过长时间用柯西的方法试验他所有的级数的收敛之后，他站起来时无限宽慰地舒了一口气。

老柯西一直谨慎地与巴黎保持着联系，1800年1月1日，他被选为上院秘书。他的办公室在卢森堡宫。年轻的柯西也同他合用这间办公室，用一个角落作他的书房。这样一来，他就常常看见拉格朗日——当时在综合工科学校任教授——拉格朗日常常顺便进来同秘书柯西讨论事务。拉格朗日不久就对这孩子产生了兴趣，象拉普拉斯一样，被他的数学才能深深地打动了。一次，当拉普拉斯和其他几个知名人士在场时，拉格朗日指着在角落里的年轻的柯西说，"你们看见那个瘦小的年轻人吗？好啦，就我们作为数学家而言，他将取代我们大家。"

拉格朗日给了老柯西一点忠告，他认为这个瘦弱的孩子可能会累坏了："在他十七岁以前，不要让他摸数学书。"拉格朗日指的是高等数学。另外一次他说："如果你不赶快给奥古斯坦一点可靠

的文学教育，他的趣味就会使他冲昏头脑；他将成为一名伟大的数学家，但是他不会知道怎样用他自己的文字写作。"父亲牢记了这位当代最伟大的数学家的劝告，在放手让他的儿子从事高等数学之前，给了他充分的文学教育。在父亲为他作了力所能及的一切以后，柯西在大约十三岁时进了庞特昂的中心学校，拿破仑在这所学校设立了几个奖金，还有一种全法国所有学校同一班级的大奖赛。柯西从一开始就是学校里的明星，获得希腊文、拉丁文作文和拉丁诗的头奖。他在1804年离校时，赢得全国大奖赛和一项古典文学特别奖。同年，柯西第一次领圣餐，这在任何天主教徒的一生中都是一个庄严美好的时刻。对于柯西更是如此。

随后的十个月，他在一位很好的导师指导下对数学作深入细致的研究。1805年，他十六岁时以第二名考入了综合工科学校。在这里，他在喜欢开下流玩笑的、年轻的无神论者当中的经历，并不是完全愉快的，他们因为他公开奉行他的宗教仪式而无情地嘲弄他。但是柯西耐着性子，甚至想使一些嘲弄他的人皈依宗教。

1807年柯西从综合工科学校转到土木工程学校。虽然他只有十八岁，但很快就超过了已经入学两年的二十岁的年轻人，而且很早就被校方注明是要担任特殊职务的。1810年3月柯西完成了学业，立即被委派了一项重要的职务。他的能力和他勇于创新的精神，使他作为这样一种人被挑选出来：对于他，官僚作风应该砍掉，甚至在这过程中要砍掉某个老人的头也在所不惜，关于拿破仑，不管还可能说些什么，但是他在哪里发现了人才，就在哪里予以重用。

1810年3月，柯西离开巴黎，"行李不多，但满怀希望，"前往瑟堡就任他的第一次任命。这时距离滑铁卢之战(1815年6月18日)还有五年的时间，拿破仑仍然信心十足地期待着从海上占领英

国，在它自己芬芳的土地上，狠狠地提醒它别忘记它所犯的错误。要发动侵略，必须有一支庞大的舰队，而舰队还有待建立起来呢。在这个富于魅力的梦想中，首先需要解决的是必须建造港口和防御工具，以保卫船坞不受英国远洋航轮的侵犯。所有这些庞大的工程，将加速法国人自从攻陷巴士底狱以来一直在叫嚷的"光荣的日子"的到来，而瑟堡有许多理由作为开始这些工作的合乎逻辑的地点。因此，这位有才华的年轻的柯西就被派往瑟堡，成为一名伟大的军事工程师。

在柯西不多的行李中，只带了四本书，拉普拉斯的《天体力学》、拉格朗日的《分析函数理论》、坎普滕的托马斯的《效法基督》，和一册维吉尔的作品——这对一个雄心勃勃的青年军事工程师真是一种不寻常的搭配。拉格朗日的论文集，正是那本使它的作者的预言——"这个年轻人将取代我们大家"——首先实现的书，因为它促使柯西去寻找一种摆脱了拉格朗日函数理论的明显缺点的函数理论。

书单上的第三本书不得不使柯西感到苦恼，因为这本书和他的过分虔诚，使得他的注重实践的同事们心烦，他们急着要干他们的杀人勾当。但是柯西泰然容忍了，不久就向他们表明，他无论如何是读了这本书。他们让他放心，"你很快就会把那一切都忘掉的。"柯西的回答是，亲切地请他们指出他的行为有甚么不对，他会很乐意改正。这引出了甚么回答，没有保留下来。

关于她心爱的儿子很快就变成了一个不信仰宗教的人或者比这更坏的谣言，传到了他焦急的母亲耳朵里。柯西给她写了一封充满了虔诚的情感的长信，这封信足以使所有曾经把她们的儿子送上前线或前线附近的母亲们平静下来，柯西使她消除了疑虑，她再次快乐了。这封信的结尾表明，神圣的柯西完全能够顶住那些使

他痛苦的人，他们暗示他有点疯了。

"因此，如果以为宗教能够使谁的头脑发热，这是可笑的，如果所有的疯子都送进了疯人院，那里的哲学家就会比基督徒还多了。"这是柯西这方面的失误呢，还是他真的认为基督徒并不是哲学家呢？他不再写下去了，脑子里掠过另一个念头，"够了，别说这些了——不如写写数学论文，对我还有用些。"的确是这样；但是每当他看见一个风车以天空为背景，挥动它那巨大的臂膀时，他又猛地停下了。

柯西在瑟堡逗留了大约三年。在他繁重的本职工作以外，他的时间都安排得很得当。在1831年7月3日的一封信中，他描述了他紧张繁忙的生活。"我早上四点钟起床，从早忙到晚。我的日常工作这个月因为西班牙俘虏的到来而增加了。我们只是在八天前才接到通知，在这八天当中，我们必须建造营房，准备供一千二百人用的行军床……最后，自从最后两天以来，我们的俘虏都有了住处和盖被。他们有行军床、稻草、食物，而且认为他们自己非常幸运……工作并没有把我累着；相反地，它使我坚强，我非常健康。"

除了所有这些为了美好的法兰西的光荣而作的有用工作以外，柯西还找出时间从事研究工作。早在1810年12月，他就开始"把数学的各个分支从头到尾再温习一遍，从算术开始，到天文学为止，把模糊的地方弄清楚，应用[我自己的方法]去简化证明和发现新的定理。"除了这些以外，这个令人惊异的年轻人还找出时间来教别的人。他们请求他给他们上课，以便在专业上能够晋升，他甚至用指导学校的考试来帮助瑟堡市民，就这样，他学会了教书，他还有时间从事业余爱好的活动。 277

1812年在莫斯科的惨败，对普鲁士和奥地利的战争，以及1813年10月莱比锡战役的彻底失败，这一切都分散了拿破仑的

注意力，使他不能专心于侵略英国的梦想，在瑟堡的工作也就进行不下去了。1813年柯西回到巴黎。因为工作过度而精疲力竭。他当时只有二十四岁，但是已经以他光辉的研究工作，特别是关于多面体的论文和关于对称函数的论文，吸引了法国主要数学家们的注意。由于多面体和对称函数的性质都很容易理解，而且各自都对今天的数学提供了极为重要的启示，我们将简单地叙述它们。

第一篇论文本身并没有多大意义。今天之所以认为它重要，是因为马吕针对它所作的极其尖锐的批评。由于一种奇怪的历史的巧合，马吕在反对柯西的推理时，以丝毫不差的方式恰好提早了一百年的时间。科学院提出以“在几个基本点上完善多面体理论”作为它的获奖问题，拉格朗日提议由年轻的柯西承担这项有希望的研究。1811年2月，柯西提交了他的第一篇关于多面体的论文。这篇论文对普安索(1777—1859)提出的一个问题：“除了那些有4、6、8、12、20面的正多面体，还有可能存在其它的正多面体吗?”作了否定的回答。在这篇论文的第二部分，柯西扩展了欧拉的公式，把多面体的边数(E)，面数(F)，和顶点(V)联系在一起，$E+2=F+V$，这个公式可以在中学立体几何教科书中找到。

这篇论文印出来了。勒让德对它评价很高，鼓励柯西继续做下去，柯西又写了第二篇论文(1812年1月)。勒让德和马吕(1775—1812)是评阅人。勒让德很热心，预言这位年轻作者将作出伟大的工作。但是马吕比较冷淡。

278 艾蒂安-路易·马吕不是专业数学家，而是拿破仑在德国和埃及战役中的前任工兵军官，他通过折射偶然发现了光的偏振，因而成了著名人物。所以，也许他的反对意见使年轻的柯西觉得，那是只有顽固的物理学家才作得出的那种吹毛求疵的批评。柯西

在证明他的一些最重要的定理时，用了凡是几何学初学者都熟悉的"间接方法"。而马吕反对的正是这种证明方法。

在用间接方法证明一个命题时，是从假定命题不成立推出一个矛盾；因此根据亚里士多德的逻辑，就得知命题成立。柯西无法用直接方法达到目的，马吕让步了——但仍然不能使他信服柯西证明了甚么。当我们讲到整个故事的结论(在最后一章)时，我们会看到，在其他方面，直观主义者也提出了同样的反对意见。如果说马吕没有能在1812年使柯西了解这个要点，布劳威尔在1912年及那以后为马吕报复了，布劳威尔成功地使柯西在数学分析方面的一些后继者们，至少看出了确实是有一个需要了解的要点。正如马吕试图告诉柯西的，亚里士多德的逻辑在数学推理中并不总是一个可靠的方法。

我们顺便提一下置换理论。这是由柯西系统地开始，又由他在十九世纪四十年代在一系列文章中详尽阐述的理论，后来发展成有限群论。下面我们就用一个简单的例子来说明它的基本概念。不过先要非正式地说说运算群的主要性质。

运算用大写字母A、B、C、D，……表示，两个运算连续进行，比如说A先B后，就用并列表示，即AB。注意，按照刚刚说过的，BA意味着先完成B，后完成A；所以AB和BA无需是同样的运算。例如，如果A是运算"给定的数加10"，B是运算"给定的数除10"，那么AB应用到x产生$\frac{x+10}{10}$，而BA产生$\frac{x}{10}+10$，或$\frac{x+100}{10}$，得到的分数是不等的；因此AB和BA不同。

如果两个运算X和Y的效果是一样的，就说X和Y相等(或等同)，用$X=Y$表示。

下一个基本概念是结合性。如果对一个集合中的每三个运

算，比如说 U, V, W，是任意三个运算，$(UV)W=U(VW)$，就说这个集合满足结合律。$(UV)W$ 意味着先完成 UV，然后按得到的结果完成 W；$U(VW)$ 意味着先完成 U，然后按得出的结果完成 VW。

最后一个基本概念是恒等运算，或者恒等式：不管实施到什么上都不产生改变的运算 I，称为恒等式。

有了这些概念，我们就能说明定义一个运算群的简单公设。

如果一个运算的集合 I, A, B, C, ……, X, Y……满足公设(1)—(4)，就说它形成一个群。

(1) 有一个可以应用到集合中的任何一对运算① X、Y 的组合规则，使得结果用 XY 表示，根据组合规则，按这种次序把 XY 结合起来是集合中唯一决定的运算。

(2) 对于集合中的任意三个运算 X, Y, Z, (1) 中的规则是可结合的，即 $(XY)Z=X(YZ)$。

(3) 集合中有一个唯一的恒等式 I，使得对集合中的每一个运算 X, $IX=XI=X$。

(4) 如果 X 是集合中的任一运算，集合中有唯一的一个运算，比如说 X'，使得 $XX'=I$ (能够很容易地证明 $X'X=I$ 也成立)。

这些公设中包含着可以从(1)—(4)中的其它说明推断出来的多余的东西，但是在给出的形式下，这些公设更容易掌握。为了说明一个群，我们采用一个与字母排列(安排)有关的非常简单的例子。这个例子看上去可能没有什么意思，但是人们发现这样的排列或置换群，是方程的代数可解性的长期寻找的线索。

a, b, c 三个字母可以准确地用六种次序写出来，即 abc, acb,

① 一对中的运算可以是相同的，比如 X, X。

bca, *bac*, *cab*, *cba*。取其中的任何一个，比如说第一个 *abc*，作为初始次序。通过什么样的字母置换，我们能从这个次序过渡到其余五种排列呢？从 *abc* 到 *acb*，只要置换 *b* 和 *c* 就够了。表明交换 *b* 和 *c* 的运算，我们写为(*bc*)，读作"*b* 到 *c*, *c* 到 *b*"。我们通过 *a* 到 *b*, *b* 到 *c*, 和 *c* 到 *b*，从 *abc* 过渡到 *bca*，这记为(*abc*)。*abc* 本身的次序是从 *abc* 不经过任何改变得到的，即 *a* 到 *a*, *b* 到 *b*, *c* 到 *c*，它是恒等置换，记为 I。对六个次序 280

$$abc,\ acb,\ bca,\ bac,\ cab,\ cba$$

同样地继续进行下去，我们得到了相应的置换，

$$I,\ (bc),\ (abc),\ (ab),\ (acb),\ (ac)。$$

公设中的"组合的规则"在这里是如下的。任取两个置换，比如说(*bc*)和(*acb*)，考虑这些按所说的顺序依次应用的结果，即先(*bc*)后(*acb*)：(*bc*)把 *b* 变到 *c*，然后(*acb*)把 *c* 变到 *b*。这样 *b* 仍在原来的位置。取(*bc*)中的第二个字母 *c*：由(*bc*)，*c* 被变到 *b*，由(*acb*)，*b* 被变到 *a*；这样 *c* 被变到 *a*。继续下去，我们看到 *a* 现在变成：(*bc*)使 *a* 仍在原处，但是(*acb*)把 *a* 变成 *c*。那么最后(*bc*)跟着是(*acb*)的结果，就是(*ca*)，我们用 $(bc)(acb)=(ca)=(ac)$ 表示。

用同样的方法很容易证明

$$(acb)(abc)=(abc)(acb)=I;$$

$$(abc)(ac)=(ab);\ (bc)(ac)=(acb),$$

等等，直到所有可能的一对一对的为止。这样，公设(1)对所有这六个置换是满足的，可以验证(2)、(3)、(4)也满足。

所有这些都汇总在群的"乘法表"中，我们要写出这个表来，其中用下面的字母表示置换（以节省篇幅），

$$\begin{array}{cccccc} I, & (bc), & (abc), & (ab), & (acb), & (ac) \\ I, & A, & B, & C, & D, & E。\end{array}$$

	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	I	C	B	E	D
B	B	E	D	A	I	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	C	I	E	B	A
E	E	B	A	D	C	I

在读这张表时,从左边的列任取一个字母,比如说 C, 从顶上面的行任取一个字母,比如说 D,那么对应的行和列的交点处的表值,这里是 A,就是 CD 的结果。这样,$CD=A$, $DC=E$, $EA=B$, 等等。

举一个例子,我们可以就 $(AB)C$ 和 $A(BC)$ 证明结合律,它们应当相等。首先,$AB=C$,因此 $(AB)C=CC=I$。再有 $BC=A$; 因此 $A(BC)=AA=I$。同样的方法可以证明 $A(DB)=AI=A$; $(AD)B=EB=A$; 这样 $(AD)B=A(DB)$。

一个群中互异运算的总数叫做它的阶。这里群的阶是 6。通过检查这张表,我们可以挑出几个子群,例如,它们各自的阶是 1, 2, 3。这解释了柯西证明的一个基本定理:任何子群的阶都是群的阶的因子。

	I
I	I

	I	A
I	I	A
A	A	I

	I	B	D
I	I	B	D
B	B	D	I
D	D	I	B

读者会发现，试着构造阶不是6的群是很有趣的。对于任意给定的阶，互不相同的群(有不同的乘法表)的数目是有限的，对于任意给定的阶(一般的阶 n)，这个数可能是什么还不知道——在我们这一生中也不大可能知道。所以在一个表面上象多米诺理论那么简单的理论的一开始，我们就碰上了未解决的问题。

我们已经构造了群的"乘法表"，现在忘掉它是从置换中导出来的(如果那碰巧是做出表的方法的话)，而把这个表看做定义了一个抽象群；那就是说，不给 $I, A, B, \cdots\cdots$ 除组合规则如在 $CD=A, DC=E$ 等等中所隐含的意义以外的解释。这种抽象的观点是现在流行的观点。它不是柯西的，但是由柯西在1854年采用的。直到二十世纪的最初十年为止，也没有提出一组完全令人满意的群的公设。

当一个群中的运算被解释为置换，或刚体的旋转，或在群可以应用的任何其他数学领域中时，这种解释就被称作由乘法表定义的抽象群的一个实现。一个给定的抽象群可以有很多种不同的实现。这是群在现代数学中具有根本的重要性的原因之一；同一个群的一个抽象的、基本的结构(在乘法表中概括出来的)，是几个明显无关的理论的本质，由于对抽象群性质的深入研究，对这些理

论和它们的相互关系的认识，就由一次研究而不是几次研究得到了。

我们只举一个例子，让一个正二十面体(二十面的规则立体)绕着它的对称轴旋转，使得每一次旋转后，立体的体积与以前占有同样的空间，这样的旋转的全体的集合形成一个群，这个旋转群当抽象地表示出来时，与我们试图解五次一般方程时在根的置换下出现的群是同样的。而且同一个群也在椭圆函数的理论中出现(稍微预测一下)。这暗示着虽然不可能从代数上解一般五次方程，但是按照所提到的函数，方程可能是——实际上确实是——可解的。最后，所有这些都能通过描述已经提到过的二十面体，在几何上画出来。这个美妙的统一是费利克斯·克莱因(1849—1925)的工作，出现在他的关于二十面体的书中(1884年)。

283 柯西是置换群理论的一个伟大的先驱者。自从他那时以来，在这个课题上已经做出了大量的工作，这个理论本身已经大大发展了，其后是无限群——有能用1, 2, 3, ……数出来的无限多个运算的群，再进一步发展到连续运动群。在后面这一类群中，群中的运算通过无穷小(任意的)位移把一个体移到另一个位置——与上面描述过的二十面体群不同，那时旋转把整个体转动一个有限量。这只是无限群中的一类(这里的术语是不确切的，但是足以说明重要的一点——离散群和连续群之间的区别)。正如有限离散群的理论构成代数方程理论的结构一样，无限的连续群在微分方程——数学物理中极为重要的方程——理论中也有很大作用。所以柯西在摆弄群时，并不是在虚度时光。

为了结束对群的这段描述，我们可以指出柯西讨论的置换群是怎样进入原子结构的现代理论的。一个在其符号中恰好包含着两个字母的置换，比如说(xy)，称为一个对换。任何置换都是对

换的组合，这是容易证明的。例如：

$$(abcdef)=(ab)(ac)(ad)(ae)(af)。$$

由这个例子，以对换的形式写出任何置换的规则就是显然的了。

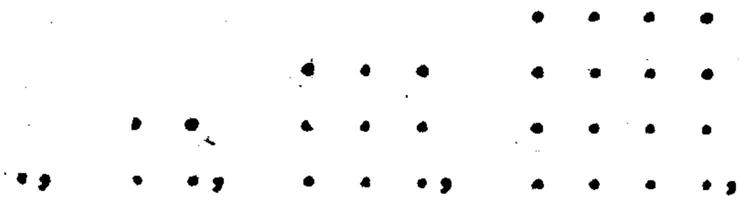
现在，假定一个原子中的电子都是相同的，也就是说，一个电子与另一个电子是无区别的；这是完全合理的假设。因此，如果交换一个原子中的两个电子，原子保持不变。为简单起见，设原子恰好包含三个电子，比如说 a, b, c，使原子保持不变——保持原样——的电子的所有交换，对应于在 a, b, c 上的置换群（我们给了乘法表的那一个群）。从这里到由原子构成的受激气体发出的光谱线，似乎还有很大一步距离，但是这一步已经迈出了，一组量子力学专家，在置换群理论中给光谱（以及与原子结构有关的其他现象）的阐明找到了令人满意的背景。柯西当然没有预见到他为了其本身的魅力发展起来的理论会有这样的应用，他也没有预见到 284 它会应用到代数方程的未解之谜上。那个功绩得留待一个十几岁的孩子去完成，我们将在后面谈到他。

柯西到二十七岁（1816 年）时已经使自已上升到当时的数学家的最前列。他唯一的重要竞争对手是沉默的高斯，比他年长十二岁。柯西 1814 年的关于复数极限的定积分的论文，开始了他作为单复变量函数理论的独立创造者和无与伦比的发展者的伟大业绩。关于专业术语，我们得参考高斯那一章——高斯在 1811 年已经得出了基本定理，比柯西早三年。柯西关于这个题目的过分详尽的论文直到 1827 年才出版。推迟出版的原因可能是由于文章太长——大约一百八十页。柯西从来没有考虑过，这些投到科学院或综合工科学校的长达八十页至三百页的一块文章，是要从它们有限的经费中出资印刷的。

第二年(1815年)，柯西由于证明了费马留给困惑的后代的一个伟大定理而引起了轰动，这个定理是：每一个正整数都是三个“三角形数”、四个“四边形数”，五个“五边形数”，六个“六边形数”等等的和。在每一种情形，零都算在所说的那一类数中。一个“三角形数”是数字0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, …… 中的一个，这些数是由用点子建立的正(等边)三角形组成的：


等等；

“正方形数”是同样产生的，


等等

其中，借以从一个正方形得到后一个正方形的“边界”是明显的。同样，“五边形数”是由点建立的正五边形；“六边形数”及其它的数类似。这是不容易证明的。事实上，欧拉、拉格朗日，和勒让德都无法证明它。高斯早就证出了“三角形数”。

285 柯西似乎要表明他没有局限于纯数学的第一流工作，他接着赢得了科学院1816年提供的大奖，题目是“不定深度的湍流表面的波的传播理论”——就数学处理而言，海浪与这种类型很相近。这篇论文最后(在印出时)长达三百多页。柯西二十七岁时发现自己被强有力地“推向”科学院院士的席位——一个对于如此年轻的人最不寻常的荣誉。他得到私下保证，数学部一有空缺就让他递补。就名声来说，这是柯西一生的顶点。

这时，1816年，柯西当选入科学院的时机已经成熟。但是没有空缺。不过有两个席位有指望很快就空出来，因为持有这两个席位的人年事已高：蒙日七十岁，L. M. N. 卡尔诺六十三岁。我们已经谈到过蒙日了，卡尔诺是彭赛列的前任。卡尔诺在科学院拥有席位是因为他恢复和发展了帕斯卡和德扎尔格的综合几何的研究，以及他要把微积分学放在一个坚固的逻辑基础上的勇敢尝试。在数学之外，卡尔诺在法国历史上为自己赢得了一个值得羡慕的名声，他是在1793年组织起十四支军队，打败了欧洲联合起来的反民主的反动分子们扑向法国的五十万大军的天才。当拿破仑在1796年为他自己攫取了权力时，卡尔诺反对这个暴君，说"我是所有国王的势不两立的敌人"，他因此遭到放逐。在1812年俄国战役之后，卡尔诺表示要作为一个军人去服役，但是有一个条件。他愿为法国而战，不愿为拿破仑的法兰西帝国而战。

在拿破仑从厄尔巴岛逃出来，经过光荣的"百日政变"之后的政治动乱中，科学院重新组建，卡尔诺和蒙日都被开除了。卡尔诺的继任者就任时没有什么好说的，但是当年轻的柯西若无其事地坐上蒙日的位子时，风暴发生了。驱逐蒙日是十足的政治上的卑鄙行为，任何因此得到好处的人至少显示他缺乏良好的感情。柯西当然有权利而且问心无愧。

据那些吃过烧得很好的河马肉的人说，河马的心很嫩，所以厚脸皮不一定是说明一个人的内心的可靠依据。柯西崇拜波旁王室，相信波旁王室是上帝派来统治法国的直接代表——甚至当上帝派来一个象查理十世那样的不称职的小丑时，他也这样认为——，所以当柯西溜上蒙日的位子时，他只不过是在向上帝和法国尽忠。他是真诚的，不是仅仅为了追求私利，这一点在他后来对于被奉若神明的查理的忠诚中就可看出。

286

现在，这位法国最伟大的数学家——仍然不到三十岁——又多又快地得到荣誉和职位。自从1815年(他二十六岁)起，柯西一直在巴黎综合工科学校讲授分析学。现在他成了教授，不久又被法兰西学院和巴黎文理学院任命为教授。一切好事都开始落到他身上了。他的数学活动是令人难以置信的；有时候在一星期中，科学院会收到他两篇很长的文章。除了他自己的研究工作以外，他还起草了难以数计的关于其他人投给科学院的论文的报告，并挤出时间来写了关于数学(纯数学和应用数学的)所有分支的几乎是川流不息的短文章。对于欧洲数学家，他变得比高斯还要著名。学者们和学生们都来听他关于他正在发展起来的新理论，特别是在分析学和数学物理中的新理论的美妙而清晰的讲解。他的听众中有来自柏林、马德里和圣·彼得堡的著名数学家。

在所有这些工作之余，柯西挤出时间求爱。他的意中人阿洛伊斯-德-比雷是一个有教养的老式家庭的女儿，和他一样，是一个热心的天主教徒。柯西在1818年同她结婚，共同生活了将近四十年。他们有两个女儿，她们都象柯西那样被培养成人。

这个时期有一项伟大的工作值得注意。在拉格朗日和其他一些人的鼓励下，柯西在1821年详细写出了他在综合工科学校讲过的分析学的讲义教程以供发表。这部著作提出了长期的严格性的标准，甚至在今天，这本教程中柯西给极限和连续下的定义，以及他写的关于无穷级数收敛性的许多内容，仍然可以在任何一本精心写成的微积分学中找到。从前言中摘出的一段，可以说明他所想到的和他所完成的：

287 “我竭力赋与这些〔分析的〕方法以几何中所要求的全部严格性，作到决不涉及从代数的一般原则中抽出来的推理。[就象今天

所说的，代数的形式主义。]这一类推理，虽然广为承认，但主要是在从收敛级数到发散级数，从实量到虚量的过程中，在我看来，不能认为它是什么超出归纳法的东西；它有时暗示着真理，但是它与数学引以自豪的严格性没有什么一致的地方。我们也必须注意到，它们倾向于造成一种据认为是代数公式所有的、模糊的有效性①。而实际上，这些公式大多数只在某些条件下对它们包含的量的某些值有效。通过决定这些条件和值，通过精确地确定我所用的记号的意义，我将消除一切不确定性。”

柯西的创作能力是如此之大，以至他不得不创办一个他自己的杂志《数学练习》(1826—1830年)，第二辑继续以《分析数学和物理练习》为名，发表他在纯数学和应用数学方面的评论性的和独创性的著作。这些著作销路很好，被人们仔细阅读，对改革1800年以前的数学情趣起了很大的作用。

柯西惊人的活动力的一个方面是很有趣的。1835年科学院开始出版它的周刊(comptes rendus)。这对柯西是一个未开垦的倾销园地，他开始以短论和长篇专题报告塞满这个新的出版物——有时候一星期不止一篇。科学院对迅速山积的付印单感到震惊，于是通过了一项规定(今天已经无效)，禁止刊登超过十页的长文章。这束缚了柯西的华丽的文体，他那些较长的论文，一篇长达三百页的关于数论的伟大论文，是在其它地方发表的。

柯西的婚姻很幸福，研究工作象多产的大马哈鱼那样硕果累累，就在他成为弄臣的时机成熟时，1830年的革命把他心爱的查理赶下了台。命运之神从来没有笑得这么开心过，他示意柯西从

① 例如，如果x是大于或等于1的正整数，那么由$1-x$除1得到的$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$直至无限是毫无意义的。

科学院里蒙日的位子上站起来，跟他的救世主去流放。柯西不能够拒绝，他曾经庄严宣誓效忠查理，而对于柯西，发了誓就得遵守誓言，即便是对一头蠢驴发誓也得遵守。值得称赞的是，柯西在四十岁的时候，放弃了他所有的职务，自愿去流放。

离乡背井，他并不感到遗憾。巴黎血污的街道使他恶心。他坚决认为这血淋淋的混乱局面决不应由好心的国王查理负责。

柯西把他的家人留在巴黎，但并未辞去他在科学院的职位，他先去瑞士，在那里，在科学会议和研究工作中寻求慰藉。他从不向查理请求哪怕是最小的恩惠，甚至不晓得被放逐的国王是否知道他是为了一个原则问题而自愿作出牺牲的。不久，一个比较开明的查理、撒丁国王查理·阿尔贝特，听说了有名的柯西没有工作，就为他安排了一个工作，在都灵任数学物理教授。柯西非常高兴。他很快学会了意大利文，并且用这种语言讲课。

不久，他因为工作过度和过于兴奋而病倒，他感到非常遗憾(正如他写给妻子的信中所说)，他不得不在一段时间里放弃晚上的工作。在意大利度假，附带去拜访教皇，使他得以完全康复，他回到都灵，急切地盼着长期献身于教学和科研。但是不久，愚钝的查理十世象一只没有头脑的山羊似地，闯入了这位退隐中的数学家的生活，为了奖励他忠实的追随者，而给他带来了极大的危害。1833年，柯西受托负责查理的继承人、十三岁的波尔多公爵的教育。男保姆和初级教师的工作，是柯西最不愿意做的。然而他毕恭毕敬地去布拉格向查理报到，背负起效忠的十字架。第二年，他的家人和他会合在一起了。

事实证明，对波旁王室的继承人的教育，决不是挂名的事。除了吃饭的时间以外，从清晨直到晚上，柯西都为这个王家的小家伙所烦扰。不仅普通学校的初级课程，必须想方设法硬灌给这个娇

生惯养的孩子，柯西还被派去照看他在公园里玩耍时不至于跌倒而碰破了膝盖皮。不用说，柯西对他的教育的主要部分，是进行他自己醉心的特殊牌子的道德哲学方面的亲切谈话；所以或许法兰西最后决定不把波旁王室请回来还是有理由的，就让他们和他们的数不清的后裔留在国际婚姻介绍所，作为百万富翁的女儿们抽彩的奖品。

289

尽管几乎不断地照料着他的学生，柯西还是设法在进行他的数学研究，不时地冲进他的私人住处，匆匆忙忙地写下一个公式，或者很瞭草地胡乱涂上一段。这个时期的最感人的工作，是关于光的色散的长篇论文。柯西试图在这篇论文中，根据光是一个弹性固体的颤动所产生的这一假设，阐明色散现象(由于构成白色的有色光的各种不同的可折射性，而将白色的光分成色光)。这项工作在物理学的历史上是饶有趣味的，因为它举例说明了十九世纪试图以机械模型来说明物理现象，而不仅是创立一种抽象的数学理论来把各种观察联系起来的倾向。这种倾向背离了牛顿及其后继者流行的做法——虽然有过从机械上“解释”万有引力的尝试。

今天这个倾向是在纯粹数学的相互关系和完全抛弃了以太、弹性固体或其它机械的“解释”的相反方面，这些解释比所说明的事物更难领会。现在的物理学家们似乎注意到了拜伦的质问，“那么谁来说明这个解释？”弹性固体理论有着漫长而光辉的成功，甚至今天，柯西从他谬误的假设中导出的一些公式还在被应用，但是当精确的实验技术和无可怀疑的现象(这里是不规则的色散)与这个理论的预告不相符合时(这种情况时有发生)，理论本身就被抛弃了。

1838年柯西摆脱了他的学生(他当时将近五十岁)。在巴黎的朋友们早就在催促他回去，柯西利用他的父母金婚纪念作为借口，

辞别了查理和他的全体随从，由于特许研究院（科学院过去和现在都是它的一部分）成员不需宣誓效忠政府，因而柯西恢复了他的席位。现在他的数学活动比以往更加广泛。在他一生中的最后十几年期间，他对数学的所有分支，包括机械、物理和天文，写出了五百多篇论文。这些著作中许多是长篇专著。

他的麻烦还没有过去。当法兰西学院出现空缺时，柯西被一致同意担任这个职位，但是这里不实行豁免，柯西必须先宣誓效忠才能就职。他认为政府篡夺了他的主子的神圣权利，挺着脖子固执地拒绝宣誓。于是他再度失去了工作。但是计量局能够任用具有他这样的才能的数学家。他再次一致通过当选。

这时开始了一场有趣的拔河赛，绳子的一端是男爵柯西和计量局，另一端是不正当的政府。一旦认识到这是在愚弄自己，政府就松手了，柯西则不经宣誓就一下弹回到计量局里。违抗政府完全是非法的，更不用说叛逆了，但是柯西坚守他的位置。他在计量局里的同事们则有礼貌地无视政府关于合法地选举某人的要求来使政府为难。柯西顽固地与政府作对达四年之久，同时继续进行他的工作。

柯西对数学天文学的最重要的贡献，部分即属于这一时期。勒维耶以他1840年关于小行星雅典娜的论文，无意间把柯西发动了起来。这是一部篇幅很长的著作，充满了无数的计算，任何一个审议人首先要花很长时间去核对这些计算，和作者用来完成演算的时间相等。当论文呈交给科学院时，官员们开始物色一个愿意承担核实计算是否正确这项非人的工作的人选。柯西自告奋勇。他没有步勒维耶的后尘，而是很快就找到捷径，并且发明了新的方法，使他得以在相当短的时间内核实并扩展这项工作。

1843年柯西五十四岁时，同政府的争执达到了紧急关头。大

臣不愿再被当作公开的笑柄，要求计量局举行选举，以补上柯西拒绝腾出的位置。柯西在朋友们的建议下，写了一封公开信，把他的情形诉诸公众。这封信是柯西一生中写得最精采的东西。

柯西为之进行唐吉诃德式的支持的事业，除了声名狼藉的反动分子以外，大家都知道已经永远失败，但是不管我们对他的这种行为会有甚么想法，我们不得不敬佩柯西既庄严又冷静地陈述他自己的情形，和为自己的信仰自由而战斗时的大无畏精神。那是在当时人们尚不熟悉而现在已十分普通的伪装下，为自由思想进行的战斗。 291

在伽利略的时代，柯西要维护他的信仰自由无疑会受火刑，在路易-菲利普统治下，他拒绝承认任何政府有权强迫他作违背良心的效忠宣誓，他为他的勇气吃了苦头。他的立场，使他甚至博得他的敌人的尊敬，使政府甚至在它的支持者眼里也遭到蔑视。不久，发生了巷战、暴动、罢工、内战，和一道要政府滚开的无可辩驳的命令，使政府从它能够理解的这种方式中，清楚地认识到镇压的愚蠢。1848年路易·菲利普和他的全体同伙被驱逐。临时政府颁布的第一批法令之一就是废除效忠宣誓。政治家们以罕见的机智认识到，这样的宣誓既不必要也无价值。

1852年，拿破仑三世掌权时恢复了效忠宣誓。但是这时柯西已打了胜仗。他被私下告知，他可以继续进行他的演讲而勿需宣誓。双方都心照不宣，不需要大惊小怪。政府不因为它的宽宏大量而要求感谢，柯西也丝毫没有变得温顺些，而是继续他的讲课，好象甚么事也没有发生。从这时直到他的生命结束，他一直是巴黎大学的主要光荣。

在官方的不稳定性和非官方的稳定性之间的空歇期间，柯西抽出时间去为耶稣会会士辩护，纠纷还是原来的——政府教育当

局坚持认为耶稣会的培养方法造成效忠的分裂，而耶稣会会士则辩护说宗教教育是一切教育的唯一合理的基础。这场斗争很合柯西的胃口，于是他兴致勃勃地参加了进去。他为他的朋友们所作的辩护是动人的，真诚的，但缺乏说服力。不论甚么时候，柯西一离开数学，就以感情代替了理智。

克里米亚战争给柯西提供了使他的固执的同事们讨厌他的最后机会。他成了以东方学派的工作闻名的一项非凡的事业的热心宣传家。"工作"在这里是指一种特殊的"善行。"

按照1855年这项工作的发起人的说法，"需要纠正过去的混乱，同时对莫斯科人的野心和穆斯林的狂热进行双重检查：首先是为那些被古兰经变得野蛮了的人民的新生作准备……"一句话，克里米亚战争是为基督教开辟道路的惯用的刺刀。柯西深深感到必须用一种更人道的东西来代替使人变得野蛮的古兰经，他投身于这项计划之中："去完成并巩固由法国武力如此令人赞美地开始的解放工作。"

耶稣会会议感激柯西给予的老练的帮助，在许多琐事（包括征集捐款）上给予他充分的信任，这些工作将完成"受古兰经法典奴役的各族人民在道德上的新生，福音书在耶稣基督的摇篮和墓地周围的胜利，"这是信奉基督教的法国人、英国人、俄国人、撒丁尼亚人和穆斯林土耳其人在克里米亚战争中所流的"滔滔鲜血的唯一可以接受的补偿。"

正是这种性质的善行，使柯西的一些朋友们出于对当时正教的虔诚精神的同情，称他为自命不凡的伪君子。这个称号完全是不应当的。柯西是有史以来最真诚的信仰虔诚的人当中的一个。

这项工作的最后结果是1860年5月发生的特别令人震惊的大屠杀。柯西没有在有生之年看见他的劳动圆满完成。

大数学家的声誉和其他大人物一样，受到同样的盛衰荣辱的支配。因为柯西在他去世很久以后——甚至今天——都由于生产过多和写作过快而受到严厉的批评。他的全部出品共有七百八十九篇论文(其中许多是广泛而详尽的著作)，共十四开本二十四卷。如果一个人除了一些质量不高的作品以外，写出了大量第一流的著作，这类批评看来当然是不恰当的，而且通常是那些自己写得比较少，而这少量作品也没有什么创新的人提出的。柯西对现代数学所起的作用，是在离舞台中心不远的地方。这点现在已经几乎得到普遍承认，虽然在某些方面还有点勉强。自从他去世以来，特别是近几十年来，柯西作为一个数学家的声誉已经稳定地上升。他所引进的方法，他的开创现代严格性第一时期的整个计划，还有他那几乎无与伦比的创造力，都在数学上留下了印记。而这种印记，就我们现在所能看见的，是注定要在今后许多年都看得见的。

293

在柯西所作的大量新东西中，可以提出一个显然并不重要的细节，以说明他的远见卓识。柯西不用"想象的"$i(=\sqrt{-1})$，而提出用模 i^2+1 的同余，来完成数学中的所有复数的运算。这是在1847年作出的。这篇论文——一篇短文——没有引起甚么注意。然而它却是某种将对数学的一些基本概念引起变革的东西——克罗内克的计划——的萌芽。这个问题在后面几章中还要多次出现，所以我们在这里只需提一下就行了。

在社交接触方面，柯西虽不能说圆滑，也是极其殷勤有礼貌的，比如当他为了他的一次竞争征求赞助时就是这样。他的习惯是温和有节制，除了数学和宗教以外，他对一切事情都是有节制的。在宗教上，他缺乏普通常识。他想让任何接近他的人都改变信仰。当威廉·汤姆森(开尔文勋爵)还是一个二十一岁的年轻人，去拜访柯西，和他讨论数学时，柯西抓住这个时机，想让他的来访

者——当时是一个坚定的苏格兰自由教会信徒——皈依天主教。

柯西也为优先权的问题争吵，为此他的敌人指责他贪婪和不够光明磊落。他的最后一年就被一次这样的争吵弄糟了，在这件事情上，他看来是无话可辩的。但是一旦涉及到原则问题，他就以他一贯的固执，敢于顶住别人的叫喊，极其顽固地坚持自己的观点。

还有一个特点，使柯西在科学界同事中更加不得人心。在科学院和科学团体中，人们应该仅仅根据候选人科学上的功绩来投票，任何其他做法都被认为是不道德的。不管正确与否，柯西被指责为根据他的宗教观和政治观来投票选举。他一生的最后几年中，由于他认为在这件事和类似的弱点方面得不到同事们的谅解而感到痛苦。哪一方面都不能接受对方的观点。

1857 年 5 月 23 日，柯西六十八岁时出乎意料地去世了。他去乡间休养，原指望对他的支气管病会有好处，不料却发烧了，事实证明这是致命的。他去世前几小时，还在热心地和巴黎大主教就他所考虑到的慈善工作进行热烈的谈话——慈善事业是柯西毕生关心的事业之一。他最后的话是对大主教说的："人们去了，但是他们的功绩留下了。"



罗巴切夫斯基

第十六章　几何学中的哥白尼

罗巴切夫斯基

罗巴切夫斯基的理论是他的同代人无法理解的，因为它看来与一种仅仅被几千年来视若神明的偏见认为必要的公理相矛盾。 294

——罗巴切夫斯基著作的编辑者

假定人们通常所接受的对哥白尼所作之事的重要性的评价是正确的，我们就不得不承认，称另一个人为什么的“哥白尼”，要末是人力所能作出的最高的称赞，要末是最严厉的指责。当我们知

道了罗巴切夫斯基在非欧几何的创造中所作的一切，考虑到它对全部人类思想的重要性，而数学在其中即使重要也只是一小部分，我们也许就会同意，克利福德（1845—1879）在称罗巴切夫斯基为"几何学中的哥白尼"时，并没有过分地称赞他的英雄。克利福德本人就是一个伟大的几何学家，远不只是一个"数学家"。

尼古拉斯·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基是一个小官吏的第二个儿子，1793年11月2日出生在俄国的诺夫哥罗德行政管理区的马卡里耶夫地区。尼古拉斯的父亲在他七岁时就去世了，留下了他的寡妻普拉斯科维亚·伊万诺夫娜照料三个幼小的孩子。由于父亲活着的时候，他的工资就只能勉强维持一家人的生活，这位寡妻发现她处在极度贫穷之中。于是她搬到了喀山，尽她所能地为孩子们作好入学前的准备，并且满意地看到他们一个接着一个得到中学的奖学金，免费上了学。尼古拉斯在1802年，八岁时入学。他在数学和古典文学两方面的进步是非常迅速的。十四岁时，他就为上大学作好了准备。1807年他进了喀山大学（创办于1805年）。此后，他作为学生、副教授、教授，最后作为校长，在该校度过了他一生中的四十年时间。

295 学校当局希望使喀山大学最终能够与欧洲任何大学相匹敌，他们从德国请来了几位杰出的教授，其中有天文学家利特罗，他后来成为维也纳天文台的台长，阿贝耳说他能看到"南方"的一些东西，利特罗是一个原因。德国教授们很快看出了罗巴切夫斯基的天才，并且给了他充分的鼓励。

1811年，罗巴切夫斯基十八岁时，在与权威们（他的青春活力引起他们的怒火）短时间争执之后，获得了硕士学位。教师中他的德国朋友们支持他，他以优秀的成绩取得了学位。这时他的哥哥

阿列克西斯负责给下级官员们讲授初等数学课程，不久，当阿列克西斯请病假时，尼古拉斯代替他担任这一职位。两年后，罗巴切夫斯基二十一岁时，接受了一项任命，担任见习"特命教授"，按照美国的叫法，就是副教授。

1816 年，罗巴切夫斯基在二十三岁这个不寻常的青年时期，晋升到普通教授的位置。他担负的责任很重，除数学工作以外，他还负责天文学和物理课程。天文学是替一位请假的同事代课。他镇静自如地担起了繁重的任务，按照能者多劳的理论，他成了一名引人注目的担负更多工作的候选人。不久，罗巴切夫斯基发现他已成为大学图书馆的馆长和混乱不堪的大学博物馆的馆长。

学生们常常是一批难以驾驭的家伙，但是生活会使他们懂得，在谋生这件残酷无情的事情上，过分地意气用事是要吃亏的。从 1819 年至 1825 年沙皇亚历山大去世的这段时期，罗巴切夫斯基的数不清的职务当中，有一项是担任喀山所有学生的监督人，从小学生到在大学读研究生课程的成年人都包括在内。所谓监督，主要是监督他的学生们的政治思想。这种吃力不讨好的工作，其困难是可想而知的。罗巴切夫斯基日复一日、年复一年地设法把报告呈送给多疑的上司，从来没有因为在间谍活动中玩忽职守而受到申斥，也从来没有丧失全体学生对他的真诚的尊敬和爱戴。这 296 比一个爽快的政府大量给予他的、他在正式场合也乐意佩戴的那些华而不实的勋章奖牌，更能说明他的行政能力。

大学博物馆中的收藏品，显然是出其不意地硬塞进去的。同样的混乱状况，使得庞大的图书馆实际上无法使用。罗巴切夫斯基奉命去清理这些乱七八糟的东西。当局认识到他所作出的巨大贡献，把他提升为数学和物理系的系主任，但是没有拨出任何经费去雇用一名助手来清理图书馆和博物馆。罗巴切夫斯基亲自动手

做这项工作,编目录、掸灰尘、装箱,必要时还拖地板。

随着1825年亚历山大的逝世,事情有了好转。应对蓄意迫害喀山大学负责的个别官员;由于过于腐败、不宜担任公职而被撤职,他的继任者任命了一名专职的馆长,使罗巴切夫斯基摆脱了给图书分类编目、为矿物标本掸去灰尘、给剥制的鸟类标本清除害虫等没完没了的工作。新来的馆长需要为他在大学里的工作取得政治上和道义上的支持,为了他个人的利益而玩弄权术,在1827年使罗巴切夫斯基被任命为校长。现在这位数学家是大学的首脑了,但是这个新的职位并不是挂名的闲职。在他能干的指导下,对整个教师队伍进行了整顿,聘请了一些更好的人,在教学方面,不顾官方的阻碍,自由化了,图书馆的建立达到了更能满足科学需要的高标准,建立了一个机械车间,以便制造研究和教学所需要的科学仪器;建立并装备了天文台——这是精力充沛的校长心爱的工程——,代表全俄罗斯的丰富的矿物收藏品已整理就绪,而且不断地丰富。

甚至担任校长的显耀职位,也没有阻碍罗巴切夫斯基在他感到需要他的帮助时,去图书馆和博物馆从事体力劳动。大学是他的生命,他爱它。为了一点小事,他就会取下他的硬领、脱下外衣去干活。有一次,一位著名的外宾把这个没有穿外衣的校长当作看门人或工人了,要求带他参观图书馆和博物馆的收藏品。罗巴切夫斯基给他看了最宝贵的珍品,并作了讲解,因为是他陈列的。这个令人感激的俄国工人的卓越智慧和彬彬有礼,给客人留下了很深的印象。在分别的时候,客人给了他的向导一笔优厚的小费。罗巴切夫斯基一下子变得非常冷淡,愤怒地拒绝了给他的钱。来访者感到莫名其妙,以为只不过是这位品德高尚的俄国看门人的古怪行为,便鞠了躬把钱放进了口袋。当天晚上,他和罗巴切夫斯基

297

在省长的餐桌上会面了，于是一方道歉，另一方也接受了他的歉意。

罗巴切夫斯基坚信这样一个宗旨：为了使一件事做得令你自己满意，你必须要末亲自去做，要末对它的实施有足够的了解，能够对另一个人的工作提出明智的和建设性的批评意见。前面已经说过，大学是他的生命。当政府决定使学校的建筑现代化并增加新的建筑时，罗巴切夫斯基把这件事当作他自己的事情，要做到既把工作做好，又不浪费一分钱。为了使自己能担当这个任务，他学习了建筑学。他精通了这门学科，而且非常注重实际，因而这些建筑物不仅美观、实用，而且造价低于所拨给的经费，这在官方建筑史上可算是独一无二的。若干年后(1842年)，一场灾难性的大火毁了半个喀山，也毁了罗巴切夫斯基那些最优美的建筑，包括刚刚建成的天文台——他引以自豪的得意之作。不过由于他头脑冷静，仪器和图书馆得以保存下来。火灾之后，他立即着手重建。两年后，这场灾难已不留丝毫痕迹。

我们记得，1842年，发生火灾的这一年，也是罗巴切夫斯基由于高斯的斡旋，以他对非欧几何的创造，被选为格丁根皇家学院外国通信院士的一年。任何一个象罗巴切夫斯基这样担负着过分繁重的教学和行政工作的人，竟然能找出时间，做一件即便是普通的科学工作，看来也是难以令人置信的，尽管如此，罗巴切夫斯基却确实想办法利用这个机会，创造了全部数学中最伟大的杰作之一，也是人类思想的一个里程碑。这项工作他断断续续地干了二十年或者更长一些。他在这个题目上的第一次公开通信是在1826年，寄给喀山物理-数学协会的。对于他所得到的反响，他可以在撒哈拉沙漠当中去说。高斯直到1840年左右才听到这项工作。

罗巴切夫斯基繁忙的一生中，还有另一件事，表明他不仅只是

在数学上走在时代的前面。1830年的俄国或许并不比一个世纪以后更讲卫生，这种不讲究个人卫生的情况，在第一次世界大战中，使得德国士兵对他们不幸的俄国俘虏充满了一种惊人的厌恶，在今天使得产业无产阶级把莫斯科的公园和游乐场所当作随意大小便的厕所，可以设想，在罗巴切夫斯基的时代，当霍乱流行时，正是这种不注意个人卫生的情况，使得这种传染病得以在不幸的喀山居民中长时间肆虐。在1830年，人们对于引起疾病的细菌理论还一无所知，尽管进步人士早已怀疑到，不注意清洁的习惯跟瘟疫的灾难，比上帝的愤怒更有关系。

霍乱袭击喀山的时候，神父们能够为他们遭到灾难的人民做的，就是把他们赶进教堂，以便一起哀求祈祷；给垂死的人赦罪，并埋葬死者；但是从来没有想过铲子除了用来挖掘坟墓以外，还能有另外的用途。罗巴切夫斯基看出城里的情况已经没有希望，就劝说全体教职员把他们的家人带到学校里来，并说服——实际上是强迫——一些学生和他一起投入一场反对霍乱的合理的、人的斗争。把窗户关闭起来，强制实行严格的卫生规定，只有在最需要的情况下，才允许补充食物供应。这样谨慎地保护下的六百六十名男人、妇女和儿童中，只有十六人死亡，死亡率低于百分之二点五。与这个城市在传统的治疗方法下的损失相比，这个数字是微乎其微的。

原可以想象，在他对国家作了这一切出色的贡献，和他作为一个数学家得到欧洲的承认以后，罗巴切夫斯基一定会从他的政府那里得到极大的荣誉。但是梦想这一类的事情，不仅是极端天真的，而且也违反了圣经上的戒律“不可相信帝王。”作为对他作出的牺牲和他对俄国无限忠诚的报酬，1846年罗巴切夫斯基被粗暴地撤销了他的教授职务和大学校长的职务。对这种异乎寻常的双重

的侮辱.没有作出任何解释。罗巴切夫斯基这时五十四岁，身心健康尤如以往，比过去任何时候更渴望继续他的数学研究。他的同事们不顾自身安危，一致抗议这种暴行。但只得到草率的通知，说他们只不过是些教授，本质上不可能了解高度奥秘的管理学。

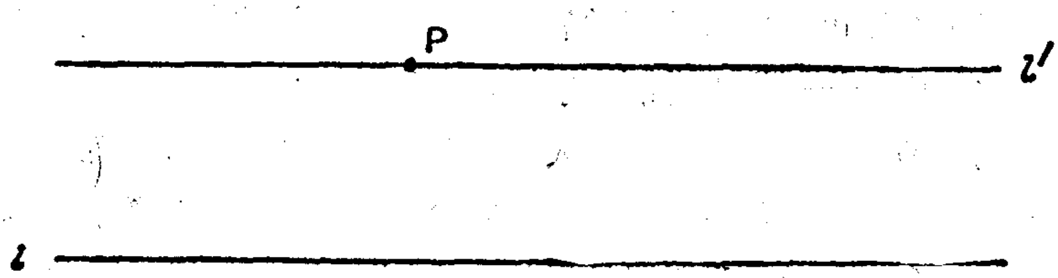
这种不加掩饰的侮辱使罗巴切夫斯基垮了下来。他仍然得到允许，可以保留他在大学里的书房。但是当他的继任者，政府挑选来惩戒心怀不满的全体教师的人于1847年到来，担负起他那不光彩的任务时，罗巴切夫斯基抛弃了再度成为大学的一员的全部希望；而这所大学在智能方面之享有盛名，几乎完全是由于他的努力。从此以后，他只是在考试时偶尔去帮帮忙。虽然他的视力在迅速减退，他仍然能从事紧张的数学思考。

他依旧热爱这所大学。当他的儿子死亡时，他的健康垮了，但是他慢慢地挨着时日，希望仍然能有些用处。1855年，大学庆祝它的五十周年纪念。为了表示敬意，罗巴切夫斯基前往参加典礼，并送了一部他的《泛几何学》，这是他科学生涯的全部著作。这部著作(用俄文和法文出版)不是罗巴切夫斯基亲手写的，而是由他口述的，因为这时他已失明。几个月以后，他于1856年2月24日逝世，享年六十二岁。

要了解罗巴切夫斯基所做的工作，我们必须首先看看欧几里得的突出成就。欧几里得的名字，直到相当近的时期仍然是初级中学几何的同义词。关于他本人，除了他的生卒年代公元前330—275年，我们所知甚少。他的《原理》除了系统记述了初等几何以外，还包含所有他那个时代已知的数论的结果。几何教育受欧几里得控制达两千二百多年之久。他在《原理》中的作用，似乎主要是协调并在逻辑上安排他的前辈和同代人所得出的分散的结果。

他的目的是要对初等几何作一番连贯的有条理的说明，使得这整本厚厚的书中的每一个陈述都能追溯到一些公设。欧几里得没有达到这个理想，甚至连远远地接近这个理想的地步也没有达到，尽管许多世纪以来人们一直认为他达到了。

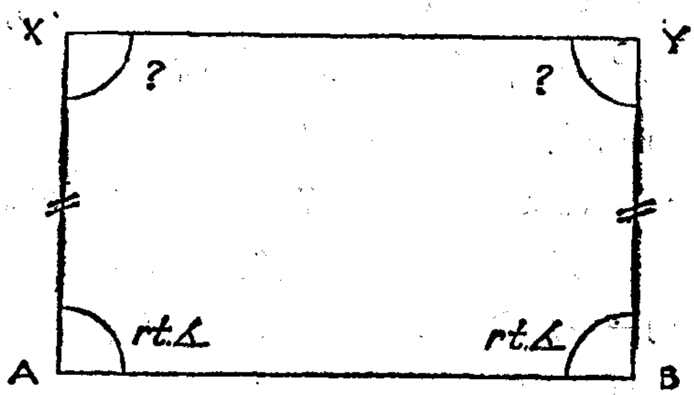
欧几里得的不朽的资格是建立在与一些有时仍然错误地归于他的、假定的逻辑完美完全不同的东西上的。这就是他承认，他的第五公设(他的第十一公理)是一个纯粹的假设。第五公设可以用许多等同的形式来陈述，每一种形式都能利用欧几里得几何的其余公设，由其他形式推断出来。也许这些等同的陈述中最简单的一个是这样的：已知任意的直线 l 和一个不在 l 上的点 P，那么在由 l 和 P 决定的平面上，可以画出恰好一条经过 P 点的直线 l'，使得不管 l' 和 l 延长到多远(在任一方向)，它们也不会相交。仅仅作为一个名称定义，我们说在一个平面上的两条永不相交的直线是平行的。这样，欧几里得的第五公设断言，过 P 点恰好有一条直线平行于 l。欧几里得对几何性质的透彻的洞察力使他相信，在他那个时代，这个公设没有从其他公设中推断出来，尽管有过很多证明这个公设的尝试。由于欧几里得本人不能从他的其他公设中推出这个公设，又希望在他的许多定理的证明中用它，于是他就老老实实地把它和他的其它公设放在一起了。



我们在讲述罗巴切夫斯基在几何发展中的哥白尼似的地位以前，先要解决一两个简单的问题。我们已经提到过平行公设的那

些"等同"的说法。其中的一个，称为"直角假设"，暗示着两种可能性，而这两种可能性都不与欧几里得的假设等同，一种引进了罗巴切夫斯基几何，另一种引进了黎曼几何。

考虑一个"看上去象"矩形的图形 $AXYB$，它包含四条直线 AX, XY, YB, BA，其中 BA(或 AB)是底，AX 和 YB(或 BY)画成等长且垂直于 AB，并在 AB 的同一边上。关于这个图形，要记住的要点是，角 XAB、角 YBA(在底边上)都是直角，边 AX、BY 长度相等。不用平行公设，能够证明角 AXY、角 BYX 相等，但是，不用这个公设，不可能证出角 AXY、角 BYX 是直角，虽然它们看上去象直角。如果我们接受平行公设，我们就能证明角 AXY、角 BYX 是直角，反过来，如果我们假定角 AXY、BYX 是直角，我们就能证明平行公设。因此，角 AXY、BYX 是直角这个假定，等同于平行公设。这个假定今天称为"直角假设"(由于两个角都是直角，用单数的角 angle 代替复数的角 angles)。　301



我们知道，直角假设导致无矛盾的、实用的几何，事实上，导致了经过革新以满足逻辑严格性的现代标准的欧几里得几何。但是这个图形提供了另外两种可能性：相等的角 AXY、BYX 都小于直角——锐角假设；相等的角 AXY、BYX 都大于直角——钝角假设。由于任何一个角都满足等于、小于或大于直角的要求中的

一个，且只满足一个，三个假设——分别为直角假设、锐角假设、钝角假设——穷尽了一切可能。

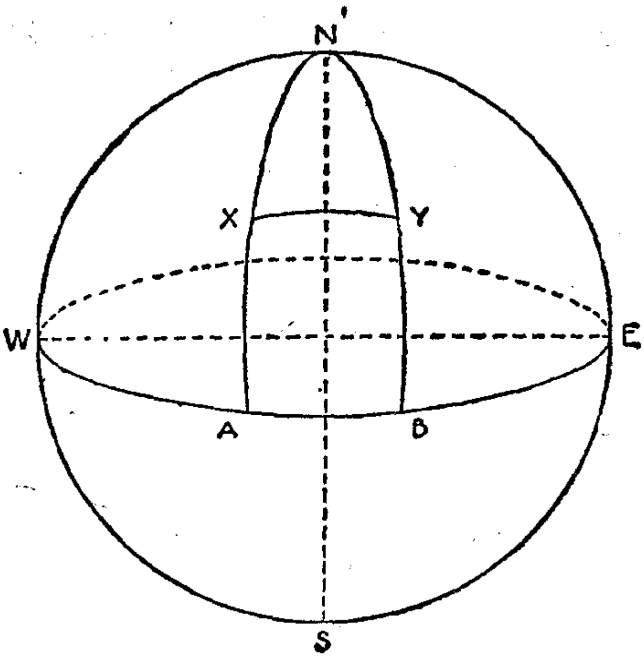
共同的经验使我们首先倾向于第一个假设。为了看出其他的假设可能并不象初看上去那样不合理，我们要考虑一些与欧几里得想象中的，把他的图形画成高度理想化的"平面"相比，更接近于人类实际经验的东西。但是我们首先注意到，锐角假设和钝角假设都不能使我们证明欧几里得的平行公设，因为正如上面说过的，欧几里得的公设与直角假设是等同的(在相互推断的意义上，直角假设对于平行公设的推断既是必要的又是充分的)。因此，即使我们成功地在两个新假设中的任一个假设上构造出了几何，我们也不会在这些几何中发现欧几里得意义上的平行。

302 为了使其他的假设不象它们初看上去那样不合理，假定地球是一个完美的球体(没有由于山峰造成的凹凸不平等等)。画一个穿过这个理想的地球中心的平面，它与地球表面交出一个大圈。假定我们希望在地球表面上从一个点 A 到另一个点 B，在从 A 到 B 的过程中总是在球面上，进一步假定我们希望走可能的最短路径。这是一个"大圈航行法"的问题。想象一个平面通过 A、B 和地球的中心(有一个，且仅有一个这样的平面)。这个平面与地球表面交出一个大圈。为了走最短路径，我们沿着联接 A、B 的大圈的两条弧中较短的一条从 A 到 B。如果 A、B 碰巧在一条直径的两个端点，我们可以沿着任一条弧走。

上述例子引进了一个重要的定义，即曲面上的测地线的定义，我们现在就来解释它。我们刚刚看到，联接地球上两点的最短距离，它本身是在球面上度量的距离，是联接它们的大圈的一段弧。我们也看到，联接两个点的最长距离是同一个大圈上的另一段弧，这要除去点是直径端点的情况，那时最短距离与最长距离相等。在

费马那一章中，“最大”和“最小”包含在同一个名词“极限值”或“极值”之中。我们现在回想在平面上联接两点的直线段的定义——“两点之间的最短距离”，把这个定义应用到球面上，我们说球面上的大圈相当于平面上的直线。由于希腊文的地球是测地线[geodesic]的第一个音节ge(γῆ)，我们称在任意的曲面上连接任意两点的一切极限为曲面的测地线。这样，在平面上，测地线是欧几里得的直线；在球面上，测地线是大圆。一条测地线可以看成是一根线在曲面上的两点之间尽可能绷紧时的位置。

现在，至少在航海中，如果涉及到均衡的适度的距离，就不能把海洋看成是一个平面(欧几里得平面)；得把它看作是它非常近似的东西，即一个球面的一部分曲面，大圈航行法的几何不是欧几里得几何。因此欧几里得几何不是人类实用的唯一的几何。在平面上，两条测地线恰好相交于一个点，除非它们是平行的，那时它们就不相交(在欧几里得几何中)；但是在球面上，任意两条测地线总是恰好相交于两个点。再有，在平面上，两条测地线不能圈出一块

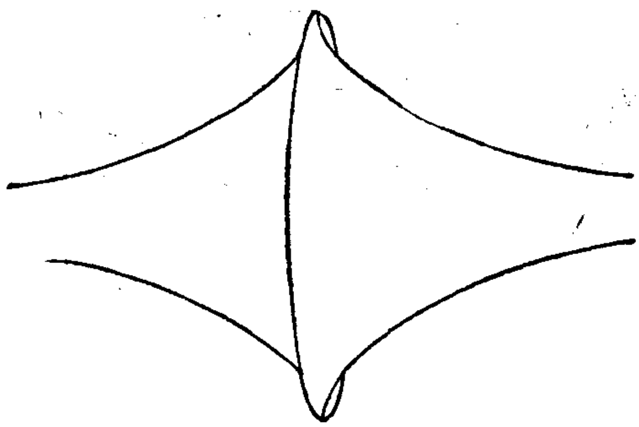


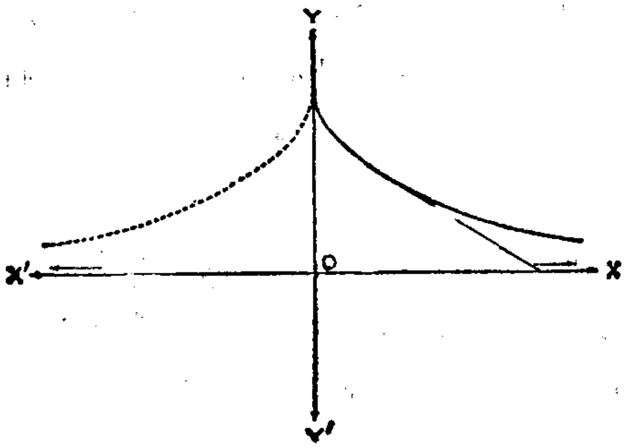
303 空间——就象欧几里得为他的几何的一个公设假定的那样；在球面上，任意两条测地线总是围成一个空间。

现在想象球面上的赤道和两条经过北极垂直于赤道的测地线。在北半球，这产生了一个曲边的三角形，有两条边是相等的。这个三角形的每一边是一段测地线的弧。任意画出与两条等长的边相交的另一条测地线，使得赤道和这条交线之间截下的边的两部分相等。现在我们在球面上有了相应于我们刚才在平面上有的四边形 $AXYB$。这个图形的底边的两个角，象以前一样，是直角，并且对应的两边相等。但是在 X、Y 处的相等的两个角现在都大于直角。所以，在大圈航行法的高度实用的几何中（它比初等几何所得到的理想化的图形更接近于真实的人类经验），真实的不是欧几里得的公设——或它的直角假设的等同形式——而是由钝角假设得到的几何。

以同样的方式，检查一个较不熟悉的曲面，我们能使锐角假设成为合理的。这个曲面看上去象两个在大的一端焊在一起的无限长的喇叭。为了更精确地描述它，我们必须介绍称为曳物线的平面曲线，它是这样生成的：在一个水平平面上画两条直线 XOX'，YOY'，在 O 点处相交成直角，就象在笛卡儿几何中那样。想象沿

304





着 YOY' 有一根不可拉长的纤维，在它的一端绑着一个很重的小球；纤维的另一端在 O 点。把这一端沿着 OX 线拉开。由于小球跟着运动，它就画出了曳物线的一半；另一半由沿着 OX' 拉纤维的一端画出来，当然只是前一半在 OY 上的反射或图象。假定在每一种情形拉开的过程都无限地进行下去——"直到无限"。现在想象曳物线绕直线 XOX' 旋转。双喇叭曲面就生成了；出于我们无需去探究的原因（它有常数负曲率），它被称为伪球面。如果我们在这个曲面上，象以前一样，用测地线画出两条边相等、有两个直角的四边图形，我们发现锐角的假设是成立的。　305

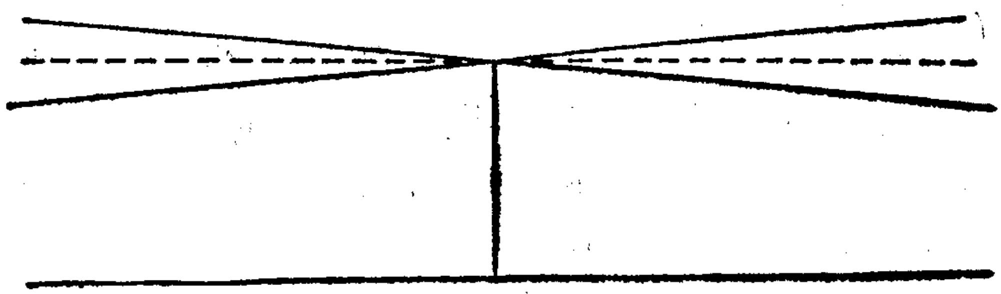
这样，直角、钝角和锐角的假设分别对欧几里得平面、球面和伪球面是成立的，而且在所有的情形"直线"都是测地线或极值。欧几里得几何是球面几何的有限或退化的情形，当球的半径成为无限时，就得到了欧几里得几何。

欧几里得没有构造一个适合象人类现在所知道的地球的几何，他明显地依据的是地球是扁平的假定。如果欧几里得没有依据这个假定，那就是他的前辈们依据了这个假定。到他掌握了"空间"，或几何理论的时候，他在他的公设中体现出来的毫不掩饰的

假定，已经呈现出古老的、不可改变的必然真理的样子，是高度的智慧作为所有物质事物的真正本质揭示给人类的。人们用了两千多年的时间，从几何学中移开这个永久的真理，罗巴切夫斯基做到了这件事。

用爱因斯坦的话说，罗巴切夫斯基是向一个公理挑战。任何人向一个两千多年以来为大多数神志清醒的人视为必要的和合理的"公认的真理"挑战，如果不是拿他的生命冒险，也是拿他的科学声誉冒险。爱因斯坦本人向两个事件能在同一时间、不同地点发生这一公理提出挑战，通过分析这个古老的假定，导致了狭义相对论的发明。罗巴切夫斯基向之挑战的公理是：欧几里得的平行公设，或与之等同的直角假设，对一个相容的几何是必要的。他用创造一个建立在锐角假设基础上的几何系统，来支持他的挑战，在这个几何系统中，通过一个定点与给定直线平行的直线不是一条，而是两条。罗巴切夫斯基的两条平行线都不和它们与之平行的直线相交，任何通过定点，落在两条平行线形成的角度之内的直线，也不与之相交。这个显然很奇怪的情形，是由伪球面上的测地线"实现"的。

306



对于任何日常的目的(测量距离等等)，欧几里得几何和罗巴切夫斯基几何之间的差异小得不值一提，但这不是要点之所在：两种几何都是自身相容的，都符合人类的经验。罗巴切夫斯基抛弃了欧

几里得几何的必然"真理"。他的几何只是由他的后继者们构造出来的几种几何中的第一个。这些欧几里得几何的替代几何中，有一些——例如广义相对论的黎曼几何——今天至少在物理科学的仍然活跃和发展着的部分中，是象欧几里得几何过去和现在在相对静止的和经典的部分中那样重要的。对于一些目的，欧几里得几何是最好的，至少是够用的，而对另外一些目的，它就不适用了，于是就需要非欧几何了。

两千二百多年以来，人们在某种意义上相信，欧几里得在他的几何体系中发现了人类知觉的一个绝对真理或必要的模式。罗巴切夫斯基的创造实际上证明了这种看法的错误。他的大胆挑战，以及挑战的结果，鼓舞着广大的数学家和科学家向其它的"公理"或公认的"真理"挑战，例如对因果律挑战，许多世纪以来，因果律对于有条理的思维，似乎就象欧几里得的公设在罗巴切夫斯基抛弃它之前那样必需。

也许我们还没有体会到罗巴切夫斯基向公理挑战的方法的全部影响。称罗巴切夫斯基为几何学中的哥白尼并不是夸大其词，因为几何只是他革新的更广阔的领域中的一部分，即使把他称作一切思想的哥白尼，可能也是公正的。



阿贝尔头像

第十七章　天才与贫困

阿　贝　耳

我已经完成了一座比青铜更耐久，比国王们建立的金字塔更高大的纪念碑，不断侵蚀的霪雨和不受管束的北风都不能把它损毁，岁月无尽的延续和年代的飞逝也不能使它倾颓。我将不会死亡；我的大部分会逃脱死神，我将永生，仍然活在后代的赞美声中。

——贺拉斯(《颂歌》，3，XXX)

1801年，一个天文学家应该能在夜空中观察到，一群出色的数学天才之星即将发出光彩，开创数学史上最伟大的世纪。在那一群光彩夺目的天才新星中，没有比尼尔斯·亨利克·阿贝耳更明亮的星星了。埃尔米特在谈到阿贝耳时说，“他给数学家们留下了够他们忙上五百年的东西。”

阿贝耳的父亲是挪威克里斯蒂安桑主教管区的小村庄芬德的牧师，1802年8月5日，他的第二个儿子尼尔斯·亨利克就出生在那里。在父系方面，几位祖先都是杰出的神职人员，并且包括阿贝耳的父亲在内，都是有文化的人。阿贝耳的母亲安妮·玛丽·西蒙森的引人注目之处，主要在她极为美貌，喜欢享乐，有点轻浮——对于一个牧师的配偶来说，这是一个相当有趣的结合。阿贝耳从她那里继承了惊人的漂亮容貌，和一种想从生活中得到比永久的艰苦工作更多东西的、很富于人性的愿望，一个他几乎不可能满足的愿望。

这位牧师一共有七个子女，那时挪威由于与英国和瑞典的战争的结果，再加上两次战争之间发生的一场饥荒而极为贫穷。然而这一家是幸福的。尽管穷得要命，有时饿着肚子，他们始终没有灰心丧气。有一幅关于阿贝耳的迷人的图景：在他的数学天才支配了他以后，他坐在火炉边，其余的人在房间里聊天，嬉笑，他一只眼睛盯着他的数学，一只眼睛盯着他的弟弟和妹妹，进行他的研究。吵闹声从来不会分散他的注意力，他一面写作一面参加开开玩笑。 308

阿贝耳和其他几个第一流的数学家一样，很早就发现了他的才能。一个粗暴的学校教师使阿贝耳遇上了好运。十九世纪头十年的教育是很严厉的，至少在挪威也是如此。体罚是使学生性格刚强和满足专横的教师们的虐待狂倾向的最简单的方法，对于每

一点小小的过失都普遍实行体罚。阿贝耳不是通过自己的皮肉被唤醒的，而据说牛顿是被一个玩伴重重的踢了一脚以后才清醒的，阿贝耳是被一个同学的死唤醒的。这个学生受到残酷的鞭打，因而致死。这件事甚至严厉的地方教育委员会也认为有点太过份了，他们把那个教师开除了。一个称职的，但决不是很有才气的数学家伯恩特·米夏埃尔·霍姆伯厄(1795—1850)填补了空缺，他后来在1839年编辑了阿贝耳著作集的第一版。

这时阿贝耳大约十五岁。在这以前，他除了有些幽默感以外，没有在任何事情上显示出明显的才能。在霍姆伯厄的亲切、开明的教导下，阿贝耳忽然发现了他是怎样一个人。十六岁时，他开始私下阅读，并很快就透彻地领会了他的前辈们，包括牛顿、欧拉和拉格朗日的伟大著作。从那以后，真正的数学就不仅是他的严肃工作，而且是使他入迷的爱好。若干年后，有人问起他是怎样设法这样迅速地赶到前面去的，他回答："靠学习大师们，而不是学习他们的学生"——一些通俗教科书的作者们最好在他们的前言中提到这个办法，作为对他们有害无益的平庸的教学法的解毒剂。

霍姆伯厄和阿贝耳很快成了密友。虽然这位教师本人不是有创造力的数学家，可是他知道并且能鉴别数学杰作，在他的热心指点下，阿贝耳很快掌握了经典著作中最难懂的部分，包括高斯的《算术研究》。

今天人们都知道，老一代大师们认为他们已经证明了的很多东西，实际上根本没有真正证明。特别是欧拉关于无穷级数和拉格朗日关于分析学的一些工作更是如此。阿贝耳敏锐的头脑，使他首先探知他的前辈们推理中的缺陷，他决心把他毕生事业的相当大一部分致力于弥补这些不足，使得推理无懈可击。他在这方面的杰作之一，是首次证明了一般的二项式定理，牛顿和欧拉对这个

309

定理的一些特例作过说明，但是要给这个定理的一般情形作出可靠的证明却不容易，所以，人们发现尚未证实的证明仍然出现在中学课本中，好象从未有过阿贝耳这个人似的，这种情形是并不令人感到吃惊的。不过，这个证明只是阿贝耳澄清无穷级数的理论和应用的更大计划中的一个细节。

阿贝耳的父亲在1820年，他四十八岁时就过早地去世了。那时阿贝耳十八岁，照顾母亲和六个弟妹的担子落在了他的肩上。他对自己很有信心，心甘情愿地负起了他这个突然而至的责任。阿贝耳是一个温和乐观的人。他不过是很公正地预见到自己会在大学里作一个受人尊重的、不错的数学教授。那时他就能为他们大家的生活提供适当的保障了。同时他也给私人授课，尽他所能做的一切。顺便提一下，阿贝耳可以说是一个很成功的教师。要是他能随心所欲，贫穷决不会使他伤脑筋。任何时候他都能想办法为他自己简朴的生活挣到足够的钱。但是背上压着七个人的担子，他就毫无希望了。他从不抱怨，而是把这一切看作可以轻而易举地克服的日常生活中的一部分，继续利用每一点空闲的时间进行他的数学研究。

霍姆伯厄相信他是遇上了一个空前伟大的数学家，于是尽他所能地为这个年轻人寻求补助金，慷慨地搜寻着他自己的几乎空无所有的口袋。但是整个国家贫穷到了挨饿的程度，也就几乎没有什么办法可想了。在那些艰难穷困和不断地工作的年代里，阿贝耳使自己不朽，也为自己播下了在他只完成了他的一半工作之前就致他于死地的疾病的种子。

阿贝耳的第一个抱负不凡的冒险，是试图解决一般的五次方程。他在代数方面的所有伟大的前辈们，都曾竭尽全力想要得出

一个解答而没有成功。我们很容易想象到，当阿贝耳误认为他取得了成功时的那种狂喜的心情。这个想象的解答经霍姆伯厄之手，送到了当时丹麦最有学问的数学家手里。对阿贝耳说来，幸运的是这位数学家要求进一步的详细说明，而没有就解答是否正确提出自己的意见。阿贝耳在这同时发现了他的推理中的缺陷。这个想象的解答当然根本不是解答。这次失败给了他一个非常有益的打击；它把他推上了正确的途径，使他怀疑一个代数解是否是可能的。他证明了不可解。那时他大约十九岁，但是他已经预见到了全部计划，至少是部分计划。

由于这个一般五次的问题在代数中所起的作用，与决定一个完整的科学理论命运的关键性实验的作用相似，所以值得加以注意。我们后面要引用阿贝耳自己说的一些话。

这个问题的性质是很容易描述的。在中学代数的开始，我们学过解未知数 x 的一阶或二阶的一般方程，比如说，

$$ax+b=0,\ ax^2+bx+c=0$$

稍后一点又学了解三阶和四阶的方程，比如说

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,\ ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0。$$

那就是说，对前四阶的一般方程，我们作出了有限的(封闭的)公式，用已知的系数 a, b, c, d, e 表示未知数 x。这四个方程中任意一个的解都能够只用有限数目的加、减、乘、除、开根来得到，并且所有这些运算都能用已知的系数实现。这样的解就称为代数解。在代数解的这个定义中，一个重要的条件是有限；描述任何代数方程的根本不包含开根的解毫无困难，但是这样的解确实包含着所说的其他运算的无限性。

在成功地解出了前四阶代数方程之后，代数学家们奋斗了差不多三个世纪，想要作出一般五次方程

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

的一个类似的代数解。他们失败了。阿贝耳就从这里开始。

下面的摘录部分地是要显示一个有独创能力的大数学家是如何思考的，部分地是由于它们本来具有的趣味。它们摘自阿贝耳的论文《关于方程的代数分解》。

"代数中最有趣的问题之一是求方程的代数解。因而我们发现几乎所有卓越的数学家都讨论过这个题目。我们能够很容易地得出前四阶方程的根的一般表达式。发现了解这些方程的一致的方法，人们相信它也能应用到任意阶的方程上；但是尽管拉格朗日和其他杰出的数学家尽了一切努力，预期的目的都没有达到。这导致了一般方程不可能代数求解的推测；但是这是无法确定的，因为所沿用的方法，只是在方程可解的情况才能导致确切的结论。实际上，它们提出解方程，而不知道它是否可解。用这种方法确实可以得出一个解，虽然那决不是肯定的；但是假如运气不好，方程不可解，那就可能会永远寻找它，可是找不到它。因此，为了在这个问题上得出一些确实可靠的东西，我们必须采取其他途径。我们可以给这个问题这样一种形式，使得解答它总是可能的，就象我们对任何问题总能做到的那样。① 我们不是要找出一个不知其是否存在的关系，而是必须问一问这样一个关系是否的确有可能……。当一个问题是以这种方式提出时，这个说法本身就包含着解答的萌芽，指出了必须采取的途径；我相信，我们不能得出多少有些重要性的命题的情况是极少的，甚至当计算的复杂程度阻碍了对问题的完全解答时，也是如此。"

311

① 阿贝耳说的是"…ce qu'on peut toujours faire d'un problème quelconque"（就某个问题人们始终能做到的）这似乎有点太乐观了；至少对于一般人是太乐观了。怎样将这个方法用于费马大定理呢？

他继续说，这个要采用的真正的科学方法，由于它需要的(代数)计算极其复杂，因而极少被采用；“但是，”他又说，“在很多情形，这种复杂性只是表面上的，一开始计算后就消失了。”他继续说：

“我已经用这种方式探讨过分析学的几个分支，虽然我给自己提出的问题经常是超出我的能力的，我还是得出了大量的一般结果，这些结果有力地说明了量的性质，而阐明这些量，正是数学的目的。我将在另外一个地方给出我在这些研究中得到的结果，以及我用以得到它们的方法。在这篇论文中，我将讨论最一般的方程的代解求解问题。”

312 不久，他说明了他建议讨论的两个一般相关的问题：

“1．找出所有已知的代数可解的方程。

2．决定一个已知的方程是否代数可解。”

他说，实际上这两个问题是同样的，虽然他没有宣称有了一个完整的解，他的确指出了完全解决它们的确实可靠的方法。

阿贝耳还没有时间回到这些问题上，他那抑制不住的创造力就催促他去考虑更广泛的问题了；而这些问题的完整的解答——代数方程能够代数求解的充分必要条件的明确说明——应留待伽罗瓦去回答。当阿贝耳的这篇论文在1828年发表时，伽罗瓦还是一个十六岁的孩子，已经很好地开始了他的重要发现的经历。伽罗瓦后来知道了并且钦佩阿贝耳的工作；阿贝耳从来没有听说过伽罗瓦的名字，虽然当阿贝耳访问巴黎时，他和他这位杰出的后继者只相隔几英里的距离。要不是由于伽罗瓦的教师的愚蠢和阿贝耳的一些数学“前辈”的高傲，伽罗瓦和阿贝耳很可能就见面了。

尽管阿贝耳在代数上的工作是划时代的，他创造了分析学的一个新分支，却使它失去了光辉。正如勒让德所说，这项工作是阿

贝耳的"比时间还经久的纪念碑。"如果他一生的经历没有给他的辉煌成就添加什么光彩，它至少暗示当他去世时世界将失去什么。它是一个有点令人沮丧的经历。阿贝耳在贫穷的压力下，在缺乏当代数学名家鼓励的情况下，只有他那抑制不住的愉快和顽强的勇气，使这个经历稍微轻松了一些。不过除了霍姆伯厄以外，他确实找到了一个慷慨的朋友。

1822年6月，阿贝耳十九岁时，在克里斯蒂安尼亚大学念完了必须的课程。霍姆伯厄已经尽了一切努力使这个年轻人摆脱贫困，他说服他的同事们，他们也应该慷慨解囊，使阿贝耳有可能继续他的数学研究。他们为他感到无限骄傲，但是他们自己也很穷。阿贝耳很快成长得超出了斯堪的纳维亚。他渴望去法国看看，那时法国是世界的数学皇后，在那里可以遇见他的伟大的同事们(他所在的等级，远比他们当中的一些人要高，但是他不知道)。他也希望访问德国，拜会高斯，所有那些人中无可争辩的数学家之王。 313

阿贝耳的数学和天文学界的朋友们，说服了大学去请求挪威政府资助这个年轻人，作一次以数学为主要目的的欧洲之行。阿贝耳为了使权威们对他的价值有所注意，交上了一篇很长的论文，从这篇论文的题目看，它也许与他最负盛名的领域有关。他本人对它估价甚高，相信大学出版它会给挪威带来荣誉，阿贝耳对自己的工作的看法从来也不过分，也许与其他人的看法同样公正。不幸的是，大学正在它本身严重的财政困难中挣扎，论文最后丢失了。经过过分的慎重考虑之后，政府妥协了——哪个政府不这样做呢？——但是不是做唯一通情达理的事，即立刻派阿贝耳去法国和德国，而是给他一笔奖学金，让他在克里斯蒂安尼亚继续他的大学学习，以便他能复习法语和德语。这恰恰是从任何以好心和有

常识闻名的官员们那里，他所能指望得到的那种决定。然而指挥一个天才可不是常识的事。

阿贝耳在克里斯蒂安尼亚延误了一年半，他没有浪费时间，而是很尽职地履行他这方面的义务，钻研（不很成功）德语，法语开了个好头，不间断地从事数学研究。以他改不了的乐观精神，他还和一位年轻姑娘——克雷利·肯普订了婚。最后，在1825年8月27日，阿贝耳二十三岁时，他的朋友们战胜了政府的最后一次阻挠，皇家下令给予他足够在法国和德国旅行和学习一年的经费。他们并没有给他很多，但是在国家窘迫的财政条件下，他们毕竟给了他，这个事实比整整一部艺术和贸易的百科全书更能说明1825年挪威的文明程度。阿贝耳很感激。他在动身以前用了大约一个月的时间，安顿依靠他生活的家人。但是在这以前十三个月，他天真地以为所有的数学家都象他一样心胸开阔，他在起步之前就断了自己的一条退路。

阿贝耳自己出钱——只有天知道是怎么想出办法的——出版了他的论文，他在这篇论文中证明了用代数方法不可能解一般五次方程。这篇论文印得很蹩脚，但已经是当时落后的挪威所能提供的最好的印刷了。阿贝耳天真地相信这就是他通向欧洲大陆的数学家们那里的科学护照。他特别希望高斯会看出这项工作的显著价值，而不只是跟他形式上的见上一面。他不可能知道，这位“数学家之王”有时候对竭力要得到公正的承认的年轻数学家，只是表现出一种王子般的大度。

高斯及时收到了这篇论文。阿贝耳从无可指责的目击者那里听说了高斯是怎样欢迎这个礼物的。他没有屈尊读一读就把它抛在一边，并且厌恶地喊道，“这又是一个那种怪物。”阿贝耳决定不去拜访高斯。从那以后，他很讨厌高斯，一有机会就诋毁他。他

说高斯写的东西晦涩难懂，暗示德国人把他捧得太高了一点。由于这种完全可以理解的厌恶，到底是高斯还是阿贝耳失去了更多的东西，这是一个没有解决的问题。

高斯常常为了他在这件事情上的"傲慢的轻视"而受到指责，但是那几乎不是描绘他的行为的恰当的词汇。那时一般五次方程的问题已经声名狼藉。想法古怪的以及有名望的数学家都曾钻研过它。如果今天一个数学家收到化圆为方的所谓解答，他不一定会给作者写一张表示感谢的有礼貌的便条，但是他几乎肯定会把作者的手稿扔到废纸篓里去。因为他知道林德曼在1882年证明了不可能只用尺规化圆为方——想法古怪的人只限于使用这些工具，正如欧几里得做过的那样。他也知道林德曼的证明是任何人都能够接受的。在1824年，一般五次方程的问题几乎与化圆为方的问题相等。因此高斯不耐烦了。但是这个问题还不是那样糟；还没有证明不可解。阿贝耳的文章提供了证明；高斯要是耐着性子的话，本来是可以读到一些使他很感兴趣的东西的。他没有这样做，真是一个悲剧。只要他的一句话，阿贝耳可能就会成名，甚至阿贝耳的生命也可能延长。当我们看到了他的全部经历时，我们是会承认这一点的。

阿贝耳在1825年9月离开家以后，首先访问了挪威和丹麦的著名数学家和天文学家，然后，他没有象他原来打算的那样立即赶往格丁根去见高斯，而是去了柏林。他在柏林运气非常好，碰到了一位叫奥古斯特·利奥波德·克列尔(1780—1856)的人，这个人将成为他在科学方面的霍姆伯厄，他在数学界的影响也比好心的霍姆伯厄要大得多。如果说是克列尔帮助阿贝耳成了名，那么阿贝耳也通过使克列尔成名，大大报答了他的帮助。今天不管人们在什么地方耕耘数学，克列尔的名字都是常用词，事实上还不止此；

315

因为"克列尔"已经成了象征他创办的杂志的专用名称，该杂志的前三卷包括了阿贝耳的二十二篇论文。这个杂志使阿贝耳成名，或者至少使他为欧洲大陆的广大数学家们所知晓，而没有这个杂志，这是怎么也办不到的。阿贝耳的伟大工作使这个杂志在整个数学界旗开得胜；最后杂志使克列尔成了名。对于这位谦逊的业余数学工作者，是值得多花些笔墨的。他办事的能力和他挑选真正通晓数学的合作者的可靠的本能，对于十九世纪数学的发展，比半打学术机构的贡献还要大。

克列尔本人是一个自学出来的数学爱好者，而不是一个有创造力的数学家。他的职业是建筑工程师。他很早就在他的工作上出人头地，建造了德国的第一条铁路，挣得了一笔够他过舒适生活的奖金。在空闲的时间，他认真研究数学，而不仅把它作为一种业余爱好。他在1826年创办的《纯数学与应用数学杂志》给了德国数学以很大的促进，在这前后他本人也对数学研究作出了贡献。这一杂志的创办，是克列尔对数学发展的最大贡献。

这个杂志是世界上第一个专门从事数学研究的定期刊物。它不欢迎对过去的工作的解释。任何人的文章(除了克列尔自己的一些文章以外)都接受，只要内容是新的、正确的，有足够的"重要性"——一个模糊的要求——值得发表。从1826年直到现在，"克列尔"每三个月出版一期新的数学文章。在第一次世界大战以后的混乱年代中，"克列尔"濒于停刊，但是来自世界各地的捐款支撑了它，捐款的人不愿看到比我们自己的文明更平静的文明的这个伟大纪念碑就此湮没。今天，有几百种杂志全部或相当大一部分从事纯数学和应用数学的进展。但是在我们下一次的传染性疯狂爆发以后，有多少能够幸存下来就不得而知了。

当阿贝耳在1825年到达柏林时，克列尔刚刚下定决心用他自

己的资金开始他的伟大冒险。阿贝耳对最后促使他作出决定起了作用。对阿贝耳和克列尔的初次见面有两种说法，两种都很有趣。克列尔那时有一个在政府中工作的位置，在柏林任商业学校的主考人，他对这项工作既不胜任，也不喜欢。转了三道手的(从克列尔到维尔斯特拉斯到米塔格-列夫勒)克列尔对这次历史性会见的记述是这样的：

"在一个晴朗的日子，一个有一张很年轻、很聪明的脸孔的漂亮年轻人，局促不安地走进了我的房间。我以为我又得和一个准备参加商业学校入学考试的人打交道，就对他解释，需要分别进行几项考试。最后这个年轻人开口了，解释说[用很蹩脚的德语]，'不是考试，只是数学'。"

克列尔看出阿贝耳是个外国人，就试着用法语和他交谈，阿贝耳讲法语也有困难，但能让对方明白他的意思。然后克列尔问他在数学上做过些什么。阿贝耳很有外交手腕地说，除其他东西以外，他读过当时刚发表不久的、克列尔本人1823年关于"分析的官能"(现在在英语中叫"析因")的文章。他说，他发现那篇文章非常有意思，但是——。然后，就不是那样用外交辞令了，他开始告诉克列尔，文章中有些部分完全错了。克列尔正是在这里表现出了他的伟大。他没有因为这个年轻人在他面前的大胆无礼，而对他冷淡或大发雷霆，而是竖起耳朵，询问细节，他非常注意地听了阿贝耳的说明。他们谈了很长时间的数学，克列尔只理解其中的部分。但是不管他是否懂得阿贝耳对他说的一切，克列尔清楚地看出了阿贝耳是个什么样的人。克列尔从来没有懂得阿贝耳所做的工作的十分之一，但是他对数学天才的可靠的直觉告诉他，阿贝耳是一个第一流的数学家，于是他竭尽所能地使他这位年轻的被保护人得到承认。在会晤结束之前，克列尔就决定了阿贝耳必须成为

筹办中的《杂志》的第一位撰稿人。

阿贝耳的记述是不同的，但差别不大。我们从字里行间可以看到，差别是由于阿贝耳的谦虚。一开始，阿贝耳担心他想让克列尔感兴趣的计划会碰壁。克列尔不会知道这个年轻人想要什么，他是谁，或者关于他的任何事情。但是在克列尔询问阿贝耳读过些什么数学方面的东西时，情况大大好转了。当阿贝耳提到他读过的大师们的著作时，克列尔变得机敏起来。他们就几个突出的、没有解答的问题谈了很长时间，阿贝耳大着胆子向出乎意料的克列尔提出了他的不可能用代数方法解一般五次方程的证明。克列尔连听都不愿听；任何这样的证明都一定有问题。但是他接受了这篇文章，草草翻了一遍，承认阿贝耳的推理在他之上——最后在他的《杂志》上发表了阿贝耳的详尽的证明。虽然克列尔只是一个有限的数学家，算不上科学上的伟人，但他是一个气量大的人，事实上是一个伟大的人。

克列尔到哪里都带着阿贝耳，把他作为最了不起的数学上的空前发现四处炫耀。自学成才的瑞士人斯泰纳——“阿波罗尼奥斯以来最伟大的几何学家”——有时也陪着克列尔和阿贝耳四处转。当克列尔的朋友们看见他身后跟着他的两位天才走来时，他们就喊道，“亚当老爹又跟该隐和亚伯一起来了。”①

柏林丰富的社交活动开始使阿贝耳不能专心工作，他躲到弗赖堡去了，在那里他可以集中精力工作。正是在弗赖堡，他把他最伟大的工作锻造成型了，即创造了现在所称的阿贝耳定理。但是他还得赶赴巴黎，去会见当时第一流的法国数学家——勒让德、柯西和其它一些人。

① 亚当为圣经中所称人类的始祖；该隐为亚当和夏娃之长子，亚伯为亚当及夏娃之次子。——译者

可以不加思索地说，阿贝耳在法国数学家那里所受到的接待，就象一个人在一个很文明的时代，从很文明的人的杰出代表那里所能指望的一样文明。他们对他都很有礼貌——该死的礼貌，事实上那就是阿贝耳从他如此热切地期望着的访问中得到的一切。当然他们不知道他是谁，或他是干什么的。他们也不想知道。如果阿贝耳开口——当他来到能和他们谈话的距离之内时——谈到他自己的工作，他们立刻讲述他们自己是如何伟大。那位年高德劭的勒让德，要不是由于他的冷淡，本可以知道一些关于他终生热爱的东西（椭圆积分），这些东西会使他感到莫大的兴趣。但是当阿贝耳拜访他时，他正踏上马车，只来得及说一声很有礼貌的日安。后来他很慷慨地道了歉。

1826年7月下旬，阿贝耳在巴黎寄寓于一个贫穷但贪婪的家庭，他们给他每天两顿很差的伙食和一间极坏的房间，却要了一笔简直无法无天的房租。在巴黎住了四个月以后，阿贝耳写信给霍姆伯厄，谈了他的感想：

"巴黎，1826年10月24日

"实话告诉你，大陆上这个最嘈杂的首都，目前给我一种沙漠的印象。我实际上谁也不认识；这是一个可爱的季节，人人都去了乡间。……到现在为止，我结识了勒让德先生、柯西先生和阿歇特先生，以及一些名气稍差一点但很能干的数学家：科学学报的编辑赛热先生，还有勒热纳-狄利克雷先生，他是一个普鲁士人，有一天他来看我，认为我是他的同胞。他是一个极有洞察力的数学家。他和勒让德先生一起证明了$x^5+y^5=z^5$不可能整数解，以及其他一些很不错的结论。勒让德极有礼貌，但是不幸他很老了。柯西是疯了……。做的工作极好，但是很混乱。一开始我实际上对它一无所知，现在我比

较清楚地了解它的某些部分了……。柯西是唯一从事纯数学研究的人。泊松、傅里叶、昂佩尔等等一些人埋头于电磁学和其它物理学科。我相信拉普拉斯先生现在什么都不写了。他最后的工作是对他的概率论的增补。我常常在学院看见他。他是一个非常有趣的小家伙。泊松也是一个小家伙；他知道怎样做到举止非常高贵；傅里叶先生也一样。拉克鲁瓦相当老了。阿歇特先生要把我引荐给这些人中的几位。

"法国人对陌生人比德国人冷淡得多。跟他们亲近极其困难，我不敢说我能和他们达到亲密的程度；最后，每一个新手要在这里受到注意都有很多困难。我刚刚完成了一篇关于某一类超越函数的范围广泛的论文[他的杰作]，准备呈交给学院[科学院]，下星期一我就交上去。我把它拿给柯西先生看，但是他只屈尊看了一眼。我敢说，一点不夸口，它是一篇很好的作品。我急于听到学院对它的评价。我一定与你同享它……。"

然后他讲了他正在干什么，接下去是对他的前途的相当令人不安的预测。"我后悔不该预定旅行两年，一年半就足够了。"

他已经得到了从欧洲大陆能够得到的一切，急于想要能够把他的时间用在他的发明上。"有这样多的事情等着我去做，但是只要我在国外，一切都进行得很糟糕，要是我象基尔豪先生那样，有个教授职位就好了！我的位置还没有确定，这是事实。但是我并不为此担心，如果命运在这一方面抛弃了我，也许她会在另一个方面对我微笑。"

我们从一封日期较早的、写给天文学家汉斯廷的信中摘录了两段，第一段与阿贝耳要在一个坚实的基础上重建他那个时代的

数学分析的伟大计划有关，第二段显示出他的人性方面的一些东西。（两段都是随手译出的。）

“在高等分析中，很少有几个命题是极其严格地证明了的。我们到处发现从特殊到一般的推理这个不幸的方法，而在这样处置之后，我们只在极少的情形下发现称作悖论的东西，这是个奇迹。找出造成这种情形的原因确实是非常有趣的。在我看来，原因就在于这样的事实：迄今在分析学中出现的函数，大多数都能够表示为幂函数……。当我们采用一个一般方法时，[避免陷阱]并不太难；但是我必须非常谨慎，因为没有严格证明（即根本没有证明）的命题已经在我心里生根，以至我常常冒着不做进一步检查就采用它们的危险。这些琐碎的东西将出现在克列尔先生出版的杂志中。”

紧接着这段文字，他表达了对他在柏林受到的待遇的感激之情。“确实只有很少几个人对我感兴趣，但是这很少的几个人对于我无比宝贵，因为他们向我表示了这样多的友情。也许我能以某种方式回报他们对我的希望，因为一个保护人看到他白白操心了一定是很难受的。”

然后他谈到克列尔怎样请求他在柏林永久定居。克列尔已经在用他的全部人事管理才干，把这个挪威人阿贝耳推举到柏林大学的教授席位。这就是1826年的德国。阿贝耳当然已经是伟大的了，他那可靠的才能表明他是高斯的最有希望的后继者。尽管他是外国人也没有关系；1826年的柏林需要最好的数学人才。一个世纪以后，最好的数学物理人才也不够好了，柏林强行驱除了爱因斯坦。我们就是这样进步的。但是，还是回到乐观的阿贝耳吧。 320

“起先我指望从柏林直接去巴黎，因为可能有克列尔先生

陪我去而感到高兴。但是克列尔先生有事不能去了，我不得不独自旅行。现在，我已不是那种能忍受孤独的人了。单独一个人，精神不振，脾气也变坏了，我几乎不想工作。所以我对自己说，和伯克先生一起去维也纳会好得多，我觉得这趟旅行是有正当理由的，因为在维也纳有利特罗、布格、和其他一些人，都是些优秀的数学家；除此以外，我一生中只作这一次航海。我这个想看看南方生活的愿望难道不是很合理的吗？在旅途中我能勤勉的工作。一旦到了维也纳，从那里去巴黎，顺便经过瑞士就几乎是条捷径了。我为什么不应该也看它一眼呢？天啊！我，甚至我，也象别人一样，有种对自然美的爱好。整个这一趟旅行会使我晚两个月到达巴黎，就是这些。我能很快地补上失去的时间。你不认为这样一趟旅行会对我有好处吗？”

所以阿贝耳去南方了，把他的杰作留给柯西转呈科学院。多产的柯西忙着孵他自己的蛋，咯咯地叫着，顾不上谦虚的阿贝耳放在他窝里的确实是大鹏的蛋。阿歇特是个只配给数学家洗碗碟的人，他在 1826 年 10 月 10 日把阿贝耳的《关于非常广泛的一类超越函数的一般性质的论文》呈交给巴黎科学院。这就是勒让德后来用贺拉斯的话描述为“monumentum aere perennius”［永恒的纪念碑］的工作，也是埃尔米特说的阿贝耳留给未来多少代数学家的五百年的工作。它是现代数学的一项登峰造极的成就。

它到底怎么样了呢？勒让德和柯西被任命为评阅人。那时勒让德七十四岁，柯西三十九岁。老手正在失去他的锐气，巨头正在他自我中心的顶峰。勒让德抱怨（1829年 4 月 8 日给雅可比的信）说“我们发觉这篇论文很难辨认；它是用淡得几乎是白色的墨水写的，字写得很糟，我们两人认为应该要求作者送一份写得整齐易读

的来。"这是什么样的托词啊！柯西把论文带回家，不知放在什么地方了，完全把它给忘了。

321 要和这种惊人的健忘本领相比，我们得想象一个研究埃及学的学者把罗塞达碑①丢失了。只是由于某种奇迹，这篇论文在阿贝耳死后被发掘出来了。雅可比从勒让德那里听说过它，阿贝耳在回到挪威后曾经和雅可比通过信，在1829年3月14日写给勒让德的信中，雅可比惊呼，"阿贝耳先生的这个发现是什么样的发现啊！……有谁看见过同样的东西吗？这个发现，也许是我们这个世纪最伟大的发现，在两年前就交给你们科学院了，可你的同事们怎么会没有注意到它呢？"挪威得知了这个质问。长话短说，挪威驻巴黎的领事就这份遗失的手稿提出了外交抗议，柯西在1830年把它翻了出来。最后它发表在《法兰西科学院著名科学家论文集》第七卷，一百七十六页至二百六十四页，但那已经是1841年了。在对待这篇史诗般的著作方面，极端无能的顶点就是编辑，或者印刷工，或者他们一起，相继在阅读清样以前把手稿丢失了。②科学院(在1830年)赔偿阿贝耳，让他和雅可比一起获得了数学大奖，然而，阿贝耳已经去世了。

论文的开始几段表明了它的范围。

"迄今数学家研究过的超越函数，数目非常之少。实际上，超越函数的整个理论简化成了对数函数、三角函数和指数函

① 罗塞达碑为1797年在尼罗河口的罗塞达城郊发现的埃及古碑，上刻埃及象形文、俗体文和希腊文三种文字。该碑的发现为译解古埃及象形文字提供了钥匙。——译者

② 利布里是一个自封的数学家，这篇论文的整个印刷过程他都在场，他"在科学院的许可下"，给论文加上了一个自命不凡的脚注，承认已故的阿贝耳的天才。这是最后一根稻草：科学院可以公布全部事实，或者保持沉默。但是无论如何，必须维护一个神气十足的小人的荣誉和尊严。最后，我们可以回想起，当利布里在那里转来转去的时候，宝贵的手稿和书都莫名其妙地就不见了。

数，实质上只是形成了单独一类的函数。只是到了最近，才开始考虑一些其他函数。在后来考虑的函数中，椭圆超越函数占据首位，它们的显著而精致的性质是勒让德先生发展起来的。作者[阿贝耳]在他荣幸地呈交给科学院的论文中，研究了很广泛的一类函数，即：所有那些导数可以由系数为单变量有理函数的代数方程表示的函数，他已经给这些函数证明了一些与对数函数和椭圆函数类似的性质……，得到了下面的定理：

322

"如果我们有几个函数，它们的导数可以是同一个代数方程的根，该方程的系数均为单变量有理函数，只要我们在讨论中的函数的变量之间建立一定数目的代数关系，我们永远能用一个代数和对数函数表示任意数目的这种函数的和。

"这些关系的数目完全不依赖于函数的数目，而只依赖于所考虑的特殊函数的性质。……"

阿贝耳这样简单地描述的定理，今天通称为阿贝耳定理。他对它的证明被人们描述为只不过是"积分学中的一道了不起的练习。"就象在他的代数中一样，阿贝耳在他的分析中也最简练不过地得到了他的证明。可以毫不夸张地说，这个证明是任何学完了微积分学初等课程的十七岁的孩子都能理解的。阿贝耳自己的证明极为简单朴素，毫无夸张虚饰。对于十九世纪最初证明的一些推广和几何上的重建，就不能这样说了。阿贝耳的证明就象一尊菲迪亚斯的雕像；其它人的证明则象一座捂在爱尔兰花边、意大利糖果和法国细点心里的哥特式大教堂。

在阿贝耳的开场白这一段中，有可能会被人误解的地方。阿贝耳无疑只是在对一位老人表示善意的谦恭，这位老人在他们初

次相识时屈尊俯就过他——在坏的意义上，但是，他尽管把他漫长的一生的大部分工作时间都用在研究一个重要的问题上，却没有弄清楚它到底是怎么回事。勒让德并没有象阿贝耳的话可能隐含的那样讨论过椭圆函数；勒让德花费了他一生中大部分时间研究的问题，是椭圆积分，它与椭圆函数的差别，就象马与它拉的车的差别一样，这恰恰是阿贝耳对数学的一项最伟大贡献的症结和根源之所在。对任何学过中学三角的人，这个问题都是很简单的；为了避免对初等东西作冗长乏昧的解释，在不久要讲到的内容中，假定它们是已知的。

不过，对于那些完全忘记了三角学的人，可以对阿贝耳的划时代进展的本质，他的方法论，作这样的比喻：我们提到过车和马。把车放在马前面这个陈腐的谬语，描述了勒让德做的事；阿贝耳看出，如果要车向前走，马必须走在车的前面。再举一个例子，弗朗西斯·哥尔登在他对贫穷和长期酗酒的关系的统计研究中，他那颗公平的心使他重新考虑了愤怒的道德学家和经济改革运动家，借以别有用心地评价这些社会现象的、自以为是的陈词滥调。哥尔登不是假定人们堕落是由于他们酗酒，而是把这个假设反了过来，暂时假定人们酗酒是由于他们没有从祖先那里继承到道德精神，简言之，是由于他们堕落。哥尔登无视改革家们的一切空洞的说教，他紧紧抓住了一个科学的、客观的、可采用的假说，他能够把公正的数学方法应用在这个假说上。他的工作还没有得到社会承认。暂时，我们只需注意，哥尔登象阿贝耳一样，把他的问题反过来了——把它上下，里外，前后，来来回回地颠倒了。就象海华沙①和那传说的无指手套一样，哥尔登把带皮的一面翻到里面，把里

323

① 海华沙(Hiawatha)为英国著名诗人朗费罗(1807—1882)的长诗《海华沙之歌》中的印第安英雄。——译者

子翻到外面了。

这一切决不是明显的或不值一提的。它是数学发现(或发明)所曾设计出来的最有力的方法之一，阿贝耳是第一个有意识地把它用作研究方法的人。"你必须经常颠倒过来考虑"，正如雅可比在有人问他数学发现的秘密时回答的。他在回顾他和阿贝耳做过的事情。如果一个问题的解答陷入毫无希望的状况时，试着把这个问题颠倒过来，把问题作为论据，把论据作为问题。这样，如果我们发现，当我们把卡丹①看做他父亲的一个儿子时，无法理解他的性格，就转移重点，把它颠倒过来，看看当我们把卡丹的父亲作为他儿子的父亲和赋与者来分析时，我们得到些什么。不是研究"遗传"，而是集中研究"赋与"。现在回到那些还记得一点三角学的人。

假定数学家们盲目得看不出，$\sin x$, $\cos x$ 和其他的直接三角函数在加法公式和其他地方，比反三角函数 $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ 用起来更方便。回想一下用正弦和余弦展开的公式$\sin(x+y)$，把它与用 x, y 表示的公式 $\sin^{-1}(x+y)$ 相比较。前者不是比后者无可比拟地更简单、更优美、更"自然"吗？现在，在积分学中，反三角函数自然地以简单代数无理式(二阶)的定积的形式呈现出来；当我们试图利用积分学求一个圆的弧长时，这样的积分就出现了。假定一开始反三角函数就以这种方式出现。那么考虑以这些函数的逆，也就是熟悉的三角函数本身，作为要去研究和分析的已知函数，不是"更自然"吗？这是毫无疑问的；但是在许多更高深的问题中，最简单的问题是用积分求一个椭圆的弧长，首先出现的是棘手的反

324

① 卡丹Cardan(1501—1576)，意大利数学家，文艺复兴时期的学者，著述甚多，性格古怪，品行不端。参见 M. 克莱因著《古今数学思想》中译本，第 1 卷，254—256 页。(上海科技出版社)。——译者

"椭圆"（不是象对于圆弧那样的"圆"）函数。这就使阿贝耳看出了应该把这些函数"反过来"，加以研究。正如在 $\sin x$，$\cos x$ 的情形而不是在 $\sin^{-1}x$ 和 $\cos^{-1}x$ 的情形一样。很简单，不是吗？然而勒让德这位伟大的数学家，在他的"椭圆积分"（他的问题的棘手的"反函数"）上花了四十多年的时间，却一次也没有怀疑到他应该反过来考虑。①这个看待表面上简单、实际上深奥难解的问题的极其简单平常的方式，是十九世纪最伟大的数学进展之一。

但是，所有这一切，只不过是阿贝耳在他了不起的定理中、和他对椭圆函数的工作中，所做的一切的开端，尽管是一个非常惊人的开端——就象吉卜林②的黎明象惊雷一样出现。三角函数或圆函数有一个单一的实周期，$\sin(x+2\pi)=\sin x$ 等等也是这样。阿贝耳发现他的由椭圆积分的逆提供的新函数，确实有两个周期，它们的比是虚数。在这以后，阿贝耳在这方面的追随者们——雅可比、罗森海因、维尔斯特拉斯、黎曼，还有许多人——深入地钻研阿贝耳的伟大定理，他们通过继续发展和扩充他的思想，发现了一些有 $2n$ 个周期的 n 个变量的函数。阿贝耳本人更深入地探索了他的发现。他的后继者们把整个这项工作应用到几何、力学、数学物理的一些部分，和数学的其它分支中，解决了一些重要问题，没有阿贝耳开始的这项研究，这些问题是无法解决的。 325

在巴黎期间，阿贝耳找几位很高明的医生看过病，他原以为那只不过是经常性的感冒。他被告知他患了肺结核。他不相信，从

① 在把优先权归于阿贝耳，而不是归于阿贝耳和雅可比"共同发现"这个问题上，我采用了米塔格-列弗勒的说法。从我对于所有已经发表的证据的全面了解，我确信阿贝耳的权利是无可争议的，虽然雅可比的同胞们持相反的看法。

② 吉卜林（Kipling），1865—1936，英国作家，诗人。——译者

他的靴子上擦去了巴黎的泥土，又回到柏林作短期访问。他只剩下很少的钱；大概只有七元钱。他写了一封急信，延误了一些时间，从霍姆伯厄那里借来了一笔钱。决不能认为阿贝耳是一个长期借钱又没有希望还钱的人。他有充分理由相信，他回国后会有一个挣钱的工作。而且，也还有应该付给他的钱。阿贝耳从1827年3月到5月，靠霍姆伯厄的大约六十元借款生活和从事研究。然后，他所有的来源都枯竭了，他掉头回国了，到达克里斯蒂安尼亚时身无分文。

但是，他希望一切都会很快好起来。大学的工作现在一定会很快到来。他的才能已开始得到承认。有了一个空位置。阿贝耳没有得到它。霍姆伯厄原想让阿贝耳担任这个位置，但是学校当局威胁说，要是他不接受，就找一个外国人来担任，这样他才勉强接受了下来。决不能责怪霍姆伯厄，尽管阿贝耳已经充分证明了他教书的能力，校方却认为霍姆伯厄是个比阿贝耳更好的教师。凡是熟悉美国流行的教育学理论的人，都完全能懂得这种情形，因为这种教育学理论是由专门的教育学院提出来的，认为对他所教的东西知道得越少的人，教得越好。

然而情况确实好转了。大学付给了阿贝耳欠他的旅费差额，霍姆伯厄也把学生送到他这里来。天文学教授有事离开，建议雇用阿贝耳承担他的部分工作。一对有钱的夫妇施耶尔德鲁普斯收纳了他，象对自己的儿子那样对待他。但是即便有这一切，他还是无法摆脱靠他养活的家人的负担。他们直到最后一直缠着他，实际上弄得他自己一无所有，可是直到最后他也从没有说过一句不耐烦的话。

1829年1月中旬，阿贝耳知道他活不长了。溢血的迹象是无法否认的。他在昏迷中喊道，“我要为我的生命奋斗！”但是在更多

的安静的时刻,在他精疲力竭,试着要工作的时候,他意气消沉了,“象一只看着太阳的病着的鹰,”知道他只有几个星期好活了。

阿贝耳在弗罗兰的一个英国人的家里度过了他最后的日子,他的未婚妻(克雷利·肯普)在那家作女管家。他最后的思想是考虑她的未来。他写信给他的朋友基尔豪,“她并不美丽;她有红色的头发和雀斑,但她是一个可爱的女子。”阿贝耳希望克雷利和基尔豪能在他死后结为夫妻,虽然这两个人从未见过面;他们象阿贝耳半开玩笑地提议的那样结了婚。直到最后,克雷利始终坚持不要别人帮忙,自己照顾阿贝耳,“单独享有这些最后的时刻”。1829年4月6日凌晨,他去世了,只活了二十六年零八个月。

阿贝耳死后两天,克列尔来信说,他的谈判终于成功了,阿贝耳将被任命为柏林大学的数学教授。



雅可比

第十八章　伟大的算学家

雅　可　比

> 现代分析代替计算思想是日益显著的倾向；然而还是有一些数学分支，计算保持着它的权利。
>
> ——P. G. 勒热纳·狄利克雷

雅可比这个名字经常在科学中出现，但并不总是意味着同一个人。在十九世纪四十年代，一个十足声名狼藉的雅可比——M. H. 雅可比——有一个相对来说默默无闻的兄弟 C. G. J. 雅可比，那时他的名气只及 M. H. 雅可比的名气的十分之一。今天这种情形反过来了：C. G. J. 雅可比是不朽的——或者几乎是不朽的，

而M. H. 雅可比很快就默默无闻了。M.H. 雅可比是作为流行的电镀法骗术的创始人而成名的；C. G. J. 雅可比的狭窄得多、但也大得多的名气是建立在数学上的。在这位数学家生前，人们总是把他误认为他的更出名的兄弟，或者更糟，因为他与真诚行骗的骗子有这种偶然的亲戚关系而向他祝贺。最后，C. G. J. 雅可比再也不能忍受了。"对不起，美丽的夫人，"他反驳一个为了他有如此出众的兄弟而恭维他的，M. H. 雅可比的热情的赞美者。"但是我就是我的兄弟。"在其他场合，C. G. J. 雅可比会脱口而出，"我不是他的兄弟，他是我的兄弟。"这就是今天名气留给亲属关系的地方。

卡尔·古斯塔夫·雅可布·雅可比1804年12月10日出生在德意志普鲁士的波茨坦，他是富有的银行家西蒙·雅可比及其妻子（娘家姓勒曼）的第二个儿子。这一家共有四个孩子，三个男孩叫莫里茨、卡尔和爱德华，一个女孩叫特雷泽。卡尔的第一位老师是他的一位舅舅，他教给这孩子古典文学和数学，为他在1816年十二岁时进入波茨坦中学作准备。从一开始，雅可比就显示出"多才多艺的头脑"，中学校长在他离开该校时，就曾宣称他有这样一付头脑。他在1821年离开中学，进了柏林大学。雅可比象高斯一样，要不是数学更有力地吸引了他，他可以很容易地在哲学上博得很高的名声。教师（海因里希·鲍尔）看出这孩子很有数学天才，在长时间争论之后，让他自己工作，因为雅可比反对靠死记硬背和规则条例学习数学。 328

年轻的雅可比的数学发展，在一些方面很奇怪地与他的比较大的对手阿贝耳相同。雅可比也学习大师们的著作；欧拉和拉格朗日的著作教给他代数和分析，并把数论介绍给他。这段最早的自我教育，必然给雅可比的第一个杰出的工作——关于椭圆函数——以明确的方向，因为足智多谋的大师欧拉发现雅可比是他最

好的继承人。就复杂的代数中的纯粹运算能力而言，除了我们这个世纪的印度数学天才斯里尼瓦萨·罗摩纳真以外，没有人能与欧拉和雅可比匹敌。阿贝耳愿意的时候也能象大师一样掌握公式，但是他的天才和雅可比的相比，哲学成分较多，形式的成份比较少。阿贝耳在坚持严格性这一点上，天生比雅可比更接近于高斯——不是雅可比的工作缺乏严格性，它并不缺乏，而是它的灵感看来是形式主义的，而不是严格主义的。

阿贝耳比雅可比大两岁。雅可比不知道阿贝耳在1820年解决了一般五次方程问题，他在同一年试图得出一个解答，把一般五次方程化简为 $x^5-10q^2x=p$ 的形式，并且指出这个方程的解可以由某一个十次方程的解推出来。虽然这个尝试失败了，但是雅可比从中学得到了许多代数知识，他认为这是他的数学教育中相当重要的一步。但是他似乎没有象阿贝耳那样想到，一般五次方程可能是不能用代数方法解的。这种失察，或者缺乏想象力，或者，不管我们愿意叫它什么，在雅可比这方面，是他与阿贝耳之间的典型差别。雅可比具有非常客观的头脑，在他宽宏大量的天性中，一点猜疑或嫉妒也没有。他本人在谈到阿贝耳的一篇杰作时说："它高于我的赞扬，就象它高于我自己的工作。"

雅可比在柏林的大学生时代从1821年4月一直到1825年5月。在头两年中，他把时间平均地用在哲学、语言学和数学上。在语言学的研究班上，雅可比引起了P. A. 伯克的注意和赞许，伯克是一位有名望的古典文学学者，他出版了(除其他著作以外)平达尔①的著作的一个很好的版本。对于数学说来，幸运的是伯克没有使他这个最有希望的学生转变到以古典文学作为他毕生的兴趣。

329

① 平达尔(Pindar,522?—?433B. C.)古希腊的抒情诗人。——译者

在数学方面，大学不能为一个雄心勃勃的学生提供很多东西，雅可比继续自学大师们的著作。他把大学的数学讲座简单而恰如其份地说成是废话。雅可比通常是直率和切中要害的，尽管在试图把某个有资格的数学界的朋友捧到合适的位置上时，他知道怎样象任何奉承者那样去奉承。

雅可比正在勤勉地使自己成为数学家的时候，阿贝耳已经在将要使雅可比成名的同一条路上开了个好头。阿贝耳在1823年8月4日写信给霍姆伯厄，说他正忙于研究椭圆函数，"这项小小的工作，你会想起来，是涉及椭圆超越函数的反函数的，我证明了一点[似乎是]不可能的东西；我请求德根尽快地把它从头到尾看一遍，但是他找不出错误的结论，也不知道错在哪里；天知道我怎样才能把自己摆脱出来。"一个奇怪的巧合是，雅可比最后下决心要全力从事数学的时候，几乎就是阿贝耳写这封信的时候。这两个二十来岁的年轻人(阿贝耳二十一岁，雅可比十九岁)，年龄上两年的差距，比成年人二十年的差距还要重要。阿贝耳开了一个极好的头，但是雅可比很快就赶了上来，他并不知道他在这方面有一个竞争者。雅可比的第一项伟大的工作是在阿贝耳的椭圆函数的领域内。在考虑这项工作以前，我们先概述他繁忙的一生。

雅可比既已决定把他的全部力量投入数学，就写信给他的舅舅勒曼，告诉他估计他要承担的工作量。"如果要深入洞察欧拉、拉格朗日和拉普拉斯的工作堆成的大山的性质，而不仅只是在它的表面搜索一番，那就要求最惊人的力量和最艰苦的思考。要制服这个庞然大物而不怕被它撞毁，要求极度紧张，既不允许休息，也不得安宁，直到你站在它的顶端，俯瞰这全部工作，只有在这时，当你理解了它的精神，才有可能正确而平静地完成它的全部细节。"

雅可比在这样宣布了甘心服苦役以后，立刻成了数学史上的一个最拚命的工作者。在写给一个抱怨科学研究既艰苦又可能损害健康的胆怯的朋友的信中，雅可比驳斥说：

330 “当然是这样！有时候由于工作过度，我确实危及了我的健康，但那又怎么样呢？只有卷心菜没有神经，没有焦虑。可它们从它们完美的健康中得到了什么呢？”

1825年8月，雅可比以关于部分分式及类似题材的论文，获得他的哲学博士学位。没有必要解释这篇论文的性质——它没有多大意思，现在只是代数或积分学的中等课程中的一个细节。虽然雅可比论述了他的问题的一般情形，在运用公式方面表现得相当独出心裁，但是不能说这篇论文展示了任何明显的独创性，或者对作者非凡的天赋有任何明确的提示。雅可比在通过博士学位考试的同时，完成了他担任教师的职业训练。

取得了学位以后，雅可比在柏林大学讲授微积分学对曲面和空间曲线(大致说来，就是几个曲面相交出来的曲线)的应用。最初几讲就明显地表明雅可比是一个天生的教师。后来，当他开始以惊人的速度发展自己的思想时，他成了当时最鼓舞人的数学教师。

雅可比似乎是第一个这样的数学教师：他讲授自己的最新发现，让学生们看见新学科在他们面前创造出来，以此来训练学生进行研究工作。他认为把年轻学生们扔进冰水，由他们自己去学会游泳或者淹死是正确的。很多学生一直要到掌握了其他人做过的、与他们的问题有关的一切，才肯试着靠自己去工作。结果是只有极少数人养成了独立工作的习惯。雅可比反对这种拖拉的治学方法。为了对一个总是要等到再学些东西才肯做工作的、虽有天赋但无自信心的学生讲清道理，雅可比打了下面这个比喻。“要是你

的父亲坚持要先认识世界上所有的姑娘，然后再跟一个姑娘结婚，那他就永远不会结婚，你现在也就不会在这里了。”

雅可比整个一生，除了下面要讲到的一个可怕的插曲，和他有时去参加英国和欧洲大陆举行的科学会议，或者在过分紧张的工作之后不得不为恢复健康而休假以外，都用在教书和研究工作上了。他一生的年代表不是很吸引人的——一个专业科学家的年代表，除了对他自己，很难得使人感兴趣。

雅可比作为教师的才能，使他在获得柏林大学讲师职位仅仅半年以后，又于1826年获得柯尼斯堡大学讲师的职位。一年以后，雅可比发表的一些关于数论的结果，博得了高斯的称赞。由于高斯不是一个容易被惊动的人，教育部立即注意到了这件事，并把雅可比提升到他的许多同事之上，晋升为副教授——对一个二十三岁的年轻人来说，提升得相当可观了。那些被他超过的人，自然对这种提升感到不快；但是两年以后(1829年)，当雅可比发表他的第一篇杰作«Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum»(椭圆函数理论的新基础)时，正是他们首先提出提升他是最公正不过的，并向他们这位才气焕发的年轻同事祝贺。 331

1832年，雅可比的父亲去世了。直到这时为止，他无需为生计而工作。他的好光景又继续了大约八年，1840年家庭破产了。雅可比在三十六岁上一无所有了，并且还必须供养他的母亲，因为她也破产了。

高斯一直在注视着雅可比的惊人的活动，不仅只是出于单纯科学上的兴趣，而且因为雅可比的许多发现与他自己年轻时的一部分发现是一致的，他从来没有发表过那些发现。据说他还亲自会见过这个年轻人：雅可比在1839年9月在马里安温泉度假后，

返回柯尼斯堡途中拜访过高斯(关于这次访问没有记载保存下来)。看来高斯似乎害怕雅可比的经济崩溃会对他的数学产生灾难性的影响,但是贝塞尔使他安心了:"幸运的是,这样一个天才是不会被摧毁的,不过我很希望他有金钱保证的安全感。"

失去财产,对雅可比的数学没有一点影响。他从来没有提过他的不幸,而是象以往一样,继续勤勉地工作。1842年雅可比和贝塞尔参加了在曼彻斯特举行的英国协会的会议,在那里,德国的雅可比和爱尔兰的哈密顿会晤了。继续哈密顿关于动力学的工作,并且在某种意义上完成这个爱尔兰人因为喜爱神出鬼没的东西(当我们讲到它的时候就知道它是什么了)而抛弃了的东西,将是雅可比的一项最大的光荣。

在他一生的这个时刻,雅可比突然想要变成一个比仅仅是数学家更有光彩的人物。为了在讲到他的科学生涯时不至于中断,我们在这里讲述这个优秀数学家在政治上唯一的一次不成功的冒险。

从1842年的旅行中回来的第二年,雅可比由于工作过度而彻底垮了。十九世纪四十年代,科学在德意志的进步是在一些小邦的仁慈的君主和国王的掌握之中,这些小邦后来联合成德意志帝国。雅可比的守护神是普鲁士国王,他似乎很重视雅可比的研究给王国带来的荣誉。因此,当雅可比病倒时,仁慈的国王便催促他去气候暖和的意大利度假,愿意休息多长时间就休息多长时间。雅可比在罗马和那不勒斯跟博查特(我们将在后面讲到维尔斯特拉斯时一起讲他)、狄利克雷一起度过了五个月以后,于1844年6月回到柏林。他现在得到允许,可以在柏林住到他的健康完全恢复,但是由于一些人的妒嫉,他没有在大学得到教授职位,虽然作为一名科学院院士他可以讲授他选择的任何课程。此外,国王实际上

自己出钱，赠给雅可比一笔很大的津贴。

在国王方面的所有这些慷慨之举以后，人们原以为雅可比会继续坚持他的数学研究。但是由于他的医生极为愚蠢的劝告，他开始介入政治，认为"这对他的神经系统有好处。"还从来没有哪个医生给他无法诊断出疾病的病人开出过比这更愚蠢的处方呢。雅可比吞下了这剂药。当1848年争取民主的大动荡开始爆发时，雅可比从政的时机成熟了。在一个朋友的劝告下——顺便提一下，他碰巧是大约二十年前雅可比被提升超过的那些人当中的一个——这位没有经验的数学家步入了政界，恰如一个天真无知而又诱人地肥胖的传教士，踏上一个食人岛一样，他们抓住了他。

雅可比的那位花言巧语的朋友，介绍他加入一个温和自由派的俱乐部，他们选举他作为参加1848年5月大选的候选人。但是他从不了解议会的内部情况。他在俱乐部的口才使比较聪明的会员们相信，雅可比不适合作他们的候选人。看来完全有道理，他们指出，雅可比这个领取国王津贴的人，有可能是他现在自称的自由派，但是更可能是一个两面讨好的人，是个叛徒，是保王党人的密探。雅可比发表了一篇动人的讲话，驳斥这些卑劣的、含沙射影的攻击，这篇讲话充满了无可反驳的逻辑——却忘记了一个原则：逻辑，对一个讲求实际的政治家来说，是世界上最无用的东西。他们让他吊死在他自己的圈套上了。他没有当选。对他的候选人资格的叫嚣也没有使他的神经系统得到好处。这种叫嚣把柏林的啤酒店一直震动到地窖。

333

更糟糕的还在后面，谁能为了教育大臣在接着的5月询问雅可比的健康是否已经恢复、使他能够平安地回到柯尼斯堡，而指责教育大臣呢？或者谁会为了他从国王那里得到的津贴在几天后被停止而感到奇怪呢？说到底，当碰到恩将仇报时，即便是国王也是

可以发发脾气的。然而雅可比绝望的困境足以激起任何人的同情。他已经成家，实际上一文不名，他得养活妻子和七个小孩子。在戈塔的一位朋友收容了他的妻子和孩子，雅可比则隐居在旅店里一间肮脏的房间里面，继续他的研究工作。

他现在(1849年)四十三岁，除高斯以外，他是欧洲最伟大的数学家。维也纳大学听说了他的困境，开始设法把他搞去。在这件事情上，值得一提的是阿贝耳在威尼斯的朋友利特罗，在商谈中起了主要的作用。最后，在提出了明确而慷慨的条件时，亚历山大·冯·洪堡说服了怒气冲冲的国王；津贴恢复了，德意志得以保存了它的第二个伟大人物雅可比。他留在柏林，再次得宠，但肯定地从政治上抽身了。

雅可比作出他第一项伟大工作的学科是椭圆函数，已经给了这个学科适合它的地位的篇幅。因为毕竟它在今天大致只是单复变量函数更广泛的理论的一个细节，而单复变量函数的理论作为一项令人感兴趣的事物，正在逐渐退出不断变化的舞台。由于椭圆函数的理论在下面几章中还要多次提到，我们将对它显然不适当的突出地位简单说明理由。

单复变量函数理论是十九世纪数学的一个主要领域，对此没有任何数学家会提出异议。这个理论之所以具有如此重要性的原因之一，可以在这里重复一下。高斯已经指出，复数对于给每一个代数方程提供一个根，既是必要的又是充分的。可能有任何更一般类型的数吗？这样的数是怎样产生的呢？

334

代数把复数看作首先出现在解某些简单方程，如 $x^2+1=0$ 的尝试中，我们也可以在另一个初等代数的问题中看看它的起源，这个问题就是因式分解。为了把 x^2-y^2 分解成一次因式，我们不需

要比正负整数$(x^2-y^2)=(x+y)(x-y)$更神秘的东西。但是对于x^2+y^2的同样的问题，则要求“虚数”：$x^2+y^2=(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})$。在许多可能而公开的方向中的一个方向上再走一步，我们可以试着把$x^2+y^2+z^2$分解成两个一次因式。这样，正数、负数和虚数就够了吗？或者，为了解决这个问题必须发明某种新的“数”吗？后一条是对的。人们发现，为了得到必须的新“数”，普通代数规则被减少成了一个重要的细则：“数”乘在一起的次序无足轻重这一规则不再成立；也就是说，对于新数，$a\times b$等于$b\times a$不再成立。当我们讲到哈密顿时，关于这一点还要多说一些。暂时我们只指明，初等代数的因式分解问题，很快把我们引到了复数不适用的领域。

如果我们坚持全部普通代数规律对这些数都成立，我们能走多远？什么是可能的最一般的数？在十九世纪后半叶，人们证明了复数$x+iy$，其中x，y是实数，$i=\sqrt{-1}$，是使普通代数成立的最一般的数。我们回想起，实数相当于沿着一条固定的直线在任一方向（正向、负向），到一个定点测量的距离。在笛卡儿几何中函数$f(x)$的图形，按照$y=f(x)$画出来，给我们提供了实变量x的函数y的图形。十七、十八世纪的数学家认为，他们的函数就是这一类型的。但是如果他们应用于他们的函数的普通代数及其扩展微积分学，能同样应用于复数（它作为极端退化的情形包括了实数），那么，早期的分析学家们发现的许多东西，还不到可能存在的全部情形的一半就是很自然的了。特别是积分学提出了许多费解的不规则现象，这些现象只是到了运算领域被扩大到了最大可能的程度，复变量函数也由高斯和柯西采用了的时候，才得到消除。 335

不能过高估计椭圆函数在整个广阔的极为重要的发展中的重要性。在椭圆函数理论中，不可避免地要出现复数，高斯、阿贝耳

和雅可比通过他们对这一理论的广泛和详尽的阐述，为发现和改进单复变量函数理论中的一般定理，提供了一个试验园地。这两个理论似乎注定要互相补充和完善——这是有原因的，椭圆函数与二次形式的高斯定理的深刻联系，也是有原因的。不过对空间的考虑迫使我们放弃了二次形式的理论。在椭圆函数中出现的那些范围更广的定理的特例，为一般理论提供了数不清的线索，要是没有这些线索，单复变量函数的理论就会比实际发展慢得多——学数学的读者可以回想一下刘维尔定理、多重周期性的整个学科，以及它对代数函数及其积分的影响。如果十九世纪数学的这些伟大的纪念碑中，有一些已经退隐到过去的迷雾之中，我们只需提醒我们自己，皮卡尔的本质奇点领域内的例外值的定理，是首先用椭圆函数理论中产生出来的方法证明的。这个定理是流行的分析学中最有参考价值的一个。有了这个对椭圆函数在十九世纪的数学中所以重要的原因的部分概要，我们就可以论述雅可比在这个理论的发展中所起的主要作用了。

椭圆函数的历史是相当复杂的，虽然它在专家们看来是很有趣的，但不大可能引起普通读者的兴趣。因此，我们将略去下面的简单概要的证据(高斯、阿贝耳、雅可比、勒让德，以及其他一些人的通信)。

首先，确有实据的是，高斯早二十七年就预见到了阿贝耳和雅可比的一些最惊人的工作。高斯确实说过，“阿贝耳正是走的我在1798年走过的同一条道路。”任何研究过只是在高斯死后才发表的证据的人，都会承认这个断定是公正的。其次，人们似乎一致同意，阿贝耳在一些重要的细节上走在雅可比前面，但是雅可比在完全不知道他的竞争者的工作的情况下，作出了他的伟大开端。

椭圆函数的一个重要性质是它们的双周期性(阿贝耳在1825年发现的)：如果$E(x)$是一个椭圆函数，那么有两个特殊的数，比如说p_1，p_2，使得

$$E(x+p_1)=E(x),\quad E(x+p_2)=E(x)$$

对于变量x的一切值成立。

最后，在历史方面，勒让德所起的作用多少有些悲剧性质。他在椭圆积分(而不是椭圆函数)上拚命工作了四十年，却没有注意到阿贝耳和雅可比两人几乎立刻就看到的东西，那就是把他的观点颠倒过来，整个问题就变得无比简单了。椭圆积分首先出现在求椭圆的一段弧长这个问题中。对于我们在谈到阿贝耳时所说的关于逆反的话，可以加上下面的符号说法。这将更清楚地说明勒让德错过的要点。

设$R(t)$表示一个t的多项式，如果$R(t)$是三次或四次的，具有符号为

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{R(t)}}\,dt$$

的积分，就称为一个椭圆积分；如果$R(t)$的次数高于四次，这个积分称为阿贝耳积分(以阿贝耳的名字命名，他的一些最伟大的工作与这样的积分有关)。如果$R(t)$只有二次，积分可以很容易地用初等函数计算出来。特别有

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\sin^{-1}x,$$

($\sin^{-1}x$读作“一个正弦是x的角度”)，那就是说，如果

$$y=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

我们就把积分的上限x考虑成积分本身，即y的一个函数。问题的这个逆转，去除了勒让德与之奋斗了四十年之久的大部分困难。

在去掉了这个障碍以后，这些重要积分的真正理论几乎就自己冒出来了——就象把一根巨木拖出来以后，阻塞的浮木就顺流而下了。

337

当勒让德领悟了阿贝耳和雅可比所做的事情时，他最真心诚意地鼓励了他们，虽然他知道，他们的更简单的方法(逆转的方法)，使本应成为他自己四十年劳动的杰作毫无价值了。对于阿贝耳，哎，勒让德的赞扬来得太晚了，但是对于雅可比，它是一个使他超过他自己的鼓舞。在整个科学文献中的一段最美好的通信中，这个二十岁出头的年轻人和七十多岁的老手，极力要在衷心的赞扬和感激方面互相胜过对方。唯一不和谐的调子是勒让德对高斯的直言不讳的轻视和雅可比对他的有力的卫护。由于高斯从来没有放下架子发表他的研究结果——当阿贝耳和雅可比占先发表的时候，他已经计划要写一部关于椭圆函数的第一流的著作——几乎不能因为勒让德持一种完全错误的看法而责备他。因为篇幅所限，我们必须省略从这段美好的通信中摘出的部分(这些书信全文登载在雅可比的法文《著作集》的第一卷中)。

与阿贝耳一起创立椭圆函数理论，只是雅可比巨大的工作数量中的一小部分，但却是非常重要的一部分。只是列举在他不到二十五年的短短的工作生涯中，他取得成就的那些领域，就需要比本书这样用于写一个人的记述还要多的篇幅，所以我们只提一下他所作过的其他几项伟大工作。

雅可比是把椭圆函数理论用于数论的第一个人，这要成为一些追随雅可比的、最伟大的数学家们最喜爱的消遣。它是一个奇妙而深奥的课题，复杂难懂的巧妙的代数，在其中意想不到地揭示了普通整数之间迄今未曾料想到的关系。雅可比正是用这种方法

证明了费马的著名断言：每一个整数1, 2, 3, …… 都是四个整数的平方和(零也算作整数)，而且，他的精彩分析，使他知道任何已知的整数能以多少种方式表示成这样的和。①

对于那些比较着重实际的人，我们可以引证雅可比在动力学中的工作。在这个学科中，雅可比作出了在应用科学和数学两方面都具有根本的重要意义的、超出拉格朗日和哈密顿的第一次重大进展。熟悉量子力学的读者，会想起哈密顿-雅可比方程在那个革命性的理论的一些陈述中起的重要作用。他在微分方程中的工作开创了一个新时代。 338

在代数中，只需提及许多事情中的一件，那就是雅可比把行列式理论简化成了现在每一个学习中学代数课程的学生都熟悉的简单形式。

对于牛顿-拉普拉斯-拉格朗日的引力理论，雅可比出色地研究了该理论中反复出现的函数，并把椭圆函数和阿贝耳函数应用到椭球间的引力上，从而对引力理论作出了重大的贡献。

他在阿贝耳函数中的伟大发现，具有程度更高的独创性。这样的函数产生于一个阿贝耳积分的逆反中，正如椭圆函数产生于椭圆积分的逆反。(技术性的术语已经在本章注释过了。)这里他无路可循，有好长时间他在毫无线索的迷宫中迷失了方向。适当的反函数在最简单的情形下是两个变量有四个周期的函数，在一般情形，函数有n个变量，$2n$个周期；椭圆函数相当于$n=1$。这个发现之于十九世纪的分析学，恰如哥伦布发现美洲之于十五世纪的地理学。

雅可比没有象他那些懒惰的朋友们预计的那样，由于工作过

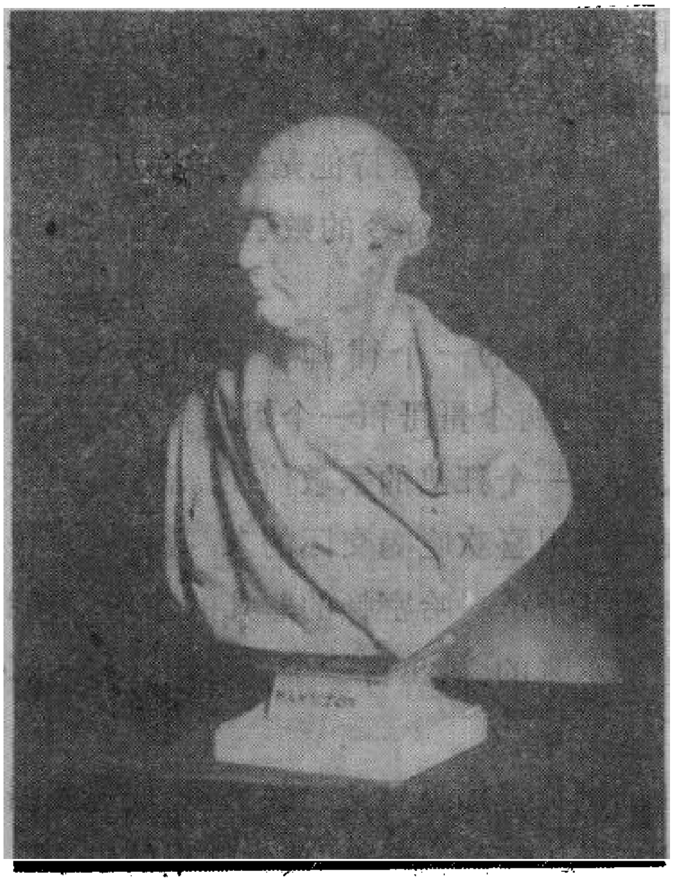
① 如果n是奇数，表示方式的数目是8乘以n的所有因子(1和n包括在内)的和；如果n是偶数，表示方式的数目是2φ乘以n的所有奇数因子的和。

度而早逝，而是在四十七岁时死于天花（1851年2月18日）。在离开这个宽宏大量的人时，我们可以引用他反驳伟大的法国数学物理学家傅里叶的话，傅里叶指责阿贝耳和雅可比两人把时间浪费在椭圆函数上，而同时在热传导中还有一些问题有待解决。

雅可比说："傅里叶先生确实有过这样的看法，认为数学的主要目的是公众的需要和对自然现象的解释；但是一个象他这样的哲学家应当知道，科学的唯一目的是人类头脑的光荣，而且应该知道，在这个观点之下，数的问题与关于宇宙体系的问题具有同等价值。"

如果傅里叶能够重见世事，他可能会对他为了"有益公众和解释自然现象"而发明的分析学的遭遇感到厌恶。今天就数学物理而言，傅里叶的分析只是广阔得多的边界值理论问题中的一个细目，傅里叶所发明的分析，正是在纯数学中最纯粹的部分找到了它的重要意义和它的正当理由。这些现代的研究者们是否给"人类的头脑"增加了光荣，可能要留待专家们去考虑了——倘若行动主义者们还留下了什么东西给人类的头脑增光的话。

339



哈密顿

第十九章　一个爱尔兰人的悲剧

哈　密　顿

> 在数学上他是伟大的，
> 超过了第谷·布拉赫或埃拉·佩特；
> 因为他用几何尺度
> 能量度啤酒瓶的尺寸。
>
> ——塞缪尔·布特勒

威廉·罗思·哈密顿是爱尔兰历史上最伟大的科学家。强调他

的民族，是因为在哈密顿那持续不断的活动后面有一个推动力，那就是他公开宣称，他渴望把他超人的天才用来为他的祖国增光。有人说他的祖先是苏格兰人。哈密顿本人坚持他是爱尔兰人，而要一个苏格兰人在爱尔兰最伟大、最善于辞令的数学家身上找出苏格兰的东西，肯定是很困难的。

哈密顿的父亲是爱尔兰都柏林的一个律师。1805年8月3日①，哈密顿就出生在那里，他有两个哥哥和一个姐姐。父亲是一个伶牙俐齿的第一流的生意人，一个狂热的宗教信徒，最后，但不幸并非最不重要的是，他是一个很喜欢吃喝交际的人，所有这些特点，他都传给他那很有天赋的儿子了。哈密顿的非凡的才华，可能是从他母亲萨拉·赫顿那里继承来的，她出自一个以聪明著称的家族。

在父亲方面，这位快活的酒徒摇摇晃晃地光临哪里，他那滔滔不绝的雄辩（不管是口头的还是笔头的）就使他成为哪里的中心。但是他的口才在威廉的叔父詹姆斯身上，却变成了一种不那么可靠的东西了。詹姆斯叔叔是离都柏林大约二十英里的特里姆村的副牧师，他实际上是一个很有造诣的语言学家——希腊文、拉丁文、希伯来文、梵文、闪族文、巴利语②，以及天知道是甚么外国方言，都象欧洲大陆和爱尔兰的比较开化的语言那样，从他的舌尖上脱口而出。在不幸的，但渴望学习的威廉早期所受的极端错误的教育中，这个通晓多种语言的人起了相当大的作用，因为威廉在三岁时已经显示出天才的迹象，这时他失去了溺爱他的母亲的爱抚，

341

① 他墓碑上的日期是1805年8月4日。实际上他是半夜出生的，因此造成生日的混乱。哈密顿在这些小事上十分讲求准确性，他把生日定为8月3日，晚年出于感情上的原因，他把生日改为8月4日。

② 古印度的一种语言，现已成为佛教的宗教语言。——译者

被他那有几分愚蠢的父亲打发到詹姆斯叔叔那里去，在他的专门教导下学习语言了。

哈密顿的父母对他的抚育成长没有甚么关系；母亲在他十二岁时去世，两年后父亲也去世了。对于把年轻的威廉的才智浪费在毫无用处的语言上，又在他十三岁时把他变成一个历史上最令人震惊的语言学怪物的一个例子，无论有甚么功劳都应归于詹姆斯叔叔。哈密顿没有在他误入歧途的牧师叔叔的教导下，变成一个令人不能忍受的道学先生，这证明他的爱尔兰常识基本是健康的。他所忍受的教育，很可能把一个甚至富于幽默感的孩子也变成一头蠢驴，而哈密顿没有幽默感。

关于哈密顿早期的才能的传说，读起来象一篇拙劣的虚构的故事，但它是真实的：他三岁时英语已读得非常好，算术方面也有相当进展；五岁时他能阅读和翻译拉丁文、希腊文和希伯来文，并喜欢朗诵德赖登、柯林斯、弥尔顿和荷马的大量作品，荷马的作品是用希腊语朗诵的。八岁时他已掌握了意大利语和法语，还能用拉丁文即兴创作。当英语散文体过于平庸，不足以表现他昂扬的情感时，他就用拉丁文的六韵步诗体，来表现他对爱尔兰美丽风光的由衷的喜悦。最后，他在不到十岁时开始学习阿拉伯语和梵语，为他在东方语言方面非凡的学术成就打下了坚实的基础。

哈密顿懂得的语言还不止这些。在威廉差三个月十岁时，他的叔叔报告说："他对东方语言的渴求是没有止境的。现在他掌握了除较小的地方方言以外的大部分语种，事实上是全部语种。希伯来语、波斯语和阿拉伯语将由熟悉梵文的高级人士来确定，他自己已经是一个梵文专家了。迦勒底语和古叙利亚语他正在受基本训练，还在学习兴都斯坦语、马来语、马拉他语、孟加拉语和其他语种。他即将开始学汉语，但是太难搞到书。我得花一大笔钱从伦

敦给他买书，但我希望钱花得得当。”对这番报告我们只能高举双手大喊，天啊！这一切有甚么意思呢？

威廉十三岁时，能够夸口说他生活的每一年都掌握了一种语言。十四岁时他用波斯文写了一篇词藻华丽的欢迎词，欢迎当时访问都柏林的波斯大使，并将它呈送给这位大为惊讶的有权势的人。年轻的哈密顿想扩大战果，造成强烈的印象，便前往拜会大使，但是那位狡猾的东方人，事先得到他忠实的秘书的警告，“很遗憾，由于剧烈的头痛，他不能亲自接见我[哈密顿]。”也许这位大使还没有从官方的宴会中清醒过来，否则他会读到那封信的。翻译过来，至少它是很糟糕的——正是一个自己非常之认真，又知道波斯诗人所有最困难、最夸大其词的章节的十四岁孩子所能想象出的那种东西，那种一个老于世故的东方人在一场狂热的爱尔兰式宴会之后，第二天早上会喜欢的提神剂。如果年轻的哈密顿真的想会见大使，他应该送一条腌鲱鱼，而不是一首波斯文的诗。

除了他惊人的能力，老成的谈吐，和对大自然种种形态的诗意的热爱以外，哈密顿和其他健康的孩子一样。他喜欢游泳，如果说多少有点令人不快的苍白，却全然没有书呆子的趣味。他性情和蔼，一贯安静，这在一个强健的爱尔兰少年倒是不寻常的。但是哈密顿后期表现出了他的爱尔兰气质，他向一个诽谤者——这个人把他叫做撒谎者——提出挑战，要进行生死决斗。但是这件事由哈密顿的助手和解了，因而威廉爵士不能算作一个大数学家决斗者。在其他方面，年轻的哈密顿不是一个正常的孩子，他不能忍受加在动物身上或人身上的痛苦。哈密顿终生喜爱动物，令人遗憾地难得的是他尊重它们，对它们平等相待。

哈密顿十二岁时开始对他无意义地献身无用的语言进行补救

并在他十四岁以前完成。上天选择来使哈密顿离开错误道路的卑微的工具，是搞计算的美国孩子齐拉·科尔伯恩(1804—1839)，他当时在伦敦的威斯敏斯特学校上学。科尔伯恩和哈密顿被带到一起，人们期望这个爱尔兰的天才能够识破美国孩子的方法的秘密，这些方法科尔伯恩本人也不完全了解(在费马一章中可见)。科尔伯恩非常坦率地向哈密顿透露他的窍门，哈密顿则对给他看的办法作出改进。关于科尔伯恩的方法，没有甚么深奥或值得注意的地方。他的功绩主要是个记忆的问题。哈密顿在他十七岁(1822年8月)时写给他的表兄阿瑟的一封信中，表达了对科尔伯恩的影响的谢意。

343

哈密顿在十七岁时，通过积分学掌握了数学，并获得充分的数学天文学知识，使他能够计算日月食。他攻读了牛顿和拉普拉斯的著作。所有这些都是他的消遣；古典文学依然是他认真研究的学科，虽然只是他的第二爱好。更重要的是，如他给他的姐姐伊莱扎的信中所说，他已经作出了“一些奇怪的发现。”

哈密顿提到的发现，可能是他的第一项伟大工作，关于光学中的光线系统的萌芽。这样，哈密顿在他生活的第十七个年头，已经开始了他重大发现的生涯。在这以前，他曾经发现拉普拉斯在试图证明力的平行四边形中的一处失误，因而引起都柏林大学的天文学教授布林克利博士的注意。

哈密顿进大学以前从未上过学，他所有的初级训练都得自他的叔父和依靠自学。他在准备都柏林大学三一学院的入学考试时，被迫专心攻读古典文学，这并没有占据他的全部时间，因为他在1823年5月31日写信给他的表兄阿瑟说，“在光学中，我作出了一项非常奇特的发现——至少我认为是那样的……”

如果正如人们料想的，这是指"特征函数"(哈密顿不久就会给我们描述)，那么，这个发现标志着它的作者堪与历史上任何真正早熟的数学家匹敌。1823年7月7日，年轻的哈密顿在一百名投考者中轻而易举地取得第一名，进入三一学院。他的名声先他而至，他很快就成为著名人士，这是意料之中的事。事实上，他在古典文学和数学方面的杰出才能，在他还是一个大学生时就已在英格兰和苏格兰以及爱尔兰的学术圈子中激起人们的好奇心。有人甚至宣称，第二个牛顿已经出现。关于他在大学肄业时获得成功的传说，是可以想象的——他实际上夺走了所有可以得到的奖励，而且在古典文学和数学这两方面都获得了最高荣誉奖。但是比所有这一切成就更重要的是，他完成了他的关于光线系统的划时代论文的第一部分的初稿。当哈密顿把他的论文提交爱尔兰皇家科学院时，布林克利博士说："这个年轻人，我不说他将要成为他这一代的第一位数学家，而是说他是他这一代的第一名数学家。"

甚至他为保持他光辉的学术记录而进行的吃力的、单调乏味的工作，以及更有用地花在工作上的时间，都没有能耗尽年轻的哈密顿那过份充沛的精力。十九岁时，他经历了他的三次严肃的恋爱中的第一次。威廉意识到他自己的"不配"——特别是关系到他的物质前景——于是满足于给那位年轻小姐写写诗，通常的结局是：一个比较平庸的军人娶了这个姑娘。1825年5月初，哈密顿从他爱人的母亲那里得知，他心爱的人已嫁给他的情敌。他所经受的打击，从下述事实可以看出一些：哈密顿是一个虔信宗教的人，对他说来，自杀是一件该罚入地狱的重罪，而他竟打算投水自尽。后来他用另一首诗减轻了自己的悲痛，这对科学来说，是一件幸事。哈密顿一生都是一个多产的打油诗人。但是他真正的诗，如他对他的朋友和热忱的爱慕者威廉·华滋华斯说的，是他的数

学。这点没有哪个数学家会不同意。

这里我们可以谈谈哈密顿与他当时的一些文学界的灿烂明星，被称为湖畔派的诗人华兹华斯、索瑟伊和科勒里奇，奥布里·德·维尔以及说教的小说家玛丽亚·埃奇沃思——一个完全符合哈密顿本人虔诚的心意的女作家——的终生友谊。华滋华斯和哈密顿是在1827年9月哈密顿去英国的湖畔区旅行时初次认识的。哈密顿在陪伴华滋华斯喝茶后，和这位诗人来来回回地走了一晚上，双方都拼命要把对方送回家。第二天哈密顿送给华滋华斯一首九十行的生硬的诗。这首诗，诗人本人可能在一次诗性焕发时歌唱过。华滋华斯当然不喜欢这个热心的年轻数学家不自觉的剽窃，他在略加称赞之后，开始详细地告诉这位满怀希望的作者，“写诗的工艺（对于这位年轻的作者还能指望别的什么呢？）不应该是这样的。”两年以后，当哈密顿已经在邓辛克天文台担任天文学家时，华滋华斯回访了他。哈密顿的姐姐伊莱扎，在介绍给诗人时，感到她本人“不自觉地模仿他的诗《参观欧蓍草》的最初几行——

> 这就是华滋华斯！就是这个人
> 我的想象孕育了
> 那么忠实的一个清醒的梦，
> 一个消失了的形象！”

从华滋华斯的拜访中产生的一件大有益处的事是：哈密顿终于认识了“他的道路必须是科学的道路，而不是诗；他必须抛弃修习两者的一贯希望，因此，他必须下定决心，痛苦地向诗歌告别。”一句话，哈密顿抓住了明显的真理，那就是从文学的意义上讲，他身上一丁点儿诗的才气也没有。然而，他一生都在继续不停地写诗。华滋华斯对哈密顿的才智评价很高。事实上，他宽厚地说（实际上）在他认识的人当中，只有两个人给了他一种低人一等的感

觉，那就是科勒里奇和哈密顿。

哈密顿直到1832年才遇到科勒里奇，当时这位诗人实际上已经什么都不是了，只是一个平庸的德国形而上学家的假的翻版。然而各人都高度评价对方的才能，因为哈密顿长期以来就是康德著作原著的忠实学生。确实，哲学上的思考总是强烈地吸引着哈密顿，他曾经一度声明他自己是贝克莱的失去生命力的唯心主义的忠实信徒——智力方面的，而不是内部的。他们两人之间的另一个结合力是他们都一心想着哲学的神学方面(假如有这样一个方面的话)，科勒里奇还以他对三位一体的一知半解的反复思考而博得哈密顿的赞赏。这位虔诚的数学家对这方面是十分重视的。

哈密顿在三一学院的大学生涯的结束，比它的开始还要更令人惊奇；事实上它在大学历史上是独一无二的。布林克利博士辞去他的天文学教授职位，就任克洛因的主教。按照英国通常的习惯，就空出的席位登了广告，几位著名的天文学家，包括后来的英国皇家天文学家乔治·比德尔·艾里(1801—1892)，都送来了他们的证书。经过讨论以后，理事会放弃了所有的申请者，一致选举当时(1827年)二十二岁的大学生哈密顿为教授。哈密顿没有申请过。现在，“他面前是金光大道”，哈密顿决心不辜负他的热情的选举者们的希望。自从十四岁起，他就热爱天文学，还在童年时代，他有一次指着俯瞰着一片美丽景色的邓辛克小丘上的天文台说，要是他能任意选择的话，那就是他最愿意住的地方。现在，他在二十二岁时可以实现他的抱负了，他需要的只是一往直前。

他开始干得很出色。虽然哈密顿不是实际的天文学家，虽然他的观测助手并不称职，但是这些缺陷都不严重。邓辛克天文台就其位置而言，永远不能在现代天文学中崭露头角。哈密顿明智地

346

把他的主要努力用在他的数学上。在二十三岁时，他发表了他还是一个十七岁的孩子时做出的那些"奇怪的发现"的完成形式，即《光线系统理论》第一部分，这是一篇伟大的杰作，它对于光学，就象拉格朗日的《分析力学》之于力学。它在哈密顿自已手里被扩展到动力学，用它那也许是最终的、完善的形式来表述那门基础科学。

哈密顿在他这第一篇杰作中用于应用数学中的一些方法，今天在数学物理中是不可缺少的，理论物理一些特殊分支的许多工作者的目标，正是把整个理论概括成哈密顿原理。这篇杰出的著作使得雅可比在十四年后，在英国协会 1842 年于曼彻斯特举行的会议上，宣称"哈密顿是你们国家的拉格朗日"。——这里国家是指讲英语的民族。由于哈密顿本人费了很大的力气用非专业人员所能理解的语言描述他的新方法的实质，我们引用他自己 1827 年 4 月 23 日提交爱尔兰皇家科学院的摘要：

"光学中的一条光线，在这里被认为是一条直线或弯线或曲线，光沿着它传播；光线系统被认为是这些线的一个集成或聚集，由某种共同的联结、某种起源或产生的相似性，一句话，由某种光学整体结合在一起。因此，从一个发光点发出的光线组成一个光学系统。当它们在镜子上反射出来以后，它们组成另一个光学系统。研究一个系统的光线的几何关系，对该系统(如在这些简单的情形）我们知道光学的起源和历史，要探究它们之间是怎样配置的，它们怎样发散或聚合，或成为平行的，它们以什么样的剖面角切触，或相交于什么样的曲面或曲线，它们怎样能结合成单独的光束，怎么能决定每一根特别的光线，并把它与其它的光线区分开来，这就要研究光线系统。要扩大这种系统的研究，以便能够不改变计划，过渡到其它系统的研究，要确定一般的规则和一个一般方

347

法，通过它们可以把这些孤立的光学装置结合和协调到一起，就得形成光线系统理论。最后，要以能够应用现代数学的力量的方式做到这些，用函数代替图形，用公式代替图表，就要构造这些系统的代数理论，或者代数对光学的应用。

"为构造这样一个应用，自然要运用，或更准确地说，必须运用笛卡儿为把代数应用于几何所采用的方法。那个伟大的哲学家式的数学家，设想出用三个坐标数以代数方法表示或表达空间中任何点的位置的可能性，并实现了这个计划。这三个坐标数分别回答了点在三个垂直方向上(例如北、东、西)距离某个固定点、或为此目的选出或指定的原点有多远；因此，空间的三维得到了在一般科学进展[顺序]中它们的三个代数等价，它们的适当的概念和记号。这样，指定联系一张平面或曲面上的任意点的三个坐标，且为所有那些点共有的关系为它的方程，这个面就成为代数定义的了；一条线，不论直线或曲线，可以按照同样的方法表示，通过指定两个这样的关系，它们相应于两张曲面，直线可以看作它们的交。以这种方式，通过相应于三个可变数之间的方程的一般研究为中介，进行关于曲面和曲线的一般研究，发现全体共有的性质就成为可能的了；每一个几何问题至少能够被代数表示，即便不是能立即解答的，每一个代数中的改进或发现成为能够在几何中应用或说明的。空间和时间的科学(这里采用我在其他地方大胆提出的对代数的一种看法)成为相互之间密切交织在一起，牢不可破地联系在一起了。从此以后，改进一个学科而不改进另一个学科几乎是不可能的。给曲线画切线的问题导致了流数或微分学的发现；那些求长和求积的问题导致了积分学的反演；曲面和曲率的研究要求偏微分的微积分学；等同问题导致变分学的形成。反过来，代数科学中的所有这些伟大的步骤，都有对几何的直接应用，导致了点或

348

线或面之间的新关系的发现。但是即使这个新方法的应用不是如此多样和重要，也仍然会有把它作为一个方法在沉思中派生出来的高度智慧的乐趣。

“这个坐标的代数方法对光学系统的第一个重要应用，是由拿破仑在埃及的军队中的一名法国工程军官马吕作出来的，他在物理光学史上作为由于反射的光的偏振的发现者而知名。马吕在1807年提交法国科学院一篇深刻的数学著作，它是上面提到的那种类型的，题目是《光学专论》。在那篇论文中所运用的方法，可以这样来描述——任何最终光学系统的一条直的光线的方向，都被认为是按照某个特殊系统的特征，并把它与其他系统区分开来的规律；依靠这根光线上某个指定点的位置而定的。这个规律可以用代数方法表示出来，办法是给这条光线上的另外某个点的三个坐标确定三个表达式，表达成所提出的点的三个坐标的函数。马吕由此使用了表示这三个函数（或至少等同于这些函数的三个函数）的一般符号，通过非常复杂但对称的计算，着手得出了几个重要的一般结论；许多这样的结论，连同许多其他的结论，后来我自己也得到了，那时我并不知道马吕做过的工作，用了几乎同样的方法，开始了我自己把代数应用到光学的尝试。但是我的研究不久就引导我用一个很不相同的（我相信我已经证明了）、对于光学系统的研究更加适合得多的方法，代替了马吕的这个方法。由于这个方法不需用上面提到的三个函数，或至少它们的两个比，只用一个函数就足够了，我称这个函数为特征函数，或原理函数。这样，他通过设置一根光线的两个方程作出了他的推理，我则在另一方面，建立和使用了一个系统的一个方程。 349

“我为了这个目的而使用的、并作为我在数学光学中的演绎法的基础的这个函数，在另一点上，呈现在以前的作者们面前，就象

是表达了那门科学中非常高深、广博的归纳的结果。这个已知结果通常称为最小作用量规律，但是有时也称为最短时间原理[见费马那一章]，它包括以前发现的关于那样一些规则的一切，这些规则决定了光沿着它们传播的线的形式和位置，以及由寻常的或不寻常的反射或折射所产生的那些线的方向的改变[后一种改变就如在一个双折射晶体，比如说冰洲石中那样，一条光线在进入这样一个晶体时，会分解成两条，两条都发生折射]。一个定量在一种物理理论中是作用，在另一种物理理论中是时间，光在从任意第一个点传到任意第二个点中消耗着它，如果光走的是它的实际路径以外的任何其他路径，或者至少有着技术上所说的它的变分核，路径的两端不变，那么人们发现这种量就减少了。我的方法的数学新意，在于把这个量考虑成这些端点的坐标的函数，按照我称为变化作用量规律的规律，当坐标变化时，作用也变化；还在于把所有关于光线的光学系统化简成对这一个函数的研究：在一个全新的观点下呈现数学光学的化简，一个类似于[如我认为]笛卡儿呈现代数对几何的应用方面的化简。”

无需给哈密顿的这个说明添加什么了，也许可以加上这样的评论：任何科学，不论怎样详细地解释，都不会象任何一本小说那样容易理解，不管这本小说写得多么糟糕。整个摘要读第二遍时会有收获。

在这个关于光线系统的伟大工作中，哈密顿建立了比他所知道的更多的东西。在上述摘要写出后几乎恰好一百年，人们发现哈密顿引进光学的方法，正是与现代量子理论和原子结构理论相联系的波动力学中所要求的东西。可以回想牛顿偏爱一种发射的、或微粒的光学理论，而惠更斯和他的几乎直到我们这一代的追随者们，试图利用波的理论来解释光的现象。两种观点在现代量

350

子理论中结合在一起,并在纯数学意义上协调了起来,现代量子理论形成于1925—1926年。1843年,哈密顿二十八岁时,实现了他把引入光学的原理扩展到整个动力学的抱负。

哈密顿的光线理论在它的作者只有二十七岁时发表,不久就取得了任何数学杰作所能取得的最快、最惊人的成就。这个理论旨在讨论实在的物理世界的现象,就象在日常生活和科学实验室中观察到的那样。除非任何这样的数学理论能够作出后来为实验证实的预测,否则它不比它所系统化的学科的一本简明词典更好,而且它肯定很快就会被更富于想像力的、不是一目了然的描写所代替。在那些证明了物理科学中真正的数学理论的价值的著名预测中,我们可以回想起三个:由约翰·库奇·亚当斯(1819—1892)和于尔班-让-约瑟夫·勒韦里埃(1811—1877)通过按照牛顿万有引力理论,分析行星天王星的摄动,在1845年独立地,而且几乎同时作出的数学发现;由詹姆斯·克拉克·麦克斯韦(1831—1879)作为他自己的光的电磁理论的结论,在1864年作出的无线电波的预测;最后,爱因斯坦在1915—1916年由他的广义相对论作出的光线在引力场中偏转的预测,这个预测在有历史意义的1919年5月29日,首次由对日食的观测证实;他的预测(也是出自他的理论):由巨大的物体产生的光的光谱线会移动一个量,爱因斯坦说是向光谱的红色一端移动一个量,也得到了证实。这些例子的后两个——麦克斯韦的和爱因斯坦的——具有与第一个例子不同的种类:这两个例子用数学方法预测了完全未知和意料之外的现象,那就是说,这些预测是定性的。麦克斯韦和爱因斯坦两人用精确的定量预测加强了他们的定性预见;这些定量预测当他们的预言最终为实验证实时,就排除了任何认为仅仅是猜测的指责。

哈密顿对光学中之称为锥形折射的预测,是这种同样的定性

351 加定量的类型。从他的光线系统理论，他在数学上预测，与光在双轴晶体中的折射相联系，会发现一个完全出乎意料的现象。他在琢磨他关于光线的论文的《第三个补充》时，有一个发现使他自己吃了一惊，他这样描述这个发现：

"光线在普通镜子上的反射规律，看来欧几里得是知道的。光线在水、玻璃，或其他非晶体介质表面的普通折射规律，是由斯内利厄斯在晚得多的时候发现的；惠更斯发现马吕证实了由单轴晶体，诸如黄玉或霰石，表面的特殊的双折射规律，是在我们这一代由菲涅尔发现的。但是甚至在这些特殊的或晶体的折射中，也只有不超过两条折射光线被观察到或被怀疑存在，如果我们把柯西的一个理论除外，那么有可能会有第三条光线，虽然我们的感觉也许觉察不到它。然而，哈密顿教授在用他的一般方法研究菲涅尔规律的结果时，得出了这样的结论：在一些情形下，在一个双轴晶体内，相应于或产生于单独一条入射线，应该有不只两条，也不只三条，也不只任意有限多条折射光线，而是有无穷多条，或者是折射光线的一个锥；在其它一些情形，在这样一个晶体中的单独一条光线会产生无穷多条突然出现的光线，排列在另外某个锥中。因此，他由理论预见到光的两个新规律，他给它们命名为内部和外部锥形折射。"

这个预测以及它由汉弗莱·劳埃德作出的实验所证实，使年轻的哈密顿从那些能够欣赏他所做出的工作的人那里博得了无限的赞扬。从前与他竞争天文学教授职位的对手艾里，这样估计哈密顿的成就："也许迄今为止所作出的最值得注意的预测，就是最近由哈密顿教授做出的了。"哈密顿自己认为这个预测象任何类似的预测一样，比起他心目中的宏伟目标，是一个"次要的、二流的结果，"他的目标是"给被视为纯科学的一个分支的光学的思考和

推理，引进协调和一致。"

按照一些人的看法，这个惊人的成功是哈密顿事业的顶点；在这项关于光学和动力学的伟大工作之后，哈密顿衰落了。另外一些人，特别是被称为四元数的高教会派的成员们，认为哈密顿的最伟大的工作还未作出——这就是创造他的四元素理论，哈密顿本人认为这是他的杰作，而且是使他得以不朽的杰作。暂且把四元素放在一边，我们可以简单地说，从他二十七岁直到他六十二岁去世为止，有两个灾难给哈密顿的科学事业带来了严重的破坏，那就是结婚和酒精。酒精是不幸的婚姻的部分结果，但不是全部结果。 352

哈密顿第二次不幸的恋爱以一句轻率的话结束了，这句话并没有什么意思，但是这位敏感的求婚者却对它耿耿于怀，在这以后，他于1833年春和他的第三个意中人海伦·玛丽亚·贝利结婚了。他当时是二十八岁。新娘是一个乡村牧师的寡妇的女儿。海伦有"讨人喜欢的、象贵妇人似的外貌，很早便以她诚实的天性和他知道她会具有的宗教原则，给他[哈密顿]留下了好印象，虽然对这些介绍没有加上什么容貌非常漂亮或聪慧。"现在，如果一个傻瓜要如实地介绍她的话，任何一个傻瓜都能说明真实情况，不论谁和她结婚，都将处于轻率从事的劣势一方。1832年夏天，贝利小姐"患了一场重病，……这件事无疑把他[失恋的哈密顿]的心思吸引到她那方面，为她的康复而焦虑不安，而且，这件事发生在这样的时候[当时他刚刚和他真正心爱的姑娘决裂]，他感到不得不克制他原来的热情，为比较温柔的，温暖的感情铺平道路。"总而言之，哈密顿是完全被一个病弱的女性给钩住了，这个女性的后半生将成为一个半残废，她或者是由于无能，或者是由于身体太差，让

她丈夫的懒散的仆人们随心所欲地管理家务，至少在这个家的某些部分——特别是他的书房——脏乱得象一个猪圈。哈密顿需要一个有坚强意志的、富于同情心的女人支持他，把他的家务管理得井井有条，但是他得到的却是一个病弱的人。

哈密顿在婚后十年震惊地认识到他在走着一条下坡路，于是试着从滑坡上停下来。作为一个年轻人，在宴会上大吃大喝，他相当放纵自己，特别是他那天生的口才和爱吃喝玩乐的性格，在一两杯酒下肚以后，就很自然地变本加利了。在他结婚以后，吃饭不规则，或者根本就没有饭吃，加之他那不休息地连续工作十二小时或十四小时的习惯，他只能依靠酒瓶来补充营养。

353

适当地纵酒究竟是加速还是妨碍数学上的创造能力，这是一个有争议的问题，在进行一套有控制的彻底的试验来解决这个问题以前，必须让这个疑问继续存在，恰如在任何其他生物学的研究中一样。有人认为，假如诗的创造与数学的创造是相似的，那么合理的酗酒(假如有这种情况的话)显然决不会破坏数学上的创造能力。事实上，许多充分证实了的例子说明情况恰恰相反。当然，在诗歌方面，"酒和歌"常常是连在一起的，至少有一个例子——斯温伯恩——是没有酒，诗歌也就完全枯竭了。数学家们常常谈到长时间集中精力解决一个难题所引起的可怕的紧张，有人发现喝杯酒就会明显地松快下来。但是可怜的哈密顿很快就超过了这个阶段而变得漫不经心，不仅在他凌乱的书房里独自一人时是这样，在宴会厅里大庭广众之中也是如此。他在一次科学界的宴会上喝醉了。认识到是什么把他打垮了以后，他下决心永远不再喝酒，他的决心保持了两年。后来，在罗斯勋爵(拥有当时最大而最无用的望远镜)的花园里举行的一次科学会议上，他的老对手艾里叽笑他除了喝水什么也不喝。哈密顿让步了，从那以后便沉溺于饮酒——

超过了需要。这个不利条件仍然不能使他退出竞赛，不过，没有这个不利条件，他也许会走得更远，达到更大的高度，但是，他已到得够高了，还是让道德家去说教吧。

在考虑什么是哈密顿认为他的杰作以前，我们不妨简略地总结一下他所得到的主要荣誉。三十岁时，他在英国科学促进协会在都柏林的会议上担任一个有影响的职位，与此同时，纹章局官员命令他"跪下，哈密顿教授，"然后，用国剑拍他的双肩，命令他"起来，威廉·罗思·哈密顿爵士。"这是哈密顿一生中无话可说的几个场合中的一个。三十二岁时，他成为爱尔兰皇家科学院院长，三十八岁时，他从英国政府获得每年二百英镑的文官终身津贴，当时担任首相的是爱尔兰难以相处的朋友罗伯特·皮尔爵士。在这以前不久，哈密顿作出了他的重大发现——四元数。 354

他在临终时获得的最后一项荣誉，比以往获得的任何荣誉都更使他高兴，这就是他被选为美国国家科学院第一位外籍院士。科学院是在内战期间成立的。这项荣誉主要是对他在四元数上的工作的重视。由于某种深奥难测的原因，这项工作比牛顿的《原理》以来的任何其他英国数学成就，更深刻地打动了当时的美国数学家（当时只有一两名数学家，哈佛大学的本杰明·皮尔斯是主要的一位）。四元数在美国很早享有盛名多少是一个谜。或许是《四元数讲义》的浮夸的雄辩投合了这个年轻的、朝气蓬勃的国家的胃口，这个国家还没有丢掉它对议院演讲的可怕的嗜好和七月四日①的才气焕发的热烈赞词。

四元数的历史太长，不能在这里讲述这整个故事，甚至高斯在

① 美国独立纪念日。——译者

他1817年的预测，也不是这个领域中的第一个；欧拉以一个孤立的结果先于高斯，这个结果用四元数解释最为简单。四元数的起源甚至可以追溯得更远，因为奥古斯塔斯·德·摩根有一次半开玩笑地提出，要为哈密顿把它们的历史从古印度追溯到维多利亚女王时代。不过，我们在这里只需要看看这个发现中的主要部分，简略地考虑一下鼓励了哈密顿的是什么。

英国学派的代数学家，象在布尔那一章中会看到的那样，在十九世纪上半叶把普通常用代数建立在它自己的基础上。他们预见到了在谨慎和严格地发展数学的任何分支中现在所接受的步骤，在公设上建立了代数。在此之前，当假定所有的代数方程都有根时，进入数学的各种各样的数——分数、负数、无理数——都被允许在与普通正整数同样的基础上起作用，由于习惯，普通正整数是如此之陈旧，以致所有的数学家们都认为它们是“自然的”，在某种含糊的意义上是完全理解了的——实际上它们并非如此，甚至在今天也不是这样的，这点当我们讲到乔治·康托尔的工作时就会看到了。对于一个建立在数学符号的盲目的、形式上的花招上的体系，这样天真地相信它的一致性，可能是令人崇敬的，但也有点愚蠢。这种轻信在声名狼藉的形式的永久原理中达到顶点，这个原理实际上是说，一组对于一类数——比如说正整数——产生一致的结果的规则，当应用到任何其它类型的数——比如说虚数——时，甚至当结果还没有明确的解释时，也会继续产生一致性。这样信任无意义的符号的完美，常常导致荒谬，看来这是不足为奇的。

英国学派改变了这一切，虽然他们还不能迈出最后一步，证明他们对于普通代数的公设永远不会导致矛盾。那一步只是到了我们这一代，才由德国工作者在数学基础中完成了。在这一点上必须牢记，代数只讨论有限过程，当无穷过程进入时，例如当无穷级

数求和时，我们就越出代数，而进入另一个领域了。强调这一点是因为通常的初等教科书标明的“代数”，包含许多在代数这个词的现代意义上不是代数的东西——例如，无穷几何级数。

哈密顿在四元数的创造中所做的事情的性质，在对普通代数的一组公设（取自 L.E. 迪克森的《代数及其算术》，芝加哥，1923年），或者象专门术语说的域（英国作者有时用 corpus［体］作为德文的 körper 或法文的 corps 的同义词）的背景下，表现得更为清楚。

“一个域 F 是包含一个元素为 a, b, c…… 的集合 S 和两个运算的系统，这两个运算称为加法和乘法，可以实施到 S 的任意两个（相等的或不同的）元素 a 和 b 上，按照这样的顺序，S 的唯一决定的元素 $a\oplus b$ 和 $a\odot b$，使得公设 I—V 得以满足。为简单起见，我们写 $a+b$ 代替 $a\oplus b$，ab 代替 $a\odot b$，分别称它们为 a 和 b 的和与积。此外，称 S 的元素为 F 的元素。

“I. 如果 a 和 b 是 F 的任意两个元素，那么 $a+b$ 和 ab 是 F 的唯一决定的元素，并且

$$b+a=a+b,\ ba=ab。$$

“II. 如果 a, b, c 是 F 的任意三个元素，

$$(a+b)+c=a+(b+c),\ (ab)c=a(bc),\ a(b+c)=ab+ac。$$

“III. F 中存在两个不同的元素，记为 0 和 1，使得如果 a 是 F 的任意元素，那么 $a+0=a$, $a1=a$（由 I，因此 $0+a=a$, $1a=a$）。　356

“IV. 不论 F 的元素 a 是什么，总存在 F 中的一个元素 x，使得 $a+x=0$（由 I，因此 $x+a=0$）。

“V. 不论 F 的元素 a 是什么，总存在 F 中的一个元素 y，使得 $ay=1$（由 I，因此 $ya=1$）。”

整个普通代数就是由这些简单的公设推导出来的。关于一些论断的一两句话，可能有助于那些多年没有读过代数的人。在 II 中，论断$(a+b)+c=a+(b+c)$，称为加法的结合律，表示如果 a 和 b 相加，再给这个和加上 c，那么结果与 a 加上 b 与 c 的和相等。对于 II 中的第二个论断，就乘法来说也是类似的。II 中的第三个论断称为分配律。在 III 中，公设了“零”和“单位”；在 IV 中，公设的 x 给出 a 的负数；V 中的第一个括号中注明禁止“用零除”。公设 I 中的要求分别称为加法和乘法的交换律。

这样一组公设可以认为是经验的浓缩。许多世纪运用数和根据算术规则得到有用的结果——凭经验得到——这种做法启发了包含在这些精确的公设中的大多数规则，但是一旦懂得了经验的启发，由经验提供的解释（这里是普通算术的）就故意地被隐瞒或忘记了。由公设定义的系统是由普通逻辑加上数学的机智，在它自己的价值上抽象地发展起来的。

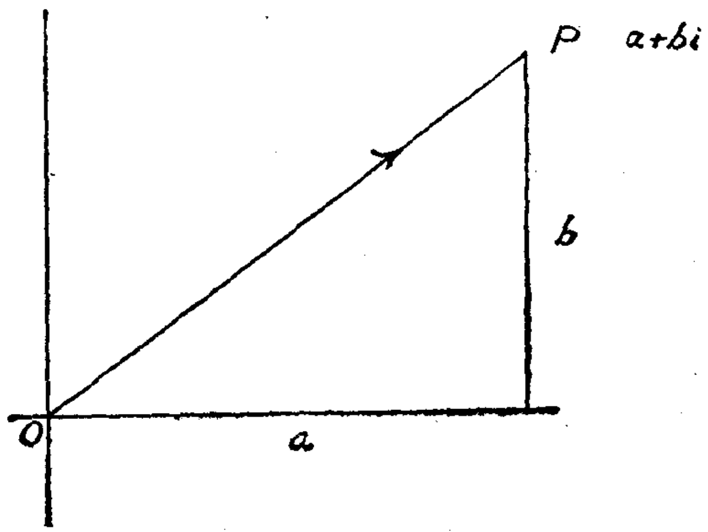
特别要注意 IV，它公设负数的存在。我们并不企图从正数的性态推断出负数的存在。当负数在经验中首次出现时，就象在借方而不是贷方那样，它们作为数，被认为是与后来的虚数$\sqrt{-1}$，$\sqrt{-2}$等等“不自然”的怪物一样可憎的东西。这些虚数产生了诸如 $x^2+1=0$，$x^2+2=0$ 等等方程的形式解。如果读者回顾一下高斯为复数所做的，他就能够更充分地欣赏下面这部分陈述的简单扼要，这个陈述是关于哈密顿剥去“虚数”愚蠢的、纯虚构的神秘性的独创方法的。这个简单的东西是把哈密顿引导到他的四元数的步骤之一，虽然严格说来它与四元数毫无关系。它是对于结局有重要意义的复数代数的这种巧妙重建背后的方法和观点。

如果象通常那样，i 表示$\sqrt{-1}$，那么一个“复数”是一个 $a+bi$ 类型的数，其中 a，b 是“实数”，或者如果愿意的话，更一般地是

由上述公设定义的域F的元素。哈密顿不是把$a+bi$看作一个"数"，而是把它想象为"数"的一个有序数对。他把这个数对记为(a, b)。然后他着手把和与积的定义强加于这些数对上，就象从代数学家们操纵复数——好象普通代数的规律事实上对它们成立似的——的经验中升华出来的组合的形式规则所提示的那样。处理复数的这种新方法的一个优点在于：数对的和与积的定义被看作是在一个域中的和与积的一般、抽象的定义的例子。因此，如果证明了由公设为一个域定义的系统的一致性，那么无需再证明，就推断出对于复数和它们据以组合的通常规则的类似结论。叙述哈密顿把复数考虑为数对(a, b), (c, d)，等等的理论中和与积的定义就够了。

(a, b)与(c, d)的和是$(a+b, c+d)$；积是$(ac-bd, ad+bc)$。后一个中，减号象在域中那样；即在IV中公设的元素x由$-a$表示。域中的0, 1在这里相应于$(0, 0)$, $(1, 0)$。有了这些定义，就很容易证明哈密顿的数对满足对于一个域所陈述的全部公设。但是它们也符合对于复数运算的形式规则。因此，(a, b), (c, d)分别相应于$a+bi$, $c+di$，这两个的形式"和"是$(a+c)+i(b+d)$，相应于数对$(a+c, b+d)$。再有，$a+bi$, $c+di$的形式乘积产生$(ac-bd)+i(ad+bc)$，它相应于数对$(ac-bd, ad+bc)$。如果这种东西对某个读者是新的，那么再看一遍是值得的，因为它是现代数学消除神秘性的方法的一个例子。只要有一丝神秘性附着于某个概念上，那个概念就不是数学的概念。

哈密顿用数对处理复数以后，试图把他的设想扩展到三重数或四重数上。如果没有要完成什么的想法，这样一项工作当然含糊到了没有意义。哈密顿的目的是要发明一种代数，它对三维空间中的旋转起着复数、或他的数对之于二维空间中的旋转所起的 358



作用，这两个空间都象初等几何中那样是欧几里得空间。现在，可以认为一个复数 $a+bi$ 表示一个向量，那就是说，一个既有长度又有方向的线段，这在图中是很明显的，有方向的线段(用箭头表示)表示向量 OP。但是在试图把三维空间中向量的性态符号化，以保持在物理学、特别是旋转的组合中有用的向量的那些性质时，哈密顿被一个没有料到的困难阻挡了好些年。他很长时间甚至没有猜想到这个困难的真正特性。我们可以顺便看看他追循的一条线索。这个没有使他得到任何东西的线索——而他坚持它使他得到了什么——所以更值得注意，是由于它现在几乎被普遍视为一个谬论，或者充其量是一个形而上学的推测，在历史或数学经验中没有基础可言。

哈密顿反对他的英国同代人提倡的对代数进行纯抽象的、公设化的系统阐述，他试图把代数建立在一些"更实在"的基础之上，为了这个毫无意义的事业，他利用了他对康德把空间作为"一种纯形式的感觉直观"的错误见解——由非欧几何的创造所驳倒——的知识。确实，似乎不知道非欧几何的哈密顿，追随康德，相信"时间和空间是知识的两大源泉，各种各样先验的综合认识都能够由

它们得出来。在这方面，就我们对空间及其各种各样的关系的认识来说，纯数学提供了一个极好的例子。由于它们都是纯形式的感觉直观，它们反映了综合命题的先验可能。”当然，今天任何不是完全无知的数学家都知道，康德的这个数学概念是错误的，但是在十九世纪四十年代，当哈密顿在接近四元数途中时，康德的数学哲学对那些没有听说过罗巴切夫斯基的人——几乎是所有的人——仍然有意义。哈密顿用看上去象是糟糕的数学双关的东西，把康德的学说应用于代数，得出了奇怪的结论：由于几何是空间的科学，由于时间和空间是“直观的纯感觉形式”，因此数学的基本部分必须属于时间，而且他把自己的大部分时间浪费在推敲希奇古怪的学说，即代数是纯时间的科学上。

这个古怪的想法吸引了很多哲学家。就在不久以前，在数学的胆囊中寻找哲学家的结石的愚蠢的形而上学家们，还发掘并认真地剖析了它。正因为“代数作为纯时间的科学”根本不具有数学意义，它将继续被活跃地讨论，直到时间本身结束为止。一位大数学家关于代数的“纯时间”方面的看法，可能是有趣的，“我本人无法理解代数与时间的联系，”凯莱承认，“就算不断进步的概念出现了，并具有重要意义，我也看不出它在任何方面会是科学的基本概念。”

哈密顿在试图构造对于三维空间的向量和旋转的代数中所碰到的困难，根源在于他下意识地确信，普通代数最重要的规律必定继续存在于他寻找的代数中。三维空间中的向量是怎样被乘在一起的呢？

为了领悟这个问题的困难，必须牢记（见高斯那一章）普通复数 $a+bi(i=\sqrt{-1})$ 得到了一个按照平面上旋转的简单解释，还有复数遵守普通代数的所有规则，特别是乘法交换率：如果 A，B　360

是任意复数，那么 $A\times B=B\times A$，不管 A, B 是按代数解释的，还是按平面上的旋转解释的。那么，预测同一种交换律对于表示三维空间中的旋转的复数的推广也成立，就是合乎人情的了。

哈密顿的伟大发现——或发明——是一种代数，是三维空间中的旋转的"自然"代数中的一种，交换律在其中不成立。在这个四元数的(他这样称他的发明)哈密顿代数中，出现了一种乘法，其中 $A\times B$ 不等于 $B\times A$，而是等于负的 $B\times A$，即 $A\times B=-B\times A$。

能够不顾乘法交换律构造出无矛盾的、实际有用的代数系统，这是第一流的，也许可以和非欧几何思想的形成相比美的发现。有一天(1843 年 10 月 16 日)，哈密顿和他的妻子出去散步，走到一座桥上时，他在石头上刻下了新代数的基本公式，经过十五年徒劳的思索之后，一下子清楚了，这件事的重要性给哈密顿留下了极为深刻的印象。他的伟大发现直到今天仍然指引着代数学家们通往其它代数的道路，实际上数学家们步哈密顿的后尘，通过对域否定一个或更多的公设并发展其后果，而随意创造出代数。这些"代数"中有的极其有用；包含这许多代数的一般理论，也包括哈密顿的伟大发明，仅只是一个细目，尽管是一个很重要的细目。

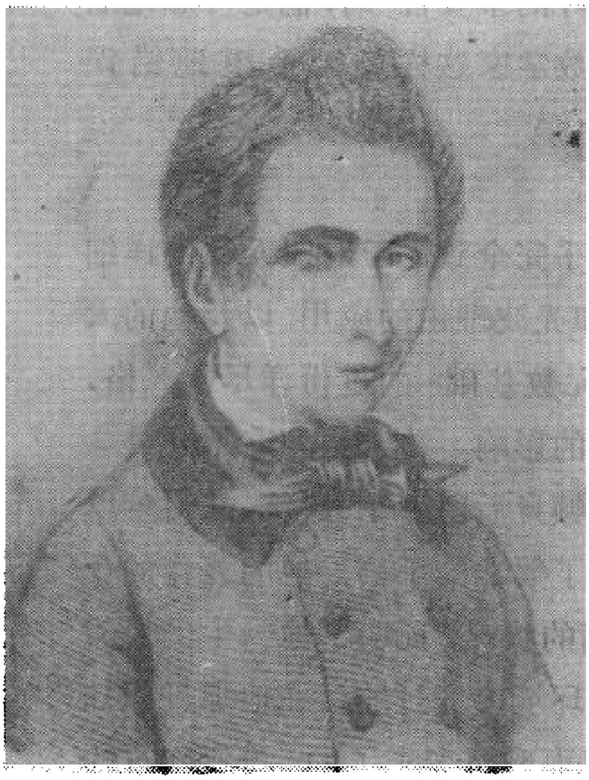
按照哈密顿的四元数，涌现出了过去的两代物理学家们所喜爱的各种向量分析。今天，所有这一切，包括四元数，只要是与物理的应用有关的，都被 1915 年与广义相对论一起开始流行的、无比简单和普遍的张量分析撇在一边了。关于这点后面还要谈到。

在这同时，说明下面这一点就足够了：哈密顿最深刻的悲剧既不是酒精，也不是他的婚姻，而是他顽固地相信，四元数是解决物质宇宙的数学的关键。历史已经表明，当哈密顿坚持"……我仍然必须断言，我认为这一发现对于十九世纪中叶的重要性，正如流数

[微积分学]的发现对于十七世纪末叶的重要性"时，他是可悲地欺骗了他自己。从来没有一个伟大的数学家这样毫无希望地错误过。

哈密顿一生的最后二十二年几乎完全致力于对四元数的详细阐述，包括它们对动力学、天文学和光波理论的应用，以及他的大量通信。哈密顿去世后发表的《四元数基础》的过份详尽的风格，清楚地说明了它的作者的生活方式的影响。他于1865年9月2日死于痛风，这以后人们发现哈密顿身后留下了大量混乱得难以形容的文稿，和大约六十大本充满了数学的手稿，他的著作的令人满意的版本即将出版。他的文稿的状况，证明了他一生的最后三分之一时间是在怎样艰难的家庭环境中度过的：在他那堆积如山的文稿中，埋藏着无数的盘子，里面盛着变干了的、没有吃过的猪排；从杂乱无章的东西中，挖掘出了足够供应一大家人吃的饭菜。哈密顿在最后一段时间生活得象一个遁世者，对他在工作时塞给他的饭菜毫不理睬，沉溺在他的梦想中：他那卓越天才的最后一次巨大努力，将使他自己和他亲爱的爱尔兰得以不朽，将作为自牛顿的《原理》问世以来对科学的最伟大数学贡献而永远屹立。

他把他不朽的光荣赖以建立的、他的早期工作，视为他的巨作旁边的几乎不重要的东西。直到最后，他始终是谦卑而虔诚的，完全不为他的科学声誉担心。"我长期以来欣赏托勒密对他伟大的天文学大师希巴克斯的描绘，ἀνήρ φιλόπονος καὶ φιλαληθής，一个热爱劳动和热爱真理的人。但愿我的墓志铭也如此。"



伽罗瓦头像

第二十章 天才与愚蠢

伽 罗 瓦

诸神自身向愚蠢进行的斗争也没有胜利。

——席勒

阿贝耳死于贫穷，伽罗瓦则死于愚蠢。全部科学史上，极度愚蠢战胜不可抑制的天才的例子，再没有比埃瓦里斯·伽罗瓦过于短促的一生所提供的例子更全面了。关于他的不幸的记录，很可能作为一切自信的教书匠、无耻的政客、和骄傲自满的院士们的一个不祥的纪念碑而竖立。伽罗瓦不是“无用的天神”，但是面对大

群愚蠢的人联合反对他，就连他那非凡的力量也被粉碎了，他在同一个接着一个的不可战胜的蠢才的斗争中，耗尽了他的生命。

伽罗瓦一生中的最初十一年是幸福的。他的双亲住在莱茵河畔的布尔小村里，就在巴黎城外，1811年10月25日，埃瓦里斯就诞生在那里。埃瓦里斯的父亲尼古拉-加布里埃尔·伽罗瓦是十八世纪的遗老，他有教养、聪明、富于哲学思想，对王权深恶痛绝，对自由无限热爱。在拿破仑逃离厄尔巴岛的"百日复辟"期间，伽罗瓦被选为该村的村长，滑铁卢战役以后，他保持着他的职位，在国王治下忠诚服务，支持村民们反对教士，在社交集会上用他自己创作的老式的诗歌让人们高兴。这些无害的活动，后来却证明是这个和蔼可亲的人毁灭的原因。

伽罗瓦直到十二岁时，除了他的母亲阿代拉伊德·玛丽·德芒以外，没有别的教师。伽罗瓦性格中的一些特点是从他母亲继承来的，她出身于一个显要的律师世家。她的父亲好象有几分鞑靼血统。他给了他的女儿彻底的古典教育和宗教教育，她又把这些教育赋与她的大儿子，不过不是把她所接受的东西原封不动地教给他，而是独出心裁地把它熔合成一种强有力的坚忍精神。她没有拒绝基督教，也没有毫无疑问地全盘接受，她只是把基督的教义与塞涅卡和西塞罗的学说加以对照，把一切都归纳为它们的基本美德。她的朋友们记得她是一个性格坚强的女子，有她自己的见解，慷慨，有明显的创造能力，好奇，喜欢探索，有时流于自相矛盾。她死于1872年，终年八十四岁。直到最后，她始终思想清晰有力。她象她丈夫一样，憎恨暴政。

在伽罗瓦的父系或母系方面，都没有关于数学才能的记载。他自己的数学天才，或许是在青春期开始时象爆炸似地迸发出来的。在孩童时代，他感情充沛，比较严肃，不过他也很喜欢参加为

了向他的父亲表示敬意而经常举行的欢乐的庆祝活动，甚至创作诗歌和对话来使客人们高兴。所有这一切，在卑鄙的迫害和愚蠢的误解的刺痛下，便都改变了，迫害和误解不是来自他的父母，而是来自他的教师们。

1823年，伽罗瓦十二岁时进了巴黎的路易大帝皇家学院，这是他上的第一所学校。那地方阴森可怕，戒备森严，由一个与其说是教师不如说是政治上的监狱看守的圣职候补者统治着，这地方看上去象一座监狱，实际上也正是一所监狱。1823年的法国，对大革命记忆犹新。那是一个策划阴谋和反阴谋的时代，充满暴乱和革命谣言的时代。所有这一切在学校里都引起共鸣。学生们怀疑这位圣职候补者在打算让耶稣会会士卷土重来，他们罢课，拒绝在教堂里唱圣歌。圣职候补者不通知学生家长而把那些他认为最有罪的人开除了。他们流落街头。伽罗瓦不在他们当中，但是如果他在，对他倒要好些。

直到这时，暴政对这个十二岁的孩子来说，还仅仅是口头上的。现在他在行动上看见它了，这个经历使他的性格的一个方面终生都不正常。他被震惊得怒不可遏。他的学习，由于他母亲在古典文学方面的极好的教导，成绩优异，他得了奖。但是他也获得了一种比任何奖励都更持久的东西，那就是一种顽强的信念，不论它是正确的还是错误的，他认为不管是畏惧还是最严厉的惩罚，都不能在这些经历了第一次无私的献身的年轻的心灵中，扑灭正义感和公正待人。这是他的同学们用他们的勇气教给他的。伽罗瓦从来没有忘记他们的榜样。他太年轻了，不能不激怒。

364

随后的一年，标志着这个年轻孩子生活中的另一次危机。他对文学和古典文学的俯首贴耳的兴趣消失了，变得厌烦了；他的数学天才已经在生气勃勃地活跃起来。他的教师们建议让他留级。

埃瓦里斯的父亲反对，于是这孩子继续做着修辞学、拉丁文和希腊文的没完没了的练习。据报告，他的成绩低劣，他的行为“放荡”，教师们如愿以偿了。伽罗瓦降级了。他被迫吞下他的天才所拒绝的残汤剩饭。他感到厌烦，对他的功课敷衍塞责，既不努力也不感兴趣地混日子。数学课比起消化古典文学这种严肃的事情来，多多少少是一种附带的东西。所以各个年级和不同年龄的学生都在其他课程之余学习初等数学。

正是在这非常厌烦的一年，伽罗瓦开始学正规学校的数学课了。他发现了勒让德的光辉的几何学。据说就连学生当中比较好的数学人才，要掌握勒让德，一般也需要两年的时间。伽罗瓦从头到尾读完了几何学，就象其他孩子读一本关于海盗的故事那样容易。这本书唤起了他的热情；它不是一本雇佣文人写的教科书，而是一个富于创造性的数学家所创作的艺术品。只要读一遍就足以把初等几何学的整个结构，一清二楚地显示给这个着了迷的孩子了。他已经掌握了它。

他对代数的反映是很有启发性的。代数使他厌恶，当我们考虑到伽罗瓦有着怎样的头脑时，他对代数的厌恶是有非常充分的理由的。这里没有象勒让德那样的大师去鼓舞他。代数方面的课本只不过是学校的教科书而已。伽罗瓦轻蔑地把它扔在一边。他说，它缺乏创造者的机敏，那是只有富于创造力的数学家能够给予的。既然已经通过其著作结识了一位大数学家，伽罗瓦就自己着手来解决问题了。他不顾教师吹毛求疵地过份着重细节，直接从当时最伟大的大师拉格朗日那里去学他的代数。后来他阅读了阿贝耳的著作。这个十四、五岁的孩子，吸取了为成熟的专业数学家们写作的代数分析的巨著——关于方程数值解、解析函数论，以及函数的微积分方面的论文。他在课堂上的数学成绩平平；传统的

365 课程对于一个数学天才说来是微不足道的，也是掌握真正的数学所不需要的。

伽罗瓦能够几乎完全凭心算进行最困难的数学上的调查研究。这种特殊的天赋无需教师或主考人的帮助。他们坚持的那些细节，在他看来是太显而易见或太琐碎了，使他愤怒得难以忍受，他常常发脾气。然而他在总考中仍然获奖。教师们和同学们都很惊讶，当他们失败时，伽罗瓦却用突击夺得他的王国。

由于这样初次认识到自己的巨大力量，伽罗瓦的性格发生了深刻的变化。他知道了他与代数分析方面的大师们的密切关系，他感到无比自豪，渴望着冲到前面去，和他们较量他的力量。他的家人——甚至他的异乎寻常的母亲——发现他很奇怪。在学校里，他似乎在他的教师和同学们心里引起一种害怕和忿怒相混合的奇怪的感情。他的教师们都是好人，而且有耐心，但是他们是愚蠢的，而对于伽罗瓦，愚蠢是不能原谅的罪恶。在这一年的年初，他们报告说他“很温和，充满着天真和良好的品质，但是——”接着他们就说“他身上有点奇怪的东西。”无疑是有的。这孩子有着不寻常的头脑。过了不久，他们承认他不是“调皮捣蛋”，只不过是“有独创性和古怪，”“好争辩，”他们抱怨他喜欢取笑他的同伴。这一切无疑是应该受到严厉谴责的，但是他们可以用他们的眼睛看看。这孩子发现了数学，他已经被他的精灵驱使着了。在这觉醒的一年的年底，我们得知“他的古怪使他和所有的同伴疏远了，”他的教师们注意到“他的性格中有点神秘的东西。”更糟糕的是他们指责他“假装胸怀大志和有独到见解。”但是确实有人承认伽罗瓦数学很好。他的修辞学教师们满足于一句古典的讽刺话：“他的聪明现在只是一种我们不能相信的神话。”他们抱怨他在给他指定的工作中——当他打算在上面花费一点心思时——只是马虎了

草和古里古怪，故意地用无休止的“胡闹”来使他的教师们厌烦。这最后一点不是指干坏事，因为伽罗瓦并没有恶意。那仅仅是用一个强烈的措词，来描述一个第一流的数学天才，决不能把他的聪明才智浪费在迂腐的学究们详细阐述的、无用的修辞学上。 366

有一个人出于他永远可靠的、数学上的洞察力，宣称伽罗瓦在文学研究方面和他在数学上同样能干。伽罗瓦看来是被这个人的好意打动了。他答应给修辞学一个机会。但是他的数学魔鬼这时已被完全唤醒了，大嚷大叫地要出来了，可怜的伽罗瓦失去了天恩。在短短的时间内，这位持不同意见的教师就站在大多数人一边，投了和他们一致的票。他悲哀地承认，伽罗瓦不可救药了，“骄傲自满，不可容忍的、装模作样的独创性。”但是这位卖弄学问的教师提出了一个极好的、恼怒的建议，以挽回他的面子。如果这个建议被采纳了，伽罗瓦可能会活到八十岁。“对数学的疯狂主宰了这孩子，我想他的父母最好是让他只学数学。他在这里浪费他的时间，他所做的一切都是折磨他的教师们，并给他自己招来责备。”

十六岁时，伽罗瓦犯了一个奇怪的错误。他不知道阿贝耳在他的事业开始时就自认为他已做出了不可能做到的事，解决了一般五次方程的问题，伽罗瓦重复了这个错误。有一个时期——不过时间很短——他相信他已经做到了不可能做到的事。这仅仅是阿贝耳和伽罗瓦两人的经历中几个特别相似之处中的一个。

当伽罗瓦在十六岁时已经很好地开始了他那重大发现的事业时，他的数学教师韦尼埃仍在不断地对他唠唠叨叨，就象一只母鸡孵出了一只小鹰，而不知道怎样把这个不守规矩的家伙的双脚固定在谷仓院子里那一大堆脏土上一样。韦尼埃恳求伽罗瓦按步就班地工作。伽罗瓦忽略了这个忠告，没有准备就去参加了巴黎综合工科学校的竞争性的入学考试。这所伟大的学校是法国数学家

之母，创办于法国大革命期间（有人说是蒙日创办的），目的是为了给土木工程师和军事工程师们提供世界上任何地方所能得到的、最好的科学教育和数学教育。这所学校对雄心勃勃的伽罗瓦有双重吸引力。在综合工科学校，他的数学才能可以得到赏识和最大的鼓励。还有他对人身自由和言论自由的渴望也会得到满足；因为难道不正是强有力的、大胆的、综合工科学校的学员们——其中有些是未来的军官领袖——始终是那些企图破坏光荣的革命工作，恢复腐朽的教士阶级和国王们的神圣权利的反动阴谋家的眼中钉吗？大胆的综合工科学校的学员们，至少在伽罗瓦孩子气的眼中，跟路易大帝学院那些象吹胡子瞪眼、无足轻重的人似地叽叽喳喳的修辞学教师们，不是同一类的人，他们是一帮献身的青年爱国者。以后的事件不久就会证明，他的估价至少部分是正确的。

367

伽罗瓦考试失败了。不只是他一个人认为他的失败是一种愚蠢的、不公正行为的结果。他曾经无情地嘲笑过的同伴们都大吃一惊。他们相信伽罗瓦具有最高级的数学天才，他们怀疑他的主考人是些不称职的人。将近四分之一世纪以后，泰尔奎姆提醒他的读者们，这场争论并未结束。泰尔奎姆是专门维护投考综合工科学校和师范学院的考生利益的数学杂志《新数学年鉴》的编辑。他在评论伽罗瓦的失败和另一个例子中主考人的难以理解的裁决时说："一个高等智力的报考者，败在一个智力低下的主考人手中了。Hic ego barbarus sum quia non intelligor illis［因为他们不了解我，我是一个野蛮人。］……考试是神秘莫测的事情，我在它面前屈服。正如神学的许多神秘莫测的事情一样，理智必须谦卑地承认它们，而无需设法去了解它们。"至于伽罗瓦，这次失败几乎是最后的一击，它迫使他依靠自己，使他的生活更加痛苦。

1828年伽罗瓦十七岁，这是他重大的一年，第一次遇到了一

个能够了解他的天才的人：路易大帝学院高级数学(专业数学班)教师路易-保罗-埃米尔-里夏尔(1795—1849)。里夏尔不是一个普普通通的教师，而是一个有才能的人。他在空余时间去巴黎大学听有关几何学的高级讲座，及时了解当时的数学家们的进展，并把它传给他的学生们。他胆小、谦虚、不谋私利，把他的全部才能都贡献给他的学生们。这个不肯为了促进自己的利益而花一点力气的人，在他的学生的前途遇到危急情况时，不惜作出任何牺牲。他完全忘记了自己，热心地通过更能干的人们的工作，来促进数学的发展。尽管他在科学界的朋友们极力劝他写作，而且对于他鼓舞人心的教导，十九世纪杰出的法国数学家中不只一个对他表示感激：如通过纯数学分析与亚当斯一起共同发现海王星的勒韦里埃；著名几何学家、第一个系统地阐述伽罗瓦的方程论的、高等代数经典著作的作者塞尔；第一流的代数学家和算数学家埃尔米特；最后，是伽罗瓦。

368

里夏尔一下子就认识到落在他手里的是什么——“法国的阿贝耳。”伽罗瓦交去的、对一些难题的独到解答，都令人自豪地对全班学生作了解释，给了这个年轻的作者公正的称赞，里夏尔并公开地宣扬，这个非凡的学生应该不经考试直接进入综合工科学校。他给了伽罗瓦头等奖，并在他的学期报告中写道，“这个学生有着超出他所有的同学的明显优势；他只在数学最先进的部分上工作。”所有这一切都是确确实实的。伽罗瓦十七岁时就在方程理论方面做着划时代的重要发现，这些发现的重要性经过一个多世纪以后还没有穷尽。1829年3月，伽罗瓦发表了他的第一篇论文：论连分式。这篇论文没有包含他已作出的伟大的东西，但是它足以向他的同学们宣告，他不仅仅是一个学者，而且是一个富于创造力的数学家。

当时法国主要的数学家是柯西。在发明创造的丰富方面，很少有人能与柯西相比；正如我们所知，他的选集之多，在数量上仅仅被历史上最多产的数学家欧拉和凯莱①的作品所超过。不论什么时候，当科学院想要对提交给它考虑的一篇数学论文提出权威性意见的时候，它总是找到柯西。一般说来，他是一个迅速而公正的评阅人，但是他也有失误的时候。不幸的是他失误的情况都是最重要的。在数学史上，两次主要的灾难都是由于柯西的疏忽造成的：那就是对伽罗瓦的忽略和对阿贝耳的不公平的对待。对阿贝耳，柯西只有部分责任，但是对伽罗瓦的不可原谅的疏忽，责任全在柯西。

伽罗瓦把他直到十七岁时的重大发现写成一篇论文，准备呈交科学院。柯西答应送交这篇论文，但是他忘记了。最后他竟然不称职到把作者的摘要遗失了。这就是伽罗瓦对柯西慷慨的允诺所听到的最后的消息。这只不过是一连串类似的灾难中的第一件，这些灾难促使这个遭到挫折的孩子对科学院和科学院院士们的愠怒的蔑视，变成对他注定要在其中生活的整个愚蠢的社会的强烈仇恨。

369

尽管这个备受折磨的孩子表现出明显的才华，现在他在学校里却连想做他自己愿意做的事也不可能。学校当局不让他安静地在他丰富的发现领域里去获得成果，而是用一些琐事把他烦扰得发狂。用他们无休止的说教和惩罚激起他的公开反抗。他们在他身上找不出任何东西，只有骄傲自满和一种想要成为数学家的坚强决心。他已经是一个数学家了，但是他们不知道。

在他十八岁的时候，又有两个灾难给伽罗瓦的性格带来了最

① 仅就截至1936年实际出版的数量而言。当欧拉的著作最后全部出版时，无疑会超过柯西。

后的影响。他第二次参加综合工科学校的入学考试。一些连给他削铅笔也不配的人坐在那里评判他。结果是可想而知的。伽罗瓦失败了。这是他最后的机会；综合工科学校的大门永远对他关闭了。

那次考试已经成为一个传奇。伽罗瓦几乎完全凭脑子工作的习惯，使他在黑板面前处于非常不利的地位。粉笔和板刷妨碍了他——直到他对其中的一样找到合适的用途才好一些。在考试的口试部分，一个主考人冒昧地和伽罗瓦辩论一道数学难题。这个人明明错了，但又很固执。伽罗瓦眼见他作为一个数学家和综合工科学校的民主自由的职业斗士的全部希望和整个生活正在落空，他完全失去了忍耐。他知道他已经失败了。在一阵愤怒和失望中，他把板刷扔到那个折磨他的人的脸上，狠狠地击中了。

最后的打击是伽罗瓦的父亲的惨死。老伽罗瓦作为莱茵河畔的布尔的市长，尤其是因为他总是支持村民们反对神父，成了当时教士们搞阴谋诡计的把子。在1827年的选举风暴以后，一个鬼计多端的年轻神父组织了一场反对市长的卑鄙的运动。这个狡猾的神父利用市长擅长写诗这一众所周知的特点，编写了一组针对市长的一个家庭成员的既下流又愚蠢的诗，签上市长的名字，在市民中免费散发。极其正派的市长因为这场迫害而难受得发狂。一天，趁他妻子不在的时候，他偷偷地去了巴黎，在离他儿子就读的学校不远的一间房间里自杀了。在出殡时暴发了严重的骚乱。愤怒的市民们投掷石头；一个神父额头被击中了。伽罗瓦看见他父亲的棺材在一种不合时宜的暴乱中被放进了坟墓。从此以后，他怀疑到处都存在着他所憎恨的不公正，他在任何事情上都看不见善良。 370

伽罗瓦第二次报考综合工科学校失败后，回到学校准备从事教书生涯。这时学校来了一位新校长，一个趋炎附势、给保皇派和

教士们充当密探的胆小鬼，在不久就要从根本上动摇法兰西的政治大变动中，这个人左右逢缘、迎合潮流的行为，对伽罗瓦的最后几年有一种悲剧性的影响。

伽罗瓦仍然受到他的教师们的迫害和恶意的误解，他在这种情况下为期终考试作准备。他的主考人的评语是很有趣的。数学和物理学的评语，他得到"很好"。最后的口试引起这样的评语："这个学生有时不能清楚地表达他的思想，但是他有才智，表现出卓越的研究精神。他告诉了我一些应用分析中的新结果。"文学的评语是："这是对我的问题回答得很糟糕的唯一的学生；他简直什么也不知道。我听说这个学生对学数学有一种非凡的才华，这使我非常惊讶；因为在他考试以后，我认为他没有甚么才华。他成功地隐瞒了这一点，正象他向我隐瞒了一样。如果说这个学生真是象我以前认为的那样，我确实很怀疑他是否还能成为一个好的教师。"对这个评语，伽罗瓦记起他自己的一些好老师，他可能回答："决没有的事。"

1830年2月，伽罗瓦十九岁时，明确地被承认具有大学的声望。他确知他有超常的能力，这点再次反映在他对辛辛苦苦的教师们的令人畏惧的轻蔑上，他继续按照自己的主意独自工作。这一年他写出了三篇论文，在其中开辟了新的领域。这些论文包含了一点他关于代数方程论的伟大工作。它远远超过了当时已经做过的任何东西。伽罗瓦满怀希望地把它（还有进一步的结果）包括在一篇提交科学院的、参加数学大奖赛的论文中。这项大奖仍然是数学研究中的最高荣誉；只有当时第一流的数学家们能够去竞争。专家们认为伽罗瓦的论文是完全有资格获奖的。它是最富于独创性的工作。正象伽罗瓦完全公正地说的："我作出的这些研究成果，将使许多著名学者对他们的研究踌躇不前。"

371

手稿安全地到了秘书手中。秘书把它带回家去审阅，但是还没有来得及看就去世了。人们在他死后搜寻他的文件时，这篇手稿连一点踪迹也没有找到。这就是伽罗瓦最后一次听说起它。很难责备他把他的不幸归咎于比纯出偶然更难断定的东西。在柯西的疏忽之后，又发生了同样的事情，看来太象是天意而不仅仅是意外了。他说："天才是被一个恶毒的社会组织为了有利于奉承讨好的平庸之辈，而判定永远不给予公正的。"他的憎恨加深了，他全力投入政治活动，站在当时被禁止的激进派、共和派一边。

1830年革命最初的射击声使伽罗瓦非常高兴。他试图把他的同学们拉进这场冲突中去，但是他们畏缩不前，那位善于迎合潮流的校长要他们以名誉担保，不离开学校。伽罗瓦拒绝作出保证，校长恳求他当天留在学校。校长的话说得很不得体，而且毫无常识。伽罗瓦被激怒了，企图在夜间逃走，但是围墙太高，出不去。那以后在整个"光荣的三天"中，综合工科学校英勇、年轻的学员们走上街头，做出名垂青史的大事，这时这位校长却小心谨慎地把他管辖下的学生锁在学校里。校长准备观望形势然后行动。起义成功地完成了，狡猾的校长慷慨地把他的学生交给临时政府随意处置。这对伽罗瓦的政治信念产生了最后的打击。他在假期中以他对群众权利的狂热支持，使他的家人和少年时代的朋友们感到震惊。

1830年的最后几个月，象通常在一次彻底的政治骚乱之后一样动荡不安。糟粕沉到了底下，卑贱的人升到了顶上，悬在二者之间的人口中的温和分子则犹豫不决，无所适从。伽罗瓦回到了学院，他把校长的趋炎附势、左右逢源和学生们软弱无力的效忠，与综合工科学校中他们的严格的对立面加以对比。他再也不能忍受

372 无所作为的耻辱，便给《学报》写了一封言词激烈的信，在信中对学生和校长都作了他认为他们应得的评价。学生们本来能够保全他，但是他们缺乏骨气，伽罗瓦被开除了。愤慨之余，伽罗瓦给《学报》写了第二封信，向学生们讲话。他写道："我不是为我自己向你们请求什么，而是为了你们的荣誉，并根据你们的良心，照直说了我的看法。"这封信没有回复，原因很明显，伽罗瓦向他们呼吁的那些人，既没有荣誉，也没有良心。

现在可以随心所欲了，伽罗瓦宣布私人开班讲授高等代数，每周一次。他这时十九岁，是一个富于创造力的、最最第一流的数学家，兜售课程，却没有买主。他开的课程将包括"一种新的假想理论［现在以在代数和数论中极其重要的'伽罗瓦假想'理论著称］；用根式求解方程的理论，以及数论和用纯代数论述椭圆函数"——都是他自己的工作。

由于找不到学生，伽罗瓦暂时放弃了数学，参加了国民警卫队的炮兵，四个炮兵营中有两个营几乎完全是由自称为"人民之友"的自由派组成的。不过他并没有完全放弃数学。他在泊松的鼓励下，向科学院呈交了一篇有关方程的一般求解——现在称为"伽罗瓦理论"——的论文。凡是研究万有引力、电学和磁学的数学理论，都会记起泊松的名字，他提交了一份敷衍塞责的报告。他说这篇论文是"不可理解的，"但是他没有说明他花了多少时间得出这个惊人的结论。这是终于使人不能忍受的最后一击。伽罗瓦把他的全部力量投入了革命的政治活动。他写道："如果需要一具尸体来唤起人民，我愿献出我的。"

1831年5月9日，标志着事变的前兆。大约两百个青年共和党人举行了一次宴会，抗议王室关于解散伽罗瓦参加过的炮兵的命令。他们为1789年和1793年的革命祝酒干杯，为罗伯斯庇

尔祝酒干杯，并为1830年的革命祝酒干杯。这次聚会的整个气氛是革命的和挑衅的。伽罗瓦站起来，一手拿着酒杯，一手拿着打开的小刀，提议："为国王路易·菲利普"干杯。他的同伴们误解了祝酒的意义，把他嘘了下来。然后他们看见了打开的小刀。他们把这解释为对国王的性命的威胁，狂喊着表示赞同。伽罗瓦的一个朋友看见大仲马和其他知名人士从敞开的窗户外面走过，他恳求伽罗瓦坐下，但是喧闹在继续下去。伽罗瓦一时间成了英雄，炮兵们涌上街头，通宵跳舞，庆祝他们充沛的精力。第二天伽罗瓦在他母亲的住所被捕，并被投进了圣·佩拉热监狱。 373

一个聪明的律师在伽罗瓦的忠实朋友的帮助下，制订了一篇巧妙的辩护辞，大意是说伽罗瓦确实是说过："为路易·菲利普，如果他变成卖国贼。"打开的小刀很容易解释，伽罗瓦用它切了鸡，事实也是这样。祝酒中的那半句能够搭救他的话，他的朋友们发誓说他们是听见的，只不过被口哨声淹没了，只有那些离说话的人很近的人听清了他说的是什么。伽罗瓦不承认他说了这半句能够搭救他的话。

在审判期间，伽罗瓦的态度表现出对法庭和他的控诉人的高傲的轻蔑。他不顾后果，发表了反对一切政治上的非正义力量的激烈演说。法官是一个自己有子女的人。他警告被告，这样做于他的案子不利，并严厉地制止了他。起诉在一个论点上是模棱两可的，即当发生事件的那家饭店被作为私人宴会的场所时，是否是一个"公共场所"。伽罗瓦的自由就系于这一微妙的法律论点。但是法庭和陪审团都为被告是如此年轻所打动了。经过十分钟的审议后，陪审团裁决被告无罪。伽罗瓦从证据台上拿起他的小刀，关上，随手放进口袋，一声不响地离开了审判室。

他的自由没有保持多久。不过一个月的时间，1831年7月14

日他再次被逮捕，这次是作为防范措施。当时共和党人准备举行一次庆祝活动，而伽罗瓦由于在当局眼中被视为一个"危险的激进派"，无端地被拘禁了。全法国的政府报纸都大肆喧染警察的这种了不起的突然袭击。现在他们有了"危险的共和党人埃瓦里斯·伽罗瓦，"他在那里无论如何也不可能发动一场革命。但是他们很难找出一条合法的罪名，足以使他受审。不错，他在被捕时是全副武装的，但是他没有拒捕。伽罗瓦不是一个傻子。假如他们控告他阴谋反对政府呢？太重了；不会通过；没有哪个陪审团会给定罪。唉！经过两个月不停的冥思苦想，他们终于捏造出一条罪名。伽罗瓦在被捕时穿的是炮兵制服。但是炮兵已经解散。因此伽罗瓦犯了非法穿制服罪。这次他们定了他的罪。和他一起被捕的一个朋友被判刑三个月；伽罗瓦被判六个月徒刑。他将被监禁在圣·佩拉热，直到1832年4月29日。他的妹妹说，展望摆在他前面的暗无天日的日子，他看上去快要五十岁了。怎么不会呢？"天蹋下来也得让正义占优势。"

374

监狱里对政治犯的惩罚不重，他们受到适度的人道待遇。大多数人醒着的时候在专供他们使用的院子里散步，或是在小卖部喝酒——那是监狱长私人贪污受贿的地方。不久，伽罗瓦由于他忧郁的面容，节制饮食的习惯，和他永远专注的神情，成为快活的酒徒们取笑的对象。他是在专心干他的数学，但他不能不听到对他的奚落辱骂。

"怎么！你只喝水？离开共和党，回到你的数学那里去吧。"——"没有酒和女人，你永远不会成为一个人。"伽罗瓦被他们刺激得受不住了，他抓起一瓶白兰地，不知道它是什么，也不管它是什么，就喝了下去。一个正派的同监犯照顾他，直到他清醒过来。

当他认识到他做了什么时，他的这次丢脸使他受到极大的打击。

他终于逃出了当时法国作家笔下巴黎最肮脏的阴沟。1832年霍乱流行，惦记着伽罗瓦的当局们在3月16日把他转到了一所医院。这位曾经威胁到路易·菲利普的性命的"重要政治犯"太宝贵了，不能让他暴露在霍乱病面前。

伽罗瓦是假释出狱的，所以他反而有充分机会和外面的人见面。这样，他就偶然地经历了他的第一次、也是唯一的一次恋爱。在这件事上，也象在其他事情上一样，他是不幸的。一个不足取的姑娘("低级客栈里的卖弄风骚的女人")找上了他。伽罗瓦对待这件事很狂暴，他讨厌爱情，讨厌他自己，也讨厌这个姑娘。他写信给他忠实的朋友奥古斯特·谢瓦利埃，"你的信充满了使徒的同情，给我带来了一点平静。但是怎样消除我所体验过的那样热烈的感情的痕迹呢？……在重读你的来信时，我注意到一句话，你责备我为一个玷污了我的心、我的头脑和我的双手的腐朽世界的堕落腐化而陶醉……陶醉！我对一切的幻想都已破灭，甚至对爱情和名声的幻想也已破灭。一个我所憎恶的世界怎能玷污我呢？"这是1832年5月25日写的。四天以后他自由了。他打算到乡间去休息和思考。 375

5月29日那天发生的事情，人们不确切知道。下面从两封信中摘录的话，提出了通常作为事实真象被接受的情况：伽罗瓦刚刚获释就与政敌发生了争吵。这些"爱国者"只是一心想要打架，不幸的伽罗瓦命中注定在一场决斗中和他们较量。在一封日期为1832年5月29日的"致全体共和党人书"中，伽罗瓦写道：

"我请求爱国者和我的朋友们不要为了我不是为祖国而死责备我。我是作为一个无耻的、卖弄风情的女子的受害者

而死。我的生命是在一场可悲的争吵中熄灭的。啊！为什么要为了这样渺小的事情而死，为了一件如此卑鄙的事情而死！……请原谅那些杀死我的人，他们是真诚的。”在另一封写给两个未指名的朋友的信中，他写道：“两个爱国者已经向我提出挑战——拒绝，对我来说是不可能的。我请求你们原谅我没有征求你们的意见。但是我的对手们相信我为了自己的名誉而不会预先通知任何爱国者。你们的任务很简单；证明我是不得已而决斗的，那就是说已经用尽了一切调解办法之后才决斗的……既然命运没有给我足够的时间，让我活到我的国家知道我的名字，请保留对我的记忆吧。我至死是你们的朋友。

E. 伽罗瓦”

这些就是他写的最后的话。在写这些信之前，整个晚上，他把飞逝的时间用来焦躁地一气写出他的科学上的最后遗言，在死亡之前(他预见到死亡能够追上他)尽快地写，把他丰富的思想中那些伟大的东西尽量写一些出来。他不时中断，在纸边空白处写上“我没有时间，我没有时间，”然后又接着涂写下一个极其潦草的提纲。他在天亮之前那最后几个小时拼命写出的东西，将使世世代代的数学家们忙上几百年。他一劳永逸地给一个折磨了数学家们达几世纪之久的谜，找出了真正的解答。这个谜就是在什么条件下方程是可解的。但这只不过是许多事情中的一件。在这项伟大的工作中，伽罗瓦极其成功地用了群论(见柯西一章)。伽罗瓦的确是这个今天在全部数学中具有根本重要性的抽象理论的一个伟大先驱者。

376

除了这封心烦意乱的信以外，伽罗瓦把他曾经打算送交科学

院的一些手稿托付给他的科学执行人。十四年以后，1848年，约瑟夫·刘维尔为《纯粹数学和应用数学杂志》编辑了部分手稿。刘维尔本人是一个杰出的、富于创造力的数学家，也是这个重要杂志的编辑，他在序言中写道：

"埃瓦里斯·伽罗瓦的这个重要著作的目的，是阐明方程能用根式求解所必需的条件。作者为一个一般理论奠定了基础，他把这个理论详尽地应用于素数次方程。伽罗瓦在他十六岁、还是路易大帝皇家学院的学生时……已在着手研究这个困难的问题。"刘维尔接着叙述学院的评阅人拒绝了伽罗瓦的论文，因为它们模糊难解。他接着说："产生这个缺点的原因是过份追求简练，这个缺点是在对待抽象而神秘的纯代数问题时，我们应该首先竭力避免的。当你试图领导读者远远离开老路，步入更广阔的领域时，确实更加需要清楚明了。正如笛卡儿说的，在论述玄妙的问题时，应该玄妙地清楚。伽罗瓦常常过于忽略这个告诫了。我们能够理解，杰出的数学家们之所以凭他们贤明的告诫，努力把才华横溢但缺乏经验的初学者拉回到正路上来，这样做是应该的。他们指责的作者就在他们前面，热情、活跃；他本该从他们的忠告中获得教益。

"但是现在一切都改变了。伽罗瓦不存在了！让我们抛开无用的批评；让我们把缺点留在那里而看看成绩。"刘维尔继续说明他怎样研究了手稿，拣出了一个应该特别注意的完美的珍宝。

"当我弥补上一些小小的缺陷后，看出了伽罗瓦所证明的方法，特别是一个美妙的公理，是完全正确的，这一瞬间，我的热心得到了充分的报偿，我感受到极大的喜悦。这个美妙的公理是：为使一个不可约的素数次方程可用根式求解，充分而必要的条件是所

有它的根都是任意两个根的有理函数。”①

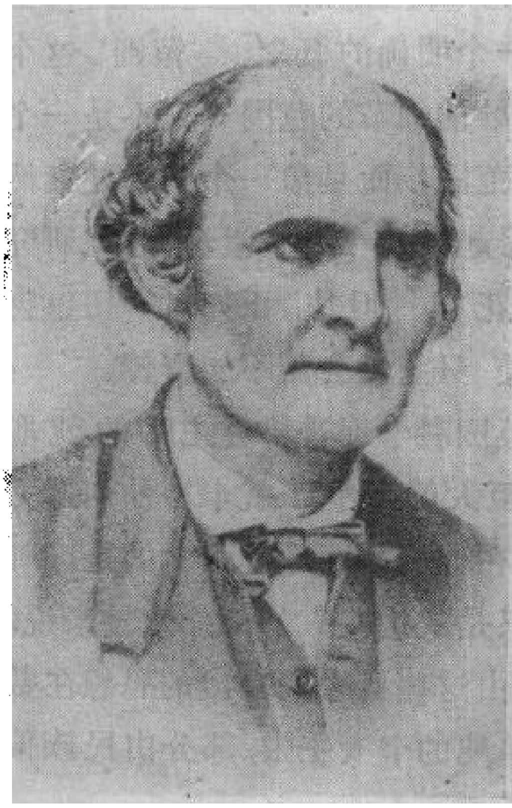
伽罗瓦把他的遗嘱委托给他忠实的朋友奥古斯特·谢瓦利埃，全世界都应该感谢它被保留了下来。“我亲爱的朋友，”他开始写道，“我在分析方面作出了一些新的发现。”然后他在时间允许的情况下着手写出大纲。它们是划时代的。他结束说：“请雅可比或高斯公开提出他们的意见，不是对这些公理的正确性，而是对它们的重要性。我希望以后会有人发现，辨读这一堆写得很潦草的东西，对他们是有益的。满怀激情地拥抱你。E. 伽罗瓦。”

轻易信任别人的伽罗瓦！雅可比是慷慨的；高斯会说什么呢？关于阿贝耳他是怎么说的？关于柯西，或者关于罗巴切夫斯基，他略去了什么没有说？尽管有了那一切痛苦的经历，伽罗瓦仍然是一个怀抱希望的孩子。

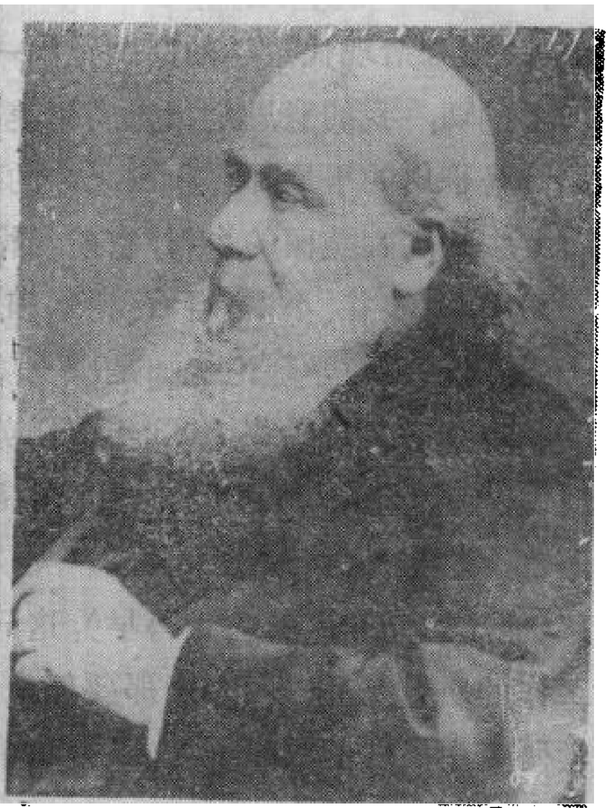
1832年5月31日清晨很早的时候，伽罗瓦在“决斗场”与他的敌手相遇。决斗是在二十五步的距离用手枪对射。伽罗瓦倒下了，肠子被射穿。没有医生在场。他被丢在他倒下的地方。九点钟的时候，一个路过那里的农民把他送到利尚医院。伽罗瓦知道他快死了。在不可避免的腹膜炎开始以前，在他的神志仍然完全清醒的时候，伽罗瓦拒绝了一个神父的祈祷。也许他记起了他的父亲。他的弟弟，他的家人中唯一得到通知的一个，流着泪赶到了。伽罗瓦努力以一种坚忍精神去安慰他的弟弟：“不要哭，”他说，“我需要我的全部勇气在二十岁时死去。”

1832年5月31日上午，伽罗瓦正在他二十一岁上去世了。他被埋葬在南公墓的普通壕沟里，所以今天埃瓦里斯·伽罗瓦的坟墓已无踪迹可寻。他不朽的纪念碑是他的著作，共六十页。

① 如果读者浏览一下第十七章引自阿贝耳的摘要，这个公理的重要意义就清楚了。



凯莱



西尔维斯特

第二十一章 不变量的孪生兄弟

凯莱和西尔维斯特

> 不变量理论是在凯莱强有力的手中涌现出来的，但是它最后形成一个完美的艺术品，博得后世数学家们的赞美，主要是由于西尔维斯特的才智以其闪光的灵机妙想照亮了它。
>
> ——P.A. 麦克马洪

“很难给现代数学的广阔范围一个明确的概念。‘范围’这个词不确切：我的意思是指充满了美妙的细节的范围——不是一个象一马平川的平原那样单调乏味的范围，而是象一个从远处猛然看上去的辽阔美丽的乡村，它能经得起人们在其中漫步，详细研究一切山坡、峡谷、小溪、岩石、树木和花草。但是，正如对一切事物一样，对一个数学理论也如是——美，只能意会而不能言传。”

这些话引自凯莱1883年担任英国科学促进协会主席的就职演说，它们也很可以用于他自己的巨大的著作。就丰富的创造力而言，欧拉、柯西和凯莱自成一类，在他们后面远远跟着的是庞加莱(他比这几个人都去世得早)。这只是就这些人的工作数量来说；工作的质量是另一回事，那要部分由这些巨人们提出的思想在数学研究中出现的频繁程度，部分由单纯的个人主张，部分由民族偏见来判断。

凯莱关于现代数学的广阔范围的这些话，提醒我们把我们的注意限制在他自己那些显然引进了新颖而深远的思想的工作的一些特点上。奠定他最伟大的名声的工作是不变量理论，以及由这个广阔的理论中自然地产生出来的东西，他是这个理论的创始者和卓绝的发展者，在这项工作中得到他的朋友西尔维斯特高明的大力支持。不变量的概念对于现代物理，特别是相对论，有着极其重要的意义，但是这不是它应该受到注意的主要原因。众所周知，379 许多物理理论是必须修正和抛弃的；不变量理论作为对纯数学的永恒的增加部分，看来是建立在更坚固的基础上的。

凯莱首创的另一个思想是“高维空间”(n维空间)几何，它对现代科学同样具有重要意义，但是作为纯数学的思想，则无可比拟地更为重要。矩阵理论也是同样的，它也是凯莱的发明。在非欧几何方面，凯莱为克莱因的杰出的发现铺平了道路，这个发现就

是，欧几里得几何同罗巴切夫斯基和黎曼的非欧几里得几何，这三种几何都仅仅是一种把它们包括在内作为特殊情况的更一般的几何的不同方面。我们在概述了凯莱和他的朋友西尔维斯特的生平之后，将简单地说明他的这些贡献的性质。

如果可能的话，应该把凯莱和西尔维斯特的生平放在一起来写。这两个人完全互相衬托，每一个人的一生都在很大程度上填补了另一个人生活中的不足。凯莱的一生是平静的，西尔维斯特的一生则象他自己苦涩地说的那样，把他的大量精力用在"与世界搏斗"上。西尔维斯特的思想有时象推动水车的水流那样汹涌湍急；凯莱的思想总是强有力的、稳定的、平静的。凯莱极少允许他自己用书面表达任何东西而不带有精确的数学陈述的严谨——本章开始引用的比喻只是一个极少有的例外；西尔维斯特几乎一谈到数学就会立刻变得几乎带有东方的诗意，他那遏止不住的热情往往使他仓促行事。然而，这两个人成了知交，在一些不管他们两人中哪一个做出的最好的工作上都互相鼓励，例如，在不变量理论和矩阵理论上都是如此(后面要讲到)。

两个人的性格既然是这样，他们的友谊的进程并不总是融洽的就不足为奇了。西尔维斯特经常处在爆发点上，凯莱则平静地坐在安全阀上，相信他的容易激动的朋友很快就会冷静下来，那时他就能够平静地重新开始他们的讨论，好象西尔维斯特从未发过火似的；而西尔维斯特那一方则不顾他的急性子的轻率——直到他为了另一件事发怒为止。在很多方面，这奇怪地志趣相投的一对，就象一对度蜜月的夫妻，只不过这友谊的一方从来不发脾气。虽然西尔维斯特比凯莱大七岁，我们仍从凯莱开始。西尔维斯特的生活很自然地闯入凯莱生活的平静的缓流，就象一条深深的河流当中一块粗糙的石头。 380

阿瑟·凯莱于1821年8月16日出生在萨里的里士满，那时他的父母在英国暂住，他是他们的第二个儿子。在他的父亲这方面，凯莱把他的家系追溯到诺曼征服(1066年)的时代，甚至更早，追溯到在诺曼底的一个男爵的家世。这是一个有才华的家族，象达尔文的家族一样，可以给学遗传学的学生们提供许多可以参考的材料。他的母亲玛丽亚·安东妮娅·道蒂，有人说她有俄国血统。他的父亲是一个从事俄国贸易的英国商人；阿瑟是在他的父母定期回英国的一次探望中出生的。

1829年阿瑟八岁时，这个商人退休了，从此在英国定居。阿瑟被送到布莱克里什的一所私立学校，后来，在他十四岁时，又被送到伦敦的国王学院。他很早就显示出数学天才。他卓越才能的最初展现，和高斯一样，年轻的凯莱在长数值计算方面发展了惊人的技巧，他做这些计算是为了娱乐。在开始正式学习数学时，他很快就超过了学校里的其他学生，不久，他象后来升入大学时那样，成为特别出众的学生。他的教师们一致认为这孩子是个天生的数学家。他应该以数学作为他的职业。凯莱的教师们和伽罗瓦的教师们形成了鲜明的对照，他们从一开始就看出了他的才能，给了他一切鼓励。一开始，退休的商人激烈反对他的儿子成为数学家。但是最后他终于被学校的校长说服了，他同意了，给了他祝福，也给了钱。他决定把他的儿子送到剑桥去。

凯莱十七岁时在剑桥大学三一学院开始了他的大学生活。在他的同学中，他被看作一个对看小说有一种古怪的热情的“十足的数学家”。凯莱确实终生都热衷于阅读有些夸张的小说，这些小说现在被认为是古典小说，它们曾经使十九世纪四十年代和五十年代的读者着迷。他似乎最喜欢司各脱，其次是简·奥斯汀。后来他读了萨克雷的作品，可是不喜欢他；他从来不能把狄更斯的小说读

下去。拜伦的叙事诗博得了他的赞赏，虽然他那有几分清教徒式的、维多利亚时代的口味，使他厌恶许多最好的东西，他也从来没有读过有趣的轻浮子弟《唐·璜》。莎士比亚的戏剧，特别是喜剧，是他终生都喜爱的。在比较严肃的——或者比较枯燥乏味的——方面，他一再阅读格罗特的冗长的《希腊史》和麦考莱的文体优美的《英国史》。他在中学学的古希腊文，是他终生保持的阅读语言，他用法文阅读和写作，象用英文一样容易，在他读遍了维多利亚时代的古典著作(或它们使他厌倦了)以后，他的德文和意大利文知识给他提供了许多阅读材料。欣赏严肃的小说只是他的一种消遣；我们继续讲下去，就会提到其它的消遣了。

381

凯莱在剑桥大学读完三年级时，他在数学上已远远超出了其他人，以至主考人在他的名字下面画了一条线，把这个年轻人归入"在第一名之上"的最出众的一类。1842年凯莱二十一岁时，是剑桥大学数学荣誉学位考试的老资格一等及格者，同年他又取得了争取史密斯奖金的更困难的考试的第一名。

按照一个极好的计划，凯莱这时有希望得到特别研究生奖学金，这笔奖金能够使他在几年内做他想做的事。他被选为为期三年的三一学院特别研究生和助理导师。要是他愿意担任圣职，他的任期可能还会延长，但是虽然凯莱是英国基督教圣公会的教徒，他也不能忍受为了紧紧抓住他的工作，或为了得到一个更好的工作，而去当个牧师的想法——很多人是这样做的，既不扰乱他们的信仰，也不扰乱他们的良心。

他的职责很轻松，几乎到了没有责任的程度。他带几个学生，但是人数不多，不至于影响他自己或他的工作。他尽量利用他的自由，继续他在上大学时就已开始的数学研究。象阿贝耳、伽罗瓦，和其他许多在数学上取得很大成就的人一样，凯莱也到大师们的著

作中去寻找他的灵感。他的第一项工作就是从他对拉格朗日和拉普拉斯的研究中产生出来的，它发表于1841年，那时他是一个二十岁的大学生。

在取得学位之后，凯莱除了他想做的事以外，没有其他事情要做，他在第一年发表了八篇文章，第二年发表了四篇，第三年发表了十三篇。当最后一篇发表时，这个年轻人还不到二十五岁，这些早期发表的文章，规划了他在此后五十年内要从事的大部分工作。他已经开始了n维几何(这是他首先开始的)、不变量理论、平面曲线的枚举几何学的研究，以及他对椭圆函数理论的特殊贡献。

在这个成果极其丰富的时期，他不仅只是刻苦工作。他在1843年二十二岁时，以及其后他二十五岁离开剑桥大学以前，也曾偶尔逃到欧洲大陆去度过愉快的假期，他徒步旅行，爬山，画水彩画。虽然他看上去单薄虚弱，实际上却有强健坚强的体质，他常常整夜在丘陵起伏的乡间跋涉，早饭时又象朝露一样清新地出现，准备花上几个小时研究他的数学。在第一次旅行期间，他访问了瑞士，进行了大量的登山运动。就这样，他开始了另一个终生的爱好。他对"现代数学的范围"的描述，决不仅仅是一个从未爬过山，或从不曾在一片美丽的乡间漫步的教授的学究式的练习，而是一个亲身熟悉大自然的人作的精确的比喻。

在第一次出国度假的最后四个月期间，他熟悉了意大利北部。在那里，他开始了另外两项爱好，它们将要在他以后的生活中给他以慰藉，这就是对建筑的欣赏和对优秀的绘画的喜爱。他自己喜欢水彩画，在这方面表现出明显的才能。由于他对优秀的文学作品、旅行、绘画、建筑的爱好，以及他对大自然美的深刻领悟，他就有了充分的东西，使他不至于退化成一般文学作品中的"纯数学家"——这些作品大多数是由这样一些人写的．他们可能确实知道一

些卖弄学问的大学数学教授，但是他们在生活中从来没有见过一个活着的、真实的数学家。

1846年凯莱二十五岁时离开了剑桥。除非他有可能把他的良心和圣职的拘束调和起来，否则他不可能得到一个数学家的位置。而作为一个数学家，凯莱无疑感到化圆为方也比这更容易。不管怎样，他离开剑桥了。法律以及印度事务部的文官职位，不时吸引着英国许多最有希望的有才智的人才，现在法律吸引了凯莱。看到十九世纪英国有多少第一流的大律师和大法官是剑桥大学数学荣誉学位考试的一等及格者，多少有点令人吃惊，但是不能因此就象一些人声称的，数学训练是进入法律界的很好的准备。看来比较肯定的是，让一个象凯莱这样有着明显数学天才的年轻人，去起草遗嘱、转让证书和契约，也许是社会的愚蠢行为。 383

按照那些希望进入比较高级的(就是说，在初级律师行业以上的)英国律师界的人们的惯例，凯莱进了林肯法律协会，以便为取得律师资格作准备。在一位名叫克里斯蒂的先生手下当了三年学生以后，凯莱在1849年取得律师资格。他当时二十八岁。当上律师以后，凯莱作了一个聪明的决定，不受法律的驱使。他下决心不腐化堕落，他拒绝的事务比他接受的事务还要多。整整十四年他坚持这样做，过着富裕的生活，同时有意避开使自己沉溺于赚钱的机会，以及一些著名大律师那种多少有点靠吹牛获得的名声，这样，他可以积攒下足够的钱(但决不更多)，使他能够继续进行他的工作。

在使人变得迟钝的、枯燥的法律事务的日常工作中，他的耐心堪称模范，几乎象圣徒一般，他在他那一行业(财产转让业务)方面的声誉也稳步上升。甚至有记载说由于他所经办的一件模范法律工作，他的名字已载入一部法典。但是也有极为可喜的记录，凯莱并不是一个软弱无力的圣人，而是一个正常的凡人，必要时他也

会发脾气。一次，他和他的朋友西尔维斯特正在凯莱的办公室里讨论不变量理论中的一个论点，仆人进来了，交给凯莱一大束需要他仔细察看的法律文件。看了一眼他手上的东西，他不禁摇晃了一下，回到现实中来。为了替舒舒服服的委托人已经过多的收入省下几个英镑，一天天的把时间花在解决一些琐碎的争端上，这种前途对于这个真正有头脑的人说来，实在是太过份了。他厌恶地大叫了一声，轻蔑地诅咒他手中的“该死的垃圾”，把这束材料扔在地板上，就接着谈他的数学。显然，这是凯莱有生以来唯一的一次发脾气。在十四年的律师生涯以后，凯莱一有机会就放弃了它。但是在他从事律师的苦役期间，他发表了两三百篇数学论文，其中许多现在是第一流的。

由于西尔维斯特是在法律阶段进入凯莱的生活的，我们将在这里介绍他。

詹姆斯·约瑟夫——首先介绍他出生时用的姓名——是几个384兄弟姊妹中最小的一个，1814年9月3日出生在伦敦一个犹太人的家庭。关于他的童年时代，人们知道得很少，因为西尔维斯特对他的早年生活保持沉默。他的长兄移居美国，在那里用了西尔维斯特的姓氏，家庭的其他成员也效法他的榜样。但是为什么一个正统的犹太人会给自己戴上一个为基督教教皇所喜爱，而为犹太人所敌视的姓氏，这始终是一个谜。也许是那位长兄有点幽默感，无论如何，亚伯拉罕·约瑟夫的儿子、普通的詹姆斯·约瑟夫，从此，而且永远，变成了詹姆斯·约瑟夫·西尔维斯特。

象凯莱一样，西尔维斯特的数学天才很早就表现了出来。他在六岁至十四岁期间上私立学校。他第十四年的最后五个月是在伦敦大学度过的，在那里的德·摩根指导下学习。在一篇写于1840

年，题目有些神秘的论文《论共存的导数》中，西尔维斯特说："为了这个词[再现]我得感谢德·摩根教授，我可以为曾经是他的学生而自豪。"

1829年，西尔维斯特十五岁时进了利物浦的皇家学院，在那里呆了不到两年。他在第一年结束时获得数学奖。到这时他在数学方面已经远远走在他的同学们前面，因而为他单独开班。在皇家学院时他还获得另一项奖。这特别有意思，因为它使西尔维斯特与美国建立了第一次联系，他将在那里度过他一生中最幸福——也是最不幸——的时光。他在美国的哥哥，职业是保险统计师，他向美国抽彩给奖法承包人的理事们建议，由他们将排列方面的一个难题交给年轻的西尔维斯特。这位初露头角的数学家的解答是完美的，实际上是理事们最满意的。他们给了西尔维斯特一笔五百美元的奖金。

在利物浦度过的岁月远远谈不上幸福。西尔维斯特一向勇敢、坦率，他毫不掩饰他的犹太信仰，纵然落入学院里那些幽默地自称为基督教徒的、强壮的年轻野蛮人手中，遭受严重迫害，他仍然骄傲地宣布他信奉犹太教。但是一只孤独的孔雀处在一群愚蠢的、爱唠叨的樫鸟中，忍耐毕竟是有限的，西尔维斯特最后逃到了都柏林，口袋里只有几个先令。幸而一位远亲在街上认出了他，把他带回家，纠正了他的错误，给了路费让他回到利物浦。

这里，我们记下一个奇怪的巧合：都柏林，或者至少它的一个市民，在这个来自利物浦的宗教避难者第一次来访时，给了他体面的人道的待遇。大约十一年后，当他第二次来访时，都柏林三一学院授予他学士和硕士学位，而他自己的母校剑桥大学却拒绝授予他学位，因为他是一个犹太人，不能在称为三十九条款的、毫无意义的声明书这个奇怪的混合物上签名，那是英国教会对于有理性的

人所允许的，作为最低限度的宗教信仰而规定的。这里可以补充一下，1871 年英国高等教育终于摆脱教会魔掌的束缚时，西尔维斯特立即被授予了名誉学士和硕士学位。还应该指出，在这件事情上，如同在其他困难上一样，西尔维斯特不是一个温顺的、长期受苦的殉难者，他在肉体上和精神上都充满了力量和勇气，他知道怎样在战斗中制服恶棍，为自己赢得正义——他常常这样做。事实上他是一个天生的战士，有着狮子般奔放不羁的勇气。

1831 年，刚过十七岁时，西尔维斯特进了剑桥大学圣约翰学院。由于身患重病，中断了大学学业，直到 1837 年才参加数学荣誉学位考试。他名列第二。击败他的那个人，作为数学家，从此不再听见人说起。西尔维斯特因为不是基督教徒，没有资格参加史密斯大奖赛。

在知识兴趣的广度方面，西尔维斯特和凯莱相似。在体格上，这两个人毫无共同之处。凯莱，如我们所知，虽然瘦长而结实，很有耐力，但外貌虚弱，态度腼腆而谦让。西尔维斯特矮胖粗壮，硕大的头颅稳稳地安放在宽阔的肩上，给人以力气极大，充满活力的印象，他也确实是这样的。他的一个学生说，他很可以摆好姿势，为查理·金斯利的小说复活的赫里沃德中的同名人物画像。至于数学以外的兴趣，西尔维斯特所受的限制比凯莱少得多，也远比他自由。他对希腊文和拉丁文古典文学原著知识渊博而精确，直到他最后一次生病时，他始终保持着对它们的爱好。他的许多论文都因为从这些古典文学中摘录了引文而更加生动。这些引文总是非常恰当而且真正阐明了眼前的问题。

386 关于他从其他文学作品中引用的隐喻，也可以这样说。文学学者如果浏览一下四卷《数学论文集》选集，从注明出处的引文和没有清楚说明出处而抛出的奇怪的暗示中，设想西尔维斯特广

阔的阅读范围，可能是很有趣的。除了英国和古希腊罗马的古典文学以外，他对法国、德国、意大利的原著也很熟悉。他对语言和文学形式的兴趣是敏锐深刻的。不变量理论的生动术语，绝大部分归功于他。在谈到他从希腊和拉丁制造厂中伪造出的、范围广泛的新词汇时，西尔维斯特称他自己为“数学上的亚当。”

假如他不是一个非常伟大的数学家，在文学方面他很可能比一个仅仅是过得去的诗人还要稍好一些。诗和作诗的“规律”，一生都强烈地吸引着他。他为自己留下了许多诗（其中有些发表过），有一扎是以十四行诗的形式写的。他的诗歌主题有时会引人发笑，但是他常常表示他懂得什么是诗。在艺术方面的另一个兴趣是音乐，他是一个很有造诣的业余爱好者。据说他一度跟高诺德学声乐。他还常常在工人的集会上为他们唱歌。他对他的“高音C”，比对他的不变量更为自豪。

在凯莱和西尔维斯特之间的许多明显的差别中，有一点可以在这里提一提：凯莱博览其他数学家的著作；西尔维斯特却发现要想掌握别人所作的工作，使人厌烦得受不了。他在晚年时有一次请了一个年轻人来教他一点关于椭圆函数的东西，因为他想把它们应用到数论上（特别是用在分类理论上，这种理论讨论把一个给定数类——如全由奇数组成的数类，或一些为奇数、一些为偶数的数类——中的数相加，以得到一个已知数能有多少种方式）。大约上了三次课，西尔维斯特就放弃了学习的打算，而在给这个年轻人讲解他自己在代数方面的最新发现了。但是凯莱好象什么都知道，就连他自己很少涉猎的一些学科也知道，全欧洲的作家和编辑都向他征求他作为审查人的意见。凯莱从来不会忘记他见过的东西；西尔维斯特却连记住他自己的发明都很困难，有一次甚至争论他自己的某一个定理可能成立。甚至每一个在工作的数学家都知道

的比较微小的东西，对于西尔维斯特也是永远使他惊奇和高兴的源泉。结果，几乎任何数学领域都给了西尔维斯特一个足资发现的迷人的世界，而凯莱平静地扫视一下这一切，看见他想要的，拿起来，又继续进行新的工作。

1838年，西尔维斯特二十四岁时，第一次得到固定工作，那就是在伦敦大学的大学学院担任自然科学（一般科学，特别是物理学）教授，在那里，他的老师德·摩根是他的同事。西尔维斯特虽然在剑桥大学学过化学，而且终生保持对它的兴趣，他却发现去教科学与他的志趣完全不合，大约两年以后就放弃了教书。与此同时，他在二十五岁这个不寻常的年轻的年龄上，被选为皇家学会的会员。西尔维斯特的数学成就是那样突出，它们不可能不得到承认，但是并没有帮助他得到一个适当的位置。

西尔维斯特在他生涯的这个时刻，遇到了他一生中最奇特的一次不幸。这要看我们怎样看待它了，这场灾难是愚蠢的，荒唐可笑的，或者说是悲惨的。1841年——布尔发表他关于不变量的发现这一年——西尔维斯特自信乐观，满怀他一惯的热心，跨越大西洋去就任弗吉尼亚大学的数学教授。

西尔维斯特在这所大学大约只忍受了三个月。大学当局拒绝惩罚一个侮辱了他的年轻人，促使这位教授辞职。在这次不幸的经历之后，有一年多时间，西尔维斯特白费力气地想找到一个合适的位置，他向哈佛大学和哥伦比亚大学提出申请，但都没有成功。失败以后，他回到了英国。

西尔维斯特在美国的经历，使他在此后十年中饱尝教书的艰辛。回到伦敦以后，他成了一家人寿保险公司的精力旺盛的保险统计员。这种工作对一个富于创造力的数学家，实在是一桩有害无益的苦差事，而西尔维斯特几乎不再是一个数学家了。然而，他

收了几个学生私人授课，因而仍然保持精神抖擞，学生中有一个今天在世界各国都享有盛名，受到尊敬。这时是十九世纪五十年代初期，那是妇女适合于“土豆、梅干、三棱镜”的时代，人们认为青年女子除了擦脂抹粉和虔诚孝敬以外，不需要看重别的了。所以发现西尔维斯特的最出色的学生是一个年轻女子时，人们相当惊讶，这个年轻女子就是弗洛伦斯·南丁格尔，对顽固的军队官僚作风提出愤怒的抗议，把体面的新法卫生带进陆军医院的第一个人。西尔维斯特这时三十好几了，南丁格尔小姐比她的老师小六岁。就在南丁格尔小姐去参加克里米亚战争的同一年(1854年)，西尔维斯特摆脱了他临时凑合的谋生之路。 388

但是在这以前他又走错了一步，弄得他没有地方可去。1846年三十二岁时，他进了坦普尔法学协会（在那里，他腼腆地说他自己是“一只在鹰群中筑巢栖身的鸽子”)，准备从事法律职业，1850年取得了律师资格。这样，他和凯莱终于走到一起来了。

当时凯莱二十九岁，西尔维斯特三十六岁，两个人都没有从事真正是天性召唤他们去做的工作。三十五年以后西尔维斯特在牛津大学演讲时，衷心地赞扬凯莱，“凯莱，虽然比我年轻，是我精神上的前辈——他第一个打开了我的双眼，清除了我眼里的杂质，从而使它们能看见并接受我们普通数学信念中更高深的奥秘。”1852年，在他们开始交往以后不久，西尔维斯特提到“凯莱先生，他惯常讲的是珍珠宝石。”凯莱先生那方面也常常提到西尔维斯特先生，但他总是好象无动于衷。西尔维斯特最早以书面形式迸发出他的感激之情，是在1851年出版的一篇论文中，他在文章中说：“上面阐明的公理[它是他与线性等价二次形式的小行列式之间的关系]部分是在同凯莱先生的一次谈话过程中提出的……我感激他使我恢复了享受数学生活的乐趣。……”

或许西尔维斯特言过其实了，但是他的话是有些道理的。如果说他不是恰好复活了，他至少得到了一对新的肺：从他遇到凯莱那一时刻开始，他就呼吸着数学，并且生活在数学中，直到生命结束。这两个朋友常常围绕着林肯法律协会的院子散步，一面讨论他们两人都在创造的不变量理论；后来，当西尔维斯特搬走时，他们在距离彼此的住处大约一半的地方碰头，继续他们的数学讨论。当时两人都是独身。

代数不变量的理论开始于一个极为简单的观察，不变量概念的各种各样的扩展，都是由代数不变理论自然产生的。正如我们将在布尔那一章注意到的，这个想法最早的例子出现在拉格朗日的著作中，以后又从拉格朗日进入高斯的算术工作。但是这两个人谁也没有注意到，在他们面前的这个简单然而值得注意的代数现象，是一个广阔理论的萌芽。当布尔继续并大大扩展了拉格朗日的工作时，他似乎也没有充分认识到他所发现的是什么。除了有一点小小的不满以外，西尔维斯特在优先权这件事上，对布尔总是公正和慷慨的，凯莱，当然总是公平的。

389

任何曾经看见过解二次方程的人，都能懂得上面所提到的简单观察，它不过就是解二次方程而已。方程 $ax^2+2bx+c=0$ 有两个相等的根的充分必要条件是 b^2-ac 等于零。让我们把变量 x 替换成它的用 y 表示的值，y 由变量 $y=(px+q)/(rx+s)$ 得到。这样，x 就要由对 x 解这个变换的结果来替换，即用 $x=(q-sy)/(ry-p)$ 替换。这个变换把已知方程变成了另一个关于 y 的方程；比如说新方程是 $Ay^2+2By+C=0$。进行代数运算，我们发现新的系数 A, B, C 能用旧系数 a, b, c 表示如下：

$$A=as^2-2bsr+cr^2,$$

$$B=-aqs+b(qr-sp)-cpr,$$
$$C=aq^2-2bpq+cp^2。$$

由此很容易得出(如果必要的话，硬性化简，虽然有一个更简单的方法可以推出结果而无需实际计算 A, B, C),

$$B^2-AC=(ps-qr)^2(b^2-ac)。$$

现在 b^2-ac 被称为关于 x 的二次方程的判别式，因此关于 y 的二次方程的判别式是 B^2-AC，我们已经指出，变换方程的判别式等于原始方程的判别式乘以因子 $(ps-qr)^2$，这个因子只依赖于把 x 用 y 表示出来的变换 $y=(px+q)/(rx+s)$ 的系数 p, q, r, s。

布尔首先(在1841年)观察到在这个特殊的平凡东西中有些值得注意的地方。每一个代数方程都有一个判别式，那就是说，有某个表达式(诸如对二次方程的 b^2-ac)，当方程有两个或更多的根相等时，而且仅仅在这种条件下，这个表达式等于零。布尔首先 390 提问，每一个方程的判别式，当其 x 用有关的 y 代替(如在二次方程中的做法)时，是否除去一个只依赖于变换系数的因子外，判别式保持不变？他发现是这样的。接着他问，除了判别式以外，是否还有其它由系数组成的表达式，具有在变换下不变的同样性质。他发现一般四次方程有两个具有这样性质的表达式。然后另外一个人，才气焕发的年轻的德国数学家 F. M. G. 艾森斯坦(1823—1852)，继续扩展布尔得出的一个结果，在1844年发现了一些既包括原始方程的系数又包括 x 的表达式，它们呈现出同种类型的不变性：原来的系数和原来的 x 变成了变换了的系数和 y(象对二次方程那样)，由原始量组成的这些表达式，与从变换后的量组成的表达式，只差一个因子，这个因子仅依赖于变换的系数。

布尔和艾森斯坦两人都没有找出这样的不变表达式的一般方法。凯莱就是在这一点上，在1845年以他开拓性的论文«论线性

变换理论》进入了这一领域。那时他二十四岁。他向自己提出的问题是，找出能够给他以所描述的类型的所有不变量表达式的统一方法。为了避免冗长的解释，问题是用方程来说明的；实际上它是用其他方法解决的，但这点在这里并不重要。

由于不变量这个问题在现代科学思想中极为重要，我们举出另外三个例子来说明它的意义，这三个例子都不涉及到符号和代数。想象画在一张纸上的、由相交的直线和曲线组成的图形。不把纸撕破，随意把它弄皱，试着想想什么是图形在弄皱前和弄皱后保持不变的、最明显的性质。对在一张橡皮上画的图形做同样的事，以能想出的任何复杂的方式拉伸橡皮，但不要把它撕破。在这种情形下，显然面积和角度的大小、线的长度都不会保持"不变"。通过适当拉伸橡皮，直线可以被扭曲成你希望的几乎任何形状的曲线，同时原来的那些曲线——或至少一部分——可以被变成直线。然而关于整个图形仍然有某种东西没有改变；正是它的简单和明显使它被忽视了。这就是在图形的任意一条线上，标志着其它线段与已知线段相交之处的点的顺序。这样，如果沿着从 A 到 C 的已知线段移动一只铅笔，在扭曲前我们必须通过这条线上的点 B，那么我们在扭曲后从 A 到 C 的途中仍然必须经过点 B。顺序(如所描述的)在一些特殊的变换下是不变的，比如说，在把一张纸揉成一个纸团或者拉伸一张橡皮的变换下是不变的。

391

这个例子看起来也许没有什么意思，但是任何读过广义相对论中"世界线"的相交的非数学描述的人，和想起两条这样的线的一个交点标志着一个物理"点事件"的人，都会看出我们所讨论的，与我们物理世界的图画中的一幅是同样的东西。有力到足以掌握这些复杂的"变换"，实际上足以产生不变量的数学方法，是许多工作者的创造，其中包括黎曼、克里斯托费尔、里奇、莱维-奇维塔、

李，和爱因斯坦——这些名字全都是相对论的通俗解释的读者们所熟知的；这整个广阔的纲领是由代数不变量理论的早期工作者们开始的，而凯莱和西尔维斯特是该理论的真正奠基人。

第二个例子是想象在一根绳子上套一个结，把绳子两端系在一起。拉动这个结，让它沿着绳子移动，我们把它任意扭成各种各样的"形状"。在这种情形下，这些扭曲就是我们的变换，那么在所有这些扭曲下，什么保持"不变"，什么"保留"下来了呢？显然，结的形状和大小都不是不变的。但是结本身的"式样"是不变的；这点无需详细说明，只要我们不把绳子的端点解开，不管我们把绳子怎样，结都是同一种式样的。还有，在较老的物理学中，能量是"守恒的"；宇宙中的总能量被假定为一个不变量，在从一种形式，例如电能，到其它形式，诸如热和光的一切变换下，总能量是同样的。

我们对不变量的第三个例子，需要比提到物理科学更多一点的内容。一个观察者根据三个互相垂直的轴和一个标准的精密计时表，固定他在空间和时间中的"位置"。另一个观察者相对于第一个观察者而运动，他希望描述同第一个观察者描述的一样的物理事件。他也有他的时空参照系；他相对于第一个观察者的运动，能够表示成他自己的坐标(或第一个观察者的坐标)的一个变换。按照所考虑的特殊类型的变换，这两个观察者提供的描述在数学形式上可能不同，也可能相同。如果他们的描述确实不同，那么很显然，这个差别不是他们两个观察的物理事件所固有的，而是他们的参照系和变换所固有的。那么就提出了这样的问题，即在数学上只把那些不依赖任何特殊的参照系，因此能够被所有的观察者表示成同一种形式的自然现象的数学表示，用公式表示出来。这等同于寻找一个变换的不变量，这个变换表示了相对于任何其它参照系的一个参照系的时空中最一般的变换。这样，寻找复杂的

392

自然规律的数学表示的问题，就被不变量理论的一个可以考虑的问题代替了。当我们讲到黎曼时，对这个问题还要多说一些。

1863年剑桥大学设立了一个新创立的萨德勒数学教授席位，并向凯莱提出了这一职位，凯莱很快就接受了。同一年，他四十二岁，与苏珊·莫兰结婚。虽然他作为数学教授挣的钱比他从事法律工作要少，对这个改变他并不后悔。过了一些年，大学事务重新安排，凯莱的薪金提高了。他的职责也由每学期讲一门课增加到两门课。他的生活现在几乎完全奉献给数学研究和大学行政。在大学行政管理方面，他充分的办事训练，平和的脾气，不受个人情感影响的判断，以及法律知识都证明是非常宝贵的。他从来没有很多话要说，但是他所说的通常都被当作最后的决定接受下来，因为他从来都是经过深思熟虑之后才说出他的看法。他的婚姻和家庭生活是幸福的，他有两个孩子：一个儿子和一个女儿。随着他年事日高，他的头脑仍然象以往一样强健有力；他的性格，如果说有什么改变的话，那就是变得更加温和了。要是有人在他面前说出武断的看法，他一定心平气和地提出抗议。对于从事数学的年轻人和初学者，他总是慷慨地给予帮助、鼓励和正确的忠告。

在他任教授期间，妇女受高等教育是一个争论得很热烈的问题。凯莱把他全部平静的、有说服力的影响放在文明一边，而且主要是由于他的努力，妇女最后被允许作为学生(当然是在她们自己的修道院里)进入中世纪的剑桥大学这个修道士般隐蔽的地方。

393

当凯莱在剑桥大学安静地从事数学研究时，他的朋友西尔维斯特仍然在和世界搏斗。西尔维斯特终生未婚。1854年他四十岁时，申请在伍尔维奇的皇家军事科学院的数学教授位置。他没有得到这个职位，也没有得到他申请的伦敦格雷沙姆学院的另一个职位。他的试用演讲对主管委员会来说是好得过份了。不过获

胜的伍尔维奇的候选人第二年去世了，西尔维斯特收到了任命。在他得到的不太慷慨的薪金中，还包括使用公共牧场的权利，由于西尔维斯特既不养马、养牛，也不养羊，他自己又不吃草，所以很难看出他从这个极珍贵的恩惠中得到了什么特别的好处。

西尔维斯特在伍尔维奇担任这个职位达十六年之久。直到他1870年五十六岁时因为"超龄"被迫退休为止。他仍然是精力旺盛的，但是拿针对他的死板的官僚作风毫无办法。他的许多伟大的工作仍然有待以后完成呢，但是他的上司们认为理所当然的，他这样年纪的人一定是完了。

他被迫退休的另一个方面，是激起了他的全部斗争本能。说清楚了就是，当局试图欺骗西尔维斯特，剥夺理应归他所有的部分生活津贴。西尔维斯特没有低头屈服。使这些行骗未遂的骗子们懊恼的是，他们明白了他们吓唬的不是一个温顺的老教授，而是一个能进行有力还击的人。他们付了全部津贴，退缩了。

在西尔维斯特的物质生活方面发生所有这些不愉快的事情的同时，在科学方面他是没有甚么可抱怨的。他常常得到各种各样的荣誉，其中有科学界人士最珍视的一项荣誉，即法兰西科学院的外籍通信院士。由于斯泰纳的去世，在几何部有了一个空缺，西尔维斯特于1863年当选为该部的通信院士。

西尔维斯特从伍尔维奇退休后，住在伦敦，写诗，阅读古典文学作品，下棋，一般说来过得很快活，但是没有做多少数学研究。1870年他出版了一本小册子《诗律》，他很重视它。然后，在1876年他六十二岁时，突然再次回到数学生活中。这个"老"人是根本压制不住的。

1875年，约翰斯·霍普金斯大学在古尔曼校长的卓越领导下，394
在巴尔的摩建校。有人劝古尔曼在开始时聘请一位杰出的古典文

学学者和一位最好的数学家，作为他的教员核心。他们告诉他，其他的一切都会跟上去的，事实也确实是这样。西尔维斯特终于得到了一个实际上他可以干他想干的事，并且能够充分发挥他的才干的工作。1876 年他再次越过大西洋，在约翰斯·霍普金斯大学担任了教授。他的薪金每年五千美元，在当时算是丰厚的。在接受这个聘请时，西尔维斯特提出了一个奇怪的条件：他的薪金“要用黄金支付”。也许他是想到了伍尔维奇，他们给他的是相当于二千七百五十美元(加上牧场)的钱；他希望肯定，这一次他真正能得到应该得到的，不管有没有退休金。

从 1876 年到 1883 年，西尔维斯特在约翰斯·霍普金斯大学度过的这几年，也许是他直到那时所过的最幸福、最平静的几年。虽然他不必再去“和世界搏斗”，但他也没有躺在他的荣誉上睡觉。他好象年轻了四十岁，又成了一个精力旺盛的年轻人，燃烧着热情，焕发出新的思想。他深深感激约翰斯·霍普金斯给他提供了机会，使他在六十三岁时开始了他的第二次数学生涯，他在 1877 年校庆典礼上的讲话中，毫不迟疑地公开表示了他的感激之情。

在这篇讲话中，他概述了他在数学与研究方面希望做的事(他确实做了)。

“有一些东西称为代数的形式。凯莱教授称它们为 Quantics (代数形式)。〔例：$ax^2+2bxy+cy^2$，$ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3$；第一式中的数字系数 1, 2, 1，第二式中的数字系数 1, 3, 3, 1，是二项式系数，与帕斯卡三角形(第五章)中的第三和第四行一样；按次序下一个是 $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$。〕确切地说，它们不是几何形式，虽然在某种程度上，它们可以体现在几何形式中；它们是实现的过程，或形成的运算的形式，实际上是代数量。

“每一个这样的代数形式都与无穷多种其它形式相联系，这些

形式可以被看做由第一种形式产生的，或在它的周围浮动着的一种大气——但是由于这些从原始形式中推导出来的存在物，这些发散物是无限的，人们发现它们有可能由合成或者可以说由混合一些有限数目的基本形式而得到，这些基本形式可以象在它们所属的代数形式的代数谱中那样，叫做标准射线。正如现在［1877 395 年，甚至今天］物理学家们的一项主要工作，是确定每一种化学物质的光谱中的固定的线，一大批数学家的目的和目标，是找出这些代数形式的基本的导出形式，它们称为共变式〔已经描述过的那种'不变'表示式，既包含变量，也包含形式或代数形式的系数〕和不变量。"

对于数学读者，很明显，西尔维斯特在这里给了基本方法一个绝妙的类比法，给了一种给定的形式以合系；对非数学读者，可以建议他们重读这一段，以便领会西尔维斯特所谈到的代数的精神，因为这种类比，实在是一种与"通俗的"数学很接近的方法，也是"通俗的"数学的一个很好的例子，和我们在一年的进展中可能找到的同样美好。

西尔维斯特接着在一个脚注中指出，"我目前有一个班，有八个到十个学生；听我关于现代高等数学的演讲。他们当中有一个是位年轻的工程师，他从早上八点到晚上六点忙他办公室的任务，当中有一个半小时用来吃饭和听讲，他对我所见过的，我所说的〔某一个定理〕，给我提供了最好的证明，也是表达得最好的证明……"西尔维斯特已经年逾六十，他以一个预言家的热情，鼓舞别人去看他所发现的，或者将要发现的乐土。事实上这就是最好的讲授，也是足以证明先进的教学的唯一的水平。

关于这个收养了他的国家，他还有一些补充的话要说(在脚注中)："我相信，全世界没有一个国家象在美国这样，有特点的能力

备受重视，而仅仅拥有财富（尽管我们听见许多关于金钱万能的事）简直无足轻重……”

他也谈到他那休眠状态的数学本能怎样重新被唤醒，焕发出丰富的创造力。“要不是这个大学〔约翰斯·霍普金斯〕的一个学生坚持要跟我学习现代代数的迫切愿望，我永远也不会从事这样的研究……他非常尊敬我，而又极其固执地坚持他的目标。他要学新代数（天知道他是从哪儿听到的，因为在这个大陆上，几乎没有人知道它），要末学它，要末什么也不学。我不得不让步，结果怎样呢？为了阐明我们的教科书上一处含糊不清的解释，我绞尽了脑汁，我以重新活跃起来的热情，一头扎进了一个我已经放弃了多年的课题，找到了过去长时间吸引了我的注意力的精神食粮，它也许要在今后几个月中有利地占据我全部的思考能力。”

396

西尔维斯特的几乎任何公开演讲或篇幅较长的论文，除了技术细节以外，都包含许多关于数学的可以引证的东西。从他的著作集中，可以为初学者，甚至可以为有经验的数学家们，选编一本使人耳目一新的选集。也许没有任何其他数学家象西尔维斯特这样，通过他的写作，如此透彻地展示了他的个性。他喜欢与人交往，并用他自己对数学的富于感染力的热情去影响他们。因此他说（他的情况确实是这样的）：“只要一个人仍然是一个喜欢群居的、爱好交际的人，他就不能不把他正在学的东西传达给别人，不能不通过别人去宣传在他脑子里沸腾着的思想和印象，这是一种天性，尽管这样做会妨碍或削弱他的品格，使得补充他未来智慧的最可靠的源泉枯竭。”

我们可以把西尔维斯特的描述与凯莱关于现代数学的范围的描述并列，作为它的姊妹篇。“假如我要不得不长久地、独自拥有现代数学所占据的如此广阔的领域，我会感到难过的。数学不是

一本局限于封面和铜钉之间的装钉成册的书，只需要耐心就可以得到它的内容；它不是一座矿，它的宝藏可以花费长时间去占为已有，但它只存在于有限的矿脉之中；它不是一片土壤，其肥力能够因连续的丰收而耗尽；它不是一片大陆或海洋，可以规划它的面积，限定它的外形；它象空间一样无限，而对于它的抱负来说，它发现空间也太狭窄；它可能发生的情况是无限的，象那在天文学家的注视下永远有天体挤进去、永远在增加的宇宙一样无限；它象意识、生命一样，不可能被限制在指定的范围内、或简化成一些永远正确有效的定义；它仿佛蛰伏在每一个单原子中，在每一个物质原子中，在每一片树叶、每一个花蕾和细胞中，永远准备着突然间迸发出新型的植物和动物实体。"

1878年，西尔维斯特创办《美国数学杂志》，并经约翰斯·霍普金斯大学委任他担任主编。这个杂志正确的方向——研究——给了美国数学以巨大的推动。今天它在数学方面仍然欣欣向荣，但是经费十分困难。 397

两年以后，在西尔维斯特的生涯中发生了一件古典文学方面的意外事件。我们借用费比恩·富兰克林博士的话来讲述这件事。富兰克林继西尔维斯特之后，担任了几年约翰斯·霍普金斯的数学教授，后来是巴尔的摩《美国人》的编辑。这件事是他亲眼所见、亲耳所闻的。

"他〔西尔维斯特〕除了用拉丁文写了不少诗，还非常出色地翻译了贺拉斯和一些德国诗人的作品。他在韵律方面的力作是他在巴尔的摩时完成的，目的在于说明作诗的理论，这在他称为《诗律》的小书中举例作了说明。在皮博迪学院朗读罗莎琳德这首诗，是他一次心不在焉的有趣的表演。这首诗有四百多行，全部用罗莎琳德这个名字押韵（*i* 发长音和短音都可以）。大厅里坐满了听

众，他们期待着从倾听这首诗的奇特的经历中得到乐趣。但是西尔维斯特教授早就发现需要写大量解释性的脚注，他宣布为了不中断朗读，他先把注释统统读一遍。几乎每一条注都临时增加了一些评论，朗读者对每一条注又是那么兴致勃勃，他一点儿也没有注意到时间的飞逝，或是听众的兴趣。当他念完最后一条注时，抬头看了看钟，这才大吃一惊，发现他在开始朗读这首诗以前，已经让听众们听了一个半小时的注释，而他们是来听他朗读诗的。听众对他脸上惊讶的表情，报以一阵好心的轰笑。这时，他请求全体听众，如果有事的话可以自由退场，然后就朗读罗莎琳德这首诗。”

富兰克林对他老师的评价，极好地总结了他这个人："西尔维斯特性情急躁，缺乏耐心，但是他为人慷慨、厚道，心地善良。他对别人的工作总是极为重视，对他的学生表现出的任何才干或能力，都给予最热情的赞扬。他会为了一点微不足道的对他的冒犯而光火，但是他从不怀恨在心，总是一有机会就很高兴地忘掉争吵的原因。”

398 在拾起凯莱的生活与西尔维斯特的生活再次交叉的线索以前，我们先让《罗莎琳德》的作者谈谈他是怎样作出他最美好的一项发现，即人们称为“标准型”的发现的。〔这仅仅是指把一个已知的“代数形式”化简为一个“标准”形式。例如，$ax^2+2bxy+cy^2$可以表示为两个平方的和，如 X^2+Y^2；$ax^5+5bx^4y+10cx^3y^2+10dx^2y^3+5exy^4+fy^5$ 可以表示为三个五次幂的和，如 $X^5+Y^5+Z^5$。〕

“我在林肯法律协会的一间偏僻的办公室里，靠一瓶葡萄酒来维持日渐衰退的精力，一口气发现并发展了奇数阶的标准二元型式的全部理论，就已经做出的而言，也发展了偶数阶的标准二元型

式的理论①。这项工作是完成了，干得不错，但是也象通常那样费尽了折磨人的思考——脑子在燃烧，双脚不管是有知觉还是没有知觉，就象陷在冰桶里似的。那天晚上我们没有再睡觉。"专家们一致认为症状是不可能错的。但是要判断西尔维斯特从瓶子里喝的是甚么，它必定是醇酒。

当凯莱接受了1881—1882年度在约翰斯·霍普金斯讲半年课的邀请时，他和西尔维斯特又在专业上走到一起了。他选择了那时他正在研究的阿贝耳函数作为他的题目。六十七岁的西尔维斯特忠实地出席了他这位著名的朋友的每一次演讲。西尔维斯特前面还有多产的好几年，凯莱就没有这样多了。

我们现在简单地谈谈凯莱除了关于代数不变量理论的工作以外，对数学的三项杰出的贡献。我们已经提到过他发明了矩阵理论、n维空间几何，他关于几何的一种思想给非欧几何学以新的说明(在克莱因手里)。我们从最后一项开始，因为它是最困难的。

德扎尔格、帕斯卡、彭赛利，以及其他一些人创造了射影几何(见第五章、第十三章)，其目的是要发现那些在射影下不变的图形的性质。测量——角的大小，线的长度——及依赖于测量的定理，例如毕达哥拉斯的直角三角形最长边的平方等于其余两边的平方和的命题，不是射影的，而是度量的，它们不能用通常的射影几何处理。凯莱在几何学中的一个最伟大的功绩，就是越过了这样一个障碍。在他跨过它之前，它把图形的射影性质与度量性质分开了。从他的更高的观点看，度量几何也成为射影几何了，射影方法的巨大力量和它的灵活性，由于采用"虚"元素(例如坐标包含

399

① 许多年以后E.K.韦克福德(1894—1916)发展了这个理论的这一部分，他在第一次世界大战中丧命。"现在感谢上帝，他在这个时候与我们同在。"(鲁伯特·布鲁克)

$\sqrt{-1}$ 的点)，表明可以应用于度量性质。任何学过解析几何的人都会回想起，两个圆相交于四个点，其中两个点总是"虚的"。(有一些明显的例外情形，例如同心圆，但是这对于我们的目的足够接近了。)度量几何中的基本概念是两点之间的距离和两条线之间的角度。凯莱用另一个也包含"虚"元素的概念代替距离的概念，提供了把欧几里得几何和通常的非欧几何统一成一个更广泛的理论的方法。不用一点代数，不可能明确地说明这可能是怎样做出来的。对于我们的目的来说，注意到刚刚提到的凯莱把射影几何和度量几何统一在一起的主要进展，及其它几何的同种的统一就足够了。

当凯莱首先作出 n 维几何时，它比我们今天看来要神秘得多，因为我们已经熟悉了相对论中的四维(时空)的特殊情形。人们有时候仍然说，四维几何是人类无法理解的。这是很久以前就由普吕克尔推翻了的一种迷信；把四维图形放在一张平面的纸上是很容易的，就几何而论，整个四维"空间"也是很容易想象出来的。首先考虑一个相当特殊的三维空间：在一个平面上可能画出的全部的圆。这"全部"是一个三维"空间"，理由很简单：要确定出这些圆中的任意一个，需要恰好三个数，或三个坐标，即两个相对于任意已知的一对轴以固定圆心的位置，一个给出半径的长度。

如果读者现在想摹想一个四维空间，他可以想象用直线代替点，作为构成我们的普通"固体"空间的元素。代替我们熟悉的、看上去象无限细小的鸟枪子弹凝聚在一起的固体空间，现在它就象一根根无限薄、无限长的、直直的干草组成的有秩序的干草堆。如果我们使自己相信(我们可以做到)，要在我们的干草堆中确定一根特别的干草，恰好四个数是必要而且充分的，那我们就很容易看出直线的空间确实是四维的。一个"空间"的"维数"可以是我们选

择来构成它的任何东西，倘若我们适当挑选构成空间的元素(点、圆、线等等)的话。当然，如果取点作为构成我们的空间的元素，那么除了精神病院里的疯子，没有人能够成功地看到多于三维的空间。

现代物理学正在迅速地教会一些人放弃他们关于除了数学"空间"——例如欧几里得的空间——以外，还有一个神秘的"绝对空间"的看法。那些数学空间是几何学家们为了与他们的物理经验联系起来而构造的。今天的几何学主要是分析的问题，但是，"点"，"线"，"距离"等等，这些过去的术语，有助于向我们提醒与我们的坐标集合有关的有趣的东西。但是不能由此推断出，这些特定的东西是在分析学中能做出的最有用的东西。实际情况可能是，总有一天所有这些东西与更重要的东西相比，都是相对不足道的东西了，我们对过时的传统墨守陈规，继续考虑这些更重要的东西，只是因为我们缺乏想象力。

要是谈到分析中产生的状况有什么神秘的优点，就象要我们回到过去，和阿基米德一起在灰烬中画图一样，那优点还没有揭示出来呢。图形毕竟可能只适合于很小的孩子；拉格朗日在写作他的分析力学时，完全不需要这种幼稚的帮助。我们想要把我们的分析"几何化"的倾向，可能只是我们还未长大的证据。如所周知，牛顿本人首先从分析得出了他的不可思议的结果，再给它们披上阿波罗尼奥斯式的证明的外衣。他这样做部分是因为他知道，大多数人——天赋不如他本人的数学家们——只有当一个定理有精致的图形和呆板的欧几里得证明伴随着时，才相信它是正确的。部分是因为他本人仍然徘徊在对笛卡儿以前的几何的朦胧的偏爱中。

我们挑选出来在这里论述的、凯莱的最后一个伟大发明，是矩

阵及其代数的大概的轮廓。这个题目开始于他在1858年的一篇论文，直接产生于对代数不变量理论的那些(线性)变换的结合方式的简单观察。回顾一下我们对于判别式及其不变量说过的话，我们注意到 $y \to \frac{px+q}{rx+s}$ (箭头在这里读作"由……代替")这个变换。假设我们有两个这样的变换，

401

$$y \to \frac{px+q}{rx+s},\ x \to \frac{Pz+Q}{Rz+S},$$

把其中的第二个变换应用到第一个变换中的 x 上。我们得到

$$y \to \frac{(pP+qR)z+(pQ+qS)}{(rP+sR)z+(rQ+sS)}。$$

我们只注意三个变换中的系数，把它们写成方阵，即

$$\begin{Vmatrix} p & q \\ r & s \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} pP+qR & pQ+qS \\ rP+sR & rQ+sS \end{Vmatrix},$$

就看出，连续实施前两个变换的结果，可以用下面的"乘法"规律写出来，

$$\begin{Vmatrix} p & q \\ r & s \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} pP+qR & pQ+qS \\ rP+sR & rQ+sS \end{Vmatrix},$$

其中右边列阵的行，是以一种明显的方式，由把左边第一个列阵的行应用到第二个列阵的列得到的。这样的(任意数目的行和列的)列阵就称作矩阵。它们的代数是由几个简单的公设得到的，我们只需列举下面几个。矩阵 $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ 和 $\begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix}$，当 $a=A,\ b=B,\ c=C,\ d=D$ 时，而且只有在这种情况下，是相等的(按定义)。刚才写出来的两个矩阵的和是矩阵 $\begin{Vmatrix} a+A & b+B \\ c+C & d+D \end{Vmatrix}$。$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ 用 m (任何数)相乘的结果是矩阵 $\begin{Vmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{Vmatrix}$。矩阵相"乘"，×(或复合)的规

则如上面所举的对于$\begin{Vmatrix} p & q \\ r & s \end{Vmatrix}$、$\begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix}$的例子所示。

这些规则的一个独特的特点是乘法不可变换，特殊类型的矩阵除外。例如，我们由规则得到

402

$$\begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} p & q \\ r & s \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Pp+Qr & Pq+Qs \\ Rp+Sr & Rq+Ss \end{Vmatrix},$$

右边的矩阵不等于乘法

$$\begin{Vmatrix} p & q \\ r & s \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix}$$

产生的矩阵。

给出所有这些细节，特别是最后一个，是为了说明在数学史上常常出现的一个现象：对于科学应用是必要的数学工具，往往在以数学为其基础的这门科学被想象出来以前几十年就发明了。矩阵"乘法"的奇怪的规则，由这个规则我们根据做乘法的次序得到不同的结果（与普通代数不一样，那里$x+y$总是等于$y+x$），似乎与任何有关科学的或实际应用的东西都不着边际。然而在凯莱发明了它六十七年之后，海森堡在1925年看出矩阵代数恰恰是他在他的量子力学的革命性工作中所需要的工具。

凯莱继续不停地从事创造性的活动，直到他去世的那个星期，他以坚毅的勇气忍受了长期患病的痛苦，于1895年1月26日去世。我们引用福赛思所写的传记的结束语："但是他不仅仅是一个数学家。他怀着唯一的目标，华滋华斯会为他的'快乐的战士'选择的唯一的目标，直到生命的最后一刻，始终坚持他一生为之奋斗的崇高的理想。他的一生对于那些认识他的人［福赛思是凯莱的学生，成为他在剑桥大学的继任者］有着重大的影响：他们钦佩他的品格，犹如他们敬重他的天才。在他去世时，他们感到，一个伟

大的人从这个世界上消失了。”

凯莱所作的工作，许多已经成为数学的主流。他那浩瀚的《数学论文选集》(由九百六十六篇论文构成的四开本十三大卷，每卷约六百页)中，很可能还有更多的著作，将给未来几代富于探索精神的数学家们提供有益的食粮。凯莱最感兴趣的领域目前已不再流行，对西尔维斯特也可以同样这样说；但是数学有一个习惯，回到它原来的问题上，把它们归纳为范围更广的综合问题。

403

1883年，杰出的爱尔兰数论专家、牛津大学的萨维利几何教授亨利·约翰·斯蒂芬·史密斯在他五十七岁，正当他从事科学研究的壮年时期去世了。牛津大学邀请年老的西尔维斯特担任这一空出的教授席位。他这时是七十岁。西尔维斯特接受了邀请，这使他在美国的无数朋友们深感遗憾。但是他想家了，思念他的对他并不慷慨的祖国；也许这也给了他某种满足，使他感到“建筑师们抛弃不用的石头，同样成了重要的基石。”

这位令人惊奇的老人来到牛津大学，担负起他的职务，以一种崭新的数学理论（“Reciprocants”——微分不变量）浇灌他的高年级学生。任何赞扬或公正的赏识，似乎总会促使西尔维斯特超过他自己原有的水平。虽然在他最新的工作中，法国数学家乔治·阿尔方部分地走在了他前面，他却以他特殊的天才使之不朽，以他不可磨灭的个性使之更有生气。

1885年12月12日，西尔维斯特七十一岁时在牛津大学发表的就职演说，充满了他年轻时火一般的热情，或者还要多些，因为他现在感到安心，知道他终于被那个曾经向他斗争的、势利的世界承认了。从演说中摘录的两段，可以多少看出整篇的风格：

“我将要阐述的理论，或者说我将要宣布其诞生的理论，坚持

它[与伟大的不变量理论]的关系不是姊妹，而是兄弟，虽然它出现较晚，按照男性比女性更有价值，或者，无论如何，根据撒利法①的规定，有权在它姐姐的地位之上，并在它们的联合王国中行使最高支配权。”

在评论某一代数式中一个名词的不可解释的缺乏时，他改用了抒情体：

“在我们面前的例子中，一个家庭成员出乎意料地缺席——它的出现可能曾找寻过——仍然在我脑海中留下了印象，甚至影响了我的情绪。我开始想到它好象代数星座中昴星团②中失去的一个，最后，在郁闷地沉思这个问题时，我的感情在一次诗的抒发中，在一个愚蠢的游戏中，找到发泄，或得到宽慰。明知它看上去奇特或放肆，我将冒昧地予以复述。在我开始对这个一般理论作最后评论之前，它至少可以作为一个插曲，松弛一下你们紧张的注意。

404

致一个代数公式的名词家族中

一个失去的成员

你孤独的被抛弃的一员！被命运所遗弃，
离开你向往的同伴们——你飘向何方？
被夺去了一切，你在何处徘徊，
象一个迷途的星星或被埋葬的殒石？
你使我想起那傲慢的一个，
它厌恶成为伟大，除非是最伟大，
从无垠的天空一头摔下，

① Salic law 撒利族法典，尤指其中禁止妇女继承土地的规定。撒利法为法国和西班牙禁止女性继承王位的法律。——译者

② 天文学上的昴星团 Pleiades，据希腊神话，阿斯特赖亚与一仙女所生的七个女儿，后化为天上七星，其一因爱一凡人，羞而隐匿，故不能见。——译者

凄凉地独自生活在孤独中：
或者它，新的大力士，忍受着艰苦的放逐，
时而为希望所鼓舞，时而为恐惧所折磨，
直到登上王位的阿斯特赖亚将含糊的警告
通过大西洋的怒涛，随风飘送到他耳中，
吩咐他"敬畏缪斯的圣殿
用烈火撒下埃西斯①国土上的尘埃。"

在恢复了精神，在缪斯女神的泉水②中洗净了我们的手指以后，让我们花一点短短的时间，回到理智的清淡的宴席上，用我的讲话中，前面的问题中自然地出现的一般的想法，作为最后一道小吃，来款待我们自己。

如果缪斯女神的泉水是这个老朋友在这次惊人的理性宴会上洗手指的钵，那么那忠实的葡萄酒瓶总是在他手边，就是一个可靠的选择。

西尔维斯特关于数学与诗歌类似家属关系的意识，常常在他的写作中表现出来。因此，在一篇论牛顿发现代数方程的虚根规则的论文中，他在一条脚注中问道："难道不可以把音乐描绘成感觉的数学，而把数学描绘成理性的音乐吗？这样，音乐家感觉到数学；数学家想到音乐——音乐是梦想，数学是工作的一生——各个都从对方达到尽善尽美的境地，那时，人类的智慧达到完美的典型，将在某个未来的莫扎特-狄利克雷或贝多芬-高斯的歌颂下而光彩夺目。这个联合已经在一个赫姆霍尔兹③的天才和工作中清楚地预示出来了！"

405

① 埃西斯(Isis)为埃及神话中司生育与繁殖的女神。——译者
② 缪斯女神的泉水(Pierian Spring)指诗的源泉。——译者
③ 赫姆霍尔兹(Helmholtz)1821—1894，法国生理学家和物理学家。——译者

西尔维斯特热爱生活，甚至当他被迫向它斗争时，也仍然是爱它的，如果说曾经有人从生活中得到了它最好的东西，那就是西尔维斯特。他感到自豪的是，伟大的数学家们，除了可以归于可避免的、或意外的死亡这类情形以外，都是长寿的，而且至死保持着敏捷的思维。1869年他在就任英国科学促进协会的就职演说中，列举了过去最伟大的数学家的光荣的名字，用他们去世时的年龄来证实他的论点："……世界上没有哪门学科比数学把头脑的全部功能带进了更合谐的行动……或者象它那样，仿佛通过一步步的指引，把他们提高到越来越高的、自觉的聪明人的境界，……数学家活得长，活得年轻；心灵的翅膀不会早早掉下，毛孔也不会被粗俗生活中尘土飞扬的大路上吹来的尘埃阻塞。"

西尔维斯特是他自己的哲学的活生生的榜样。但是就连他，最后也开始向时间屈服。1893年——他这时七十九岁——他的视力开始减退，他变得悲哀沮丧了，因为他再不能以他往昔的热情演讲了。次年他请求解除他担任教授的更加繁重的任务，退休，孤独而沮丧地住在伦敦或坦布里奇韦尔斯。他所有的哥哥和姐姐都早已去世，他比他大部分亲密的朋友都活得长久。

但是即使这时候他也没有完结。他的脑子仍然强健有力，尽管他本人觉得他的创造力的锋刃已永远迟钝。1896年秋，在他八十二岁的时候，他在一个过去总是吸引着他的领域中，找到了新的热情，他在复合分类理论和哥德巴赫的每一个偶数都是两个素数的和这一猜想上，再次燃烧了起来。

他没有多长的时间。1897年3月初，在伦敦他的房间里从事数学工作时，他突然瘫痪，因而丧失了说话的能力。他死于1897年3月15日，终年八十三岁。他的一生可以用他自己的话作一总结，"我确实热爱我的学科。"



维尔斯特拉斯



柯瓦列夫斯卡娅

第二十二章　大师和学生

维尔斯特拉斯和索妮亚·柯瓦列夫斯卡娅

近代得到最伟大的发展的理论，无疑是函数论。

——维托·沃尔泰拉

年轻的数学博士们在焦急地寻找能够发挥他们的才智和所受训练的职位时，常常会问，一个人是否可能长时间从事初等教学工作而仍然保持数学上的活力。这是可能的。布尔的一生是部分回

答；分析学大师、"现代分析学之父"维尔斯特拉斯的一生是确定的回答。

在详细论述维尔斯特拉斯之前，我们按年代顺序把他同他的那些德国同代人列在一起，这些人当中的每一个都象他一样，在十九世纪后半叶和二十世纪的最初三十年内，对于数学的至少一个广阔的领域提出了新的见解。1855年可以作为一个适宜的参考点。这一年标志着高斯去世，以及与前一世纪杰出的数学家的最后联系的中断。1855年，维尔斯特拉斯(1815—1897)四十岁；克罗内克(1823—1891)三十二岁；黎曼(1826—1866)二十九岁；戴德金(1831—1916)二十四岁；而康托尔(1845—1918)还是一个十岁的小孩子。因此德国数学不缺乏新人来继续高斯的伟大传统。这时维尔斯特拉斯刚刚得到公认；克罗内克刚开了个好头；黎曼已经作出了一些最伟大的工作，戴德金正在进入他将得到他最伟大的名声的领域(数论)。当然，康托尔还默默无闻。

我们把这些名字和日期并列在一起，因为所提到的人当中，有四个人虽然象他们的大多数最好的工作者那样各不相同而且完全没有关系，却在全部数学的一个中心问题，即无理数的问题上走到了一起：维尔斯特拉斯和戴德金在欧多克斯公元前四世纪停下来的地方、重新开始对无理数和实际上对连续的讨论；克罗内克是芝诺的现代附和者，他怀疑并批评维尔斯特拉斯对欧多克斯的修正，使维尔斯特拉斯的晚年很不幸；而康托尔则闯出了一条他自己的新路，力图领悟隐含在连续的真正概念——按照一些人的看法——中的极限本身。从维尔斯特拉斯和戴德金的工作中，开创了分析学的现代纪元，即分析学(微积分学、单复变函数理论和实变函数理论)的严格的逻辑精确性，这与一些较早的作者的不大严格的直观方法不同——这种直观方法作为对发现的启发式的指导是

非常宝贵的，但是从数学证明的毕达哥拉斯理想的观点看，却全无价值。正如已经指出的，高斯、阿贝耳和柯西开始了严格化的第一个阶段；由维尔斯特拉斯和戴德金开始的运动是在更高的水平上，它可以适应在上一世纪后半叶分析学的更严格的要求，而更早的小心谨慎对它是不适合的。

维尔斯特拉斯的一项发现，特别使直观学派的分析学家们感到震惊，使他们宽宏地注意到应该慎重：他作出了一个在任何一点上都没有切线的连续曲线。高斯一度称数学为"眼睛的科学"；要"看"维尔斯特拉斯呈现给感觉直观的拥护者们的曲线，需要比一双好眼睛更多的东西。

由于对每一个作用都有一个大小相等、方向相反的反作用，因而这整个修改过的严格性会引起它自身的反对就是很自然的了。克罗内克猛烈地、甚至刻毒地、相当令人恼怒地攻击过它。他否认它有甚么意义。虽然他成功地伤害了可敬的、厚道的维尔斯特拉斯，但是他几乎没有给他的守旧的同代人留下什么印象，并且实际上没有给数学分析留下丝毫影响。克罗内克走在他的时代前面一个世代。直到二十世纪的第二个十年，人们才认真考虑他对于现在所接受的连续和无理数的原则的责难。确实，今天并不是所有的数学家都把克罗内克的攻击，看作仅仅是他对更著名的维尔斯特拉斯的被抑制的妒嫉的发泄（他的一些同代人认为是这样的），人们承认，在他的使人不安的反对中可能有些道理——也许有，但不多 不管是否有道理，克罗内克的攻击部分导致了现代数学推理中严格化的第三个阶段，即我们自己正试图享有的阶段。维尔斯特拉斯并不是受克罗内克折磨的唯一的同代数学家；康托尔也在他视为他的有影响的同事的恶意迫害下深受痛苦。所有这些人在适当的地方都将为自己辩护；这里我们只是试图指出，他们的生

408

活和工作至少在这个美丽的型式的一个角落，是密切地交织在一起的。

为了完成这幅图景，我们必须指出以维尔斯特拉斯、克罗内克和黎曼为一方，以克罗内克和戴德金为另一方，这两方之间的另外一些联系。我们记起阿贝耳死于1829年，伽罗瓦死于1832年，雅可比死于1851年。在我们所论及的时代，数学分析中的一个突出问题，是完成阿贝耳和雅可比关于多周期函数——椭圆函数、阿贝耳函数（见第十七章、十八章）——的工作。维尔斯特拉斯和黎曼从完全不同的观点完成了应该做的事情——维尔斯特拉斯确实认为他自己在某种程度上是阿贝耳的后继者；克罗内克在椭圆函数方面开辟了新的前景，但是他没有在阿贝耳函数领域与另外两个人竞争。克罗内克主要是算术学家和代数学家；他的一部最优秀的著作，是对伽罗瓦在方程理论中的工作的详尽阐述和发展。这样，伽罗瓦在他去世后不久就有了一个相称的后继者。

戴德金除了对连续和无理数领域的涉猎以外，他的最富于独创性的工作是在高等算术方面，他彻底改革和刷新了这一领域。在这方面，克罗内克是他的能干和有远见的竞争者，但是他们的整个方法又是全然不同的，表现了两个人的特点：戴德金通过躲进无限中（在他的“理想”的理论中，将在适当的地方指出）克服了他在代数理论中碰到的困难；克罗内克则力图在有限中解决他的问题。

卡尔·威廉·特奥多尔·维尔斯特拉斯是威廉·维尔斯特拉斯(1790—1869)和他的妻子特奥多拉·福斯特的长子，他于1815年10月31日出生在德意志，蒙斯特区的奥斯滕费尔德。那时他父亲是个由法国支付薪金的海关官员。人们可以回想起来，1815

年是滑铁卢战役的那一年；法国仍然统治着欧洲。俾斯麦也出生在那一年，注意到下面这一点是很有意思的：这个更著名的政治家毕生的事业在世界大战中，如果不是更早的话，被打得粉碎；而他的不那么出名的同代人，对科学和一般的文明进步的贡献，在今天倒比在他活着的时候更受到尊重。

409

维尔斯特拉斯一家终生都是虔诚的罗马天主教徒；父亲是从新教改信天主教的，也许是在他结婚的时候。卡尔有一个弟弟彼得（死于1904年）和两个妹妹，克拉拉（1823—1896）和伊丽泽（1826—1898），妹妹们终生照料他的生活。母亲在1826年生下伊丽泽以后不久就去世了，父亲第二年又结了婚。关于卡尔的母亲，我们知道得很少，只知道她似乎对她的丈夫有一种克制着的反感，并且相当讨厌她的婚姻。继母是个典型的德国家庭妇女；她对她丈夫前妻的子女的智力发展的影响也许是零。在另一方面，父亲是一个重实际的理想主义者，一个有文化的人，一度当过教师。他生命的最后十年是在柏林他著名的儿子家里平静地度过的，两个女儿也住在那里。他的子女没有一个结过婚，虽然可怜的彼得一度表示过结婚的倾向，但是很快就被他的父亲和妹妹压下去了。

在孩子们天生的亲切友爱中，唯一可能的不协调是父亲绝不妥协的正直，支配一切的权威，和普鲁士式的顽固。他差一点用他喋喋不休的教训毁了彼得的一生，又很危险地几乎对卡尔也这样做。他企图迫使卡尔从事对他不相宜的职业，而并没有弄清楚他那才气焕发的年轻的儿子的能力在哪方面。老维尔斯特拉斯蛮横无理地训诫他的小儿子，干涉他的事情，直到这“孩子”差不多四十岁时才停止。幸而卡尔是由更富于反抗精神的材料构造成的。正象我们将会看到的，他对他父亲的反抗——尽管他自己也许完全不清楚他是在反抗这个暴君——采取了一种并不少见的形式，就

是把他父亲为他选择的生活弄得一团糟。这也许是他能够设想出来的最简单的防卫方式，它最好的地方就是他和他的父亲都从来没有梦想到在发生甚么事情，虽然卡尔在六十岁时写的一封信表明，他终于认识到了他早期的困难的原因。最后卡尔走上了能够自主行事的道路，但是这是一条漫长、迂回的道路，经历了重重磨炼和错误。只有象他这样不修边幅、粗鲁质朴、身心都很强健的人，才能胜利地走到底。

卡尔出生后不久，全家迁居到威斯特伐利亚的韦斯特科滕，在那里父亲当了盐场的海关官员。韦斯特科滕就象维尔斯特拉斯度过了他一生中最好的岁月的其它狭小、阴暗、肮脏的地方一样，今天它在德国为人所知，只是因为维尔斯特拉斯一度被判定在那里腐败——只不过他没有发锈；他发表的第一项工作被确定为1841年(他那时二十六岁)写于韦斯特科滕。村子里没有学校，因此卡尔被送到邻近的城镇蒙斯特，十四岁时，他从那里进了在帕德博恩的天主教办的高级中学。与处于类似情况的笛卡儿一样，维尔斯特拉斯非常喜欢他的学校，和他的有经验、有教养的教师们交了朋友。他用大大少于标准的时间学完了规定的课程，所有的功课都取得了同样优异的成绩。他在1834年十九岁时离开了学校。奖学金源源不断地落到他头上；有一年他获得七项奖；他通常是德文第一名，拉丁文、希腊文和数学这三门中两门的第一名。一种极具讽刺性的反常现象是他一次也没有获得书法奖，而他注定了要给那些刚刚从母亲的围裙带下解放出来的小孩子们教书法。

数学家们往往喜欢音乐，象维尔斯特拉斯这样豁达的一个人竟不能忍受任何形式的音乐，这也是很有趣的。音乐对他毫无意义，当他成为一个取得成就的人时，关心他的妹妹们试着让他去上音乐课，以便使他在社交场合能比较顺应习俗。但是他敷衍塞

责地上了一两次课后，就放弃了这个讨厌的计划。当她们设法把他拉到音乐厅或剧院去时，音乐会使他厌倦，正歌剧使他昏然入睡。

和他的父亲一样，卡尔不仅是个理想主义者，而且一度也是极实际的。除了在纯粹是不实际的学科中获得了大多数奖金之外，他在十五岁时得到了一个有报酬的工作，给一个卖火腿和奶油的、生意兴隆的女商人当会计。

所有这些成功，对卡尔的未来产生了灾难性的影响。老维尔斯特拉斯和许多家长一样，从他儿子的成功中得出了错误的结论。他的"推理"是这样的：由于这孩子已经赢得了一大堆奖，因此他一定有一个好脑子——这点倒是很可以承认的；由于他有成效地给受人尊敬的奶油火腿女商人誊写账本而给自己挣来了零用钱，因此他将成为一个高明的簿记员。那么全部簿记的顶点是什么呢？显然是在普鲁士行政机构中得到一个行政职位——当然是在比较411 高层的部门。但是要为这个高贵的位置作准备，为了有效地挤上去，避免被拉下来，法律知识是合乎需要的。

这一切推理的总的结论，就是维尔斯特拉斯家的一家之主，在他有天赋的儿子十九岁时，把他冒冒失失地推进了波恩大学，去掌握商业的诈骗术和法律的诡辩。

卡尔很有见识，这两件事他哪一件也不会去干。他把他巨大的体力，闪电般的灵巧和敏捷的头脑，几乎完全用在击剑，和由于夜间沉溺于真正的德国啤酒而带来的丰富的社交活动上。这对于焦虑不安的博士生是一个多么令人震惊的榜样啊，他们害怕教书，唯恐他们本来暗淡的智力会永远暗淡下去！但是要做到维尔斯特拉斯所做的，而且做了坏事而不被发觉，一个人必须至少有他十分之一的体质和不少于千分之一的脑子。

波恩发现维尔斯特拉斯是不可击败的。他眼睛尖，手伸得长，

象魔鬼般准确，击剑时快得象闪电，这一切使他成为一个令人钦佩、但不能击中的对手。事实上他从来没有被击中过：他面颊上没有留下过伤疤，在他所有的较量中，他从没有流过一滴血。后来对他的无数次胜利的庆祝中，他是否曾经被灌醉过，不得而知。他的谨慎的传记作者们在这重要的一点上多少有点保留，但是任何人只要仔细考虑过维尔斯特拉斯的一篇数学杰作，就知道一个象他这样强健的头脑，竟然会在半加仑的啤酒上打盹，是难以令人置信的。他在大学里虚度的四个年头，也许终究还是过得得当的。

波恩的经历，对维尔斯特拉斯作了三件最重要的事：它们治愈了他对父亲的"固结"，而没有在任何方面损害他对被他欺骗了的父母的爱；它们使他成为一个能够完全享有天资不如他自己——他的学生——的人那些可悲的希望和抱负的人，因而直接对他成功地成为也许是有史以来最伟大的数学教师作出了贡献；最后，他童年时代的富于幽默感的亲切和蔼，成了他终生保持的一个习惯。因此，当卡尔在波恩"白白"度过四年之后，没有得到学位，回到他悲叹的家人怀抱中时，他的"学生时代"并不是象他失望的父亲和焦急不安的妹妹——更不用说吓慌了的彼得——认为的那样，是一种损失。

发生了可怕的争吵。他们训斥他——象他这样"身心不振"，也许是法律不够，数学太少，啤酒太多的结果；他们坐在他周围，怒视着他，最糟糕的是他们开始讨论他，就象他已经死了：应该拿这具尸体怎么办呢？提到法律，维尔斯特拉斯在波恩仅仅和它短短交手，但已经够了：他以他作为一个法学博士报考者的尖锐的"反驳"，使院长和他的朋友们大为吃惊。至于数学，在波恩，那是不值得考虑的。唯一有才能的人，朱利亚斯·普拉克，本来可以对维尔斯特拉斯有些好处，但是忙于他多方面的职责，没有时间去照顾个 412

人,所以维尔斯特拉斯甚么也没有从他那里学到。

但是,象阿贝耳和其他许多第一流的数学家一样,维尔斯特拉斯在他击剑和钦酒之间的间歇时间去拜访大师们:他曾经醉心于拉普拉斯的《天体力学》,从而为他终生感兴趣的力学和联立微分方程组奠定了基础。他当然不能使这些东西进到他那有文化的、小官吏的父亲头脑中去,他那顺从的弟弟和沮丧的妹妹们听不懂他在谈些什么。事实本身就足够了:卡尔老兄,这个怯生生的小家庭的天才,在他身上曾经寄予体面的资产阶级那样的崇高希望,在父亲方面四年的严格节省之后,回到家了,没有得到学位。

最后——过了几个星期——这个家庭的一个明白事理的朋友(他在卡尔童年时代就对他怀着同情,并且对数学怀着一个聪明的业余爱好者的兴趣)提出了一个解决办法,让卡尔准备参加在附近蒙斯特学院举行的国家教师考试。年轻的维尔斯特拉斯不会从这次考试中得到博士学位,但是当教师的工作使他晚间有充裕的空闲时间,如果他有数学方面的素质的话,他就可以在数学上保持活力。维尔斯特拉斯向当局直率地承认了他的"罪过",请求给他一个重新开始的机会。他的请求得到了允许,维尔斯特拉斯 1839 年 5 月 22 日在蒙斯特被录取。准备从事中等学校教师的生涯。这对他后来在数学上的卓著成就是一级最重要的阶梯,虽然在当时看来象是一场彻底的失败。

413 对维尔斯特拉斯影响最大的,是克里斯托夫·古德曼(1798—1852)来到蒙斯特担任数学教授。古德曼当时(1839 年)正热衷于椭圆函数。我们记得雅可比在 1829 年发表了他《椭圆函数基本新理论》。虽然现在已没有甚么人熟悉古德曼精心写出的研究论文(他在克列尔的怂恿下,在他的《杂志》上发表的一系列文章),但不能仅仅因为他过时了,就象有时流行的做法那样,轻蔑地把他撇在

一边。古德曼在他那个时代，有一种创新的思想。椭圆函数理论可以有许多不同的方法去发展——多得令人不安。在一个时期，某种特别的方法似乎是最好的；在另一个时期，一种稍有不同的方法又被人们大肆宣传，而且普遍认为是更时兴的。

古德曼的想法是一切都以函数的幂级数展开为基础。(这个说法暂时是可以的，当我们描述维尔斯特拉斯的工作的一个主要动机时，它的意义就清楚了。)这确实是一个很好的新的主意。古德曼以德意志式的彻底精神苦苦干了许多年，也许并没有认识到在他的灵感后面到底是甚么，他本人也从来没有把它进行到底。这里值得注意的重要事情是，维尔斯特拉斯使幂级数理论——古德曼的灵感——成为他在分析学方面的全部工作的核心。他听过古德曼的演讲，这个主意就是来自古德曼的。维尔斯特拉斯晚年仔细考虑了他在分析学中发展的那些方法的范围，禁不住惊呼，“除了幂级数，甚么也没有！”

古德曼讲授椭圆函数(他用的是另一个名称，但那无关紧要)的第一讲时，只有十三个听众。因为深爱他的题目，演讲人很快便离开地面，实际上是独自在纯思想的太空中翱翔。第二讲只来了一个听讲的人，古德曼很高兴。这个唯一的学生就是维尔斯特拉斯。从此以后，没有哪个鲁莽的第三者胆敢来亵渎这位演讲者与他唯一的弟子之间的神交。古德曼和维尔斯特拉斯都是天主教徒；他们在一起相处得非常融洽。

维尔斯特拉斯非常感激古德曼给予他的慷慨的关心，他在成名之后，抓住一切机会——越公开越好——表示他对于古德曼对他所做的一切的感谢。他所受的恩惠并不是无足轻重的，并不是每一个教授都能够给人以这样的启示——以函数的幂级数表示作为一个开始点，这个启示鼓舞了维尔斯特拉斯。除了关于椭圆函

414

数的演讲以外，古德曼还给维尔斯特拉斯个别讲授"解析球面"——不管那可能是甚么。

1841年，维尔斯特拉斯二十六岁时，参加了教师证书考试。考试分笔试和口试两部分。笔试部分是允许他在六个月内就主考人合意的三个题目写出三篇论文。第三个问题产生了一篇关于中等学校教学中使用苏格拉底问答法的优秀论文。维尔斯特拉斯遵循这个方法获得辉煌的成功，他成为世界上教授高等学校学生的第一流的数学教师。

一个教师——甚至在高等数学方面——是由他的学生来判断的。如果他的学生对他"非常清晰的讲课"很热心，作了大量的笔记，但是在取得高等学位以后，他们本人从不作任何创造性的数学工作，那么，这位教师作为一个大学讲师是完全失败了；他的适当的位置——如果说甚么地方合适的话——是在中学里，或者是在一所小小的学院里，那里的目标是培养驯服的绅士，而不是独立的思想家。维尔斯特拉斯的演讲是完美的典范。但是如果它们仅仅是完美的讲解，在教学法上是毫无价值的。维尔斯特拉斯给形式的完美增加了一种摸不着的东西，叫做灵感。他并不夸大数学的庄严崇高，他从不夸夸其谈，但是他不知怎么地，在他的学生中大得不相称的部分中造就了富于创造力的数学家。

维尔斯特拉斯参加的那次考试，接受他在见习一年以后担任中学教师的职业，那次考试是记录在案的这类考试中最不寻常的一次。他所呈交的论文中，必定有一篇是教师考试中收到的最深奥的作品。应报考者的请求，古德曼给维尔斯特拉斯出了一道真正的数学题：找出椭圆函数的幂级数发展。还不只此，但是提到的这部分也许是最有意思的。

古德曼关于这项工作的报告，如果受到注意的话，很可能改变

维尔斯特拉斯的人生道路，但是它本可以有用处，却没有产生实际的印象。古德曼在给官方的报告的附言中说，"这个问题，一般说来，对一个年轻的分析学者是过于困难了，它是应报考者本人的请求，并经委员会同意才出的。"在他笔试的论文被接受，口试取得成功的评语以后，维尔斯特拉斯得到一张关于他对数学的独创性贡献的特别证书。古德曼在陈述了这位报考者所做的工作，并指出了他着手解决的问题的独创性和所得出的结论的新颖之后，宣称这项工作显示了优秀的数学才能，"如果这个才能不被浪费掉，必然会对科学的发展作出贡献。为了作者的缘故，也为了科学的缘故，希望不要让他当中学教师，如条件许可，望其能在高等学府发挥作用……以此该报考者根据与生俱来的权利，进入了著名发明者的行列。"

415

这些评语，部分由古德曼在下面划线予以强调，在官方报告中却完全被勾销了。维尔斯特拉斯得到了他的证书，这就是一切。他在二十六岁时开始了在中学教书的职业，这将吞没他一生中将近十五年的时间，包括从三十岁到四十岁，这通常被认为是一个科学家的一生中最富于创造力的十年。

他的工作过于繁重。只有具有钢铁般的决心和强健的体格的人，能够完成维尔斯特拉斯所做的工作。晚上是他自己的，他过着双重生活，并不是他变成了一个迟钝的做苦工的人，远远不是。他也没有装出一付乡村学者的样子，陷入非凡人所能理解的神秘的沉思。他在晚年喜欢怀着平静的满意心情，详细讲述他怎样愚弄了所有的人；放荡的政府官员们和年轻的军官们，发现这个和气的中学教师是一个完完全全的好人，一个快活的酒肉朋友。

但是除了这些偶尔在一起夜间出游的酒友以外，维尔斯特拉斯还有他的无忧无虑的同伴们所不知道的另一个朋友——阿贝

耳，他常常和阿贝耳一起熬夜。他自己说阿贝耳的著作永远在他手边。当他成为世界上第一流的分析学家和欧洲最伟大的数学教师时，他对他的众多学生的第一个、也是最后一个忠告，就是"读阿贝耳！"对于这个伟大的挪威人，他怀着无限的钦佩，任何妒嫉的阴影都不能使它暗淡。"阿贝耳，这个幸运的家伙！"他会惊呼："他做出了永恒、不朽的东西！他的思想将永远给我们的科学以使它丰饶的影响。"

416 对维尔斯特拉斯也可以同样这样说，他用以丰富数学的创造性的思想，绝大部分是他在凄凉的乡村里担任一名默默无闻的中学教师时构思出来的，那里得不到先进的书籍，当时他经济拮据，写一封信的邮资就要占掉这位教师每周微薄的工资的一大部分。由于付不起邮费，维尔斯特拉斯不能进行科学通信。或许这对他倒是一件好事：他的独创性可以不受当时流行的思想的妨碍而自由发展。这样得来的独立的观点，成为他后期工作的特点。他在演讲中，总想从头开始按照他自己的特点去发展一切，几乎从不提到别人的工作。这点有时使他的听众感到迷惑，不知道甚么是这位大师的，甚么是另一个人的。

谈谈维尔斯特拉斯的科学生涯中的一两个阶段，对学数学的读者会是有趣的。在蒙斯特的高级中学担任一年见习教师以后，维尔斯特拉斯写了一篇关于分析函数的论文。他在这篇论文中，除了其他东西以外，独立地得出了柯西的整数理论——所谓的分析的基本理论。1842 年他听说了柯西的工作，但是没有提优先权的要求（事实上，高斯早在 1811 年就领先了他们两人，但是他一惯是把他的工作放在一边，等它成熟，而没有发表）。1842 年，维尔斯特拉斯二十七岁时，把他所发展的方法应用到微分方程组——例如，象在牛顿三体问题中发生的情形一样；论述是成熟的，有力

的。他做这些工作，没有想到发表，仅仅是为他毕生的事业（论阿贝耳函数）打基础。

1842年，维尔斯特拉斯是西普鲁士的德意志-克罗内的高级中学的数学和物理助理教师。不久他就升任为受尊敬的普通教师。除了提到的学科以外，这位欧洲第一流的分析学家还给他管辖下的孩子们教授德语、地理和书法，1845年又增加了体操。

1848年，三十三岁时，维尔斯特拉斯被转到布伦斯堡的高级中学任普通教师。这算是晋升，但升得不多。这所学校的校长是一个杰出的人，他尽一切力量使事情合乎维尔斯特拉斯的心意，尽管他对于他这位同事的卓越才智只有一点模糊的概念。这所学校以有一所小小的图书馆，拥有关于数学和科学方面的经过仔细挑选的书籍而自豪。

正是在这一年，维尔斯特拉斯有几个星期离开了他那引人入胜的数学，沉溺在一场小小的有趣的恶作剧中。当时政治上出了点乱子；自由的病毒已经侵袭了患病的德意志人民，至少有一些勇敢分子已踏上了争取民主的征途。掌权的保皇派对一切不是充分赞扬他们的政权的言论和出版物，采取了严格的检查。报纸上开始出现即兴的自由颂歌。当局自然不能容忍对法律和秩序的这种破坏，当布伦斯堡突然间迸发出一大批民主诗人，在当时还未受到检查的地方报纸上高唱自由的颂歌时，惊慌失措的政府急急忙忙地任命了一位地方官员担任检查员，然后就安枕无忧，认为会万事大吉了。 417

不幸的是，新任命的检查员对一切形式的文学，特别是诗歌，抱着强烈的反感。他简直就无法读读这些东西。他把自己的监督局限于用蓝色铅笔删改单调乏味的政治性文章，而把所有的文学作品都交给中学教师维尔斯特拉斯去审查。维尔斯特拉斯很高

兴,他知道这位官方检查员对任何诗歌都决不会看上一眼,他一定要让最富煽动性的诗歌,就在检查员的面前完全正当地印出来。事情就这样有趣地进行下去,群众都十分高兴,直到一位高级官员插进来,才结束了这场闹剧。因为官方检查员应对这次冒犯行为负责,维尔斯特拉斯未受惩罚。

德意志-克罗内这个无名的小村,有幸成为维尔斯特拉斯在1842—1843年首次出版著作的地方。德意志的中学校不定期地出版"教学大纲",包括教职员的文章。维尔斯特拉斯投了一篇《论分析阶乘》的文章。不需要解释这是些甚么;这里值得注意的一点是,阶乘是曾经使得老分析学家们头痛得一筹莫展的课题,在维尔斯特拉斯开始着手解决与阶乘有联系的一些问题之前,人们一直没有抓住这个问题的要点。

我们记得克列尔写了大量关于阶乘的文章,我们也知道当阿贝耳有点鲁莽地告诉他说,他的工作中包含着严重的失误时,他是多么感兴趣。克列尔现在再次登场了,而且是抱着他对阿贝耳表示的同样良好的精神。

维尔斯特拉斯的著作,直到1856年,他写成十四年之后才发表,克列尔把它刊登在他的《杂志》上。维尔斯特拉斯这时已经成名。克列尔承认,维尔斯特拉斯有力的论述,清楚地揭露了他自己的工作中的错误。他接着说了下面的话:"我在自己的工作中,从来没有带进个人的观点,我也没有沽名钓誉,只是尽我所能地促进真理的发展;不论是谁更接近于真理——不论是我还是其他的人,对我都一样,只要能更接近真理就行了。"关于克列尔,决没有甚么神经过敏。关于维尔斯特拉斯,也没有甚么神经过敏。

德意志-克罗内这个小小的村落,不管它在政治上和商业上是否重要,它在数学史上象一个王国的首都那样突出,因为正是在这

里，维尔斯特拉斯，连一个勉强可用的图书馆也没有，也没有任何科学上的联系，为他一生中最重要的工作——"完成阿贝耳的和源出阿贝耳的定理的雅可比的毕生事业，以及雅可比对多变数的多周期函数的发现。"——奠定了基础。

他注意到阿贝耳在他年轻力壮的时候夭折了，没有机会去查明他的惊人发现的重大意义，而雅可比没有能清楚地看出，应该在阿贝耳定理中找出他自己的工作的真正意义。"这些成果的巩固和发展——真正展示其功能，找出它们的特性的任务——是数学的主要问题之一。"因此维尔斯特拉斯宣称，一旦他深刻地了解了这个问题，并研制出必要的工具，他就将用全力从事这个问题。后来他谈到他进展得多么缓慢："创造方法和其他困难的问题占据了我的时间。因而几年过去了，我还没有能掌握主要的问题本身，因为不利的环境妨碍了我。"

可以把维尔斯特拉斯在分析方面的全部工作，看作是对他的主要问题的重大开始。孤立的结果，特殊的发展，甚至范围广泛的理论——比如由他发展的无理数的理论——全都在某一方面源出于中心问题。他早就确信，为了清楚地理解他想要做的是甚么，必须对数学分析的基本观念进行彻底的修正；从这个信念出发，他又进到另一个信念，在今天看来也许比中心问题本身更有意义：分析必须建立在普通整数1，2，3，……上。无理数给我们有限的连续的概念，从中产生分析，对无理数必须通过不可违反的推理查回到整数去；似是而非的证明必须抛弃或重做，空白必须补上，模糊的"自明之理"必须拿出来经受严格的质询，直到一切都理解了，一切都按照整数用能够理解的语言陈述清楚了为止。这在某种意义上是毕达哥拉斯的理想：把全部数学建立在整数的基础上，但是维尔斯特拉斯给了这个计划以建设性的、明确的定义，使它能够解决问

419

题。

这样就产生了十九世纪以分析的算术化著称的运动，它和克罗内克的算术方法完全不同，我们将在后面一章约略提到它；事实上这两种方法是互相对抗的。

这里可以顺便指出，维尔斯特拉斯对他毕生事业的计划，以及他卓越地完成的、他给自己作为一个年轻人所制定的工作，这一切都很好地说明了费利克斯·克莱因有一次给予一个学生的忠告的价值。这个学生困惑地问他，甚么是数学发现的秘密。“你必须有一个问题，”克莱因答道，“选择一个明确的目标，一直朝它奔去。你可能永远达不到你的目的，但是你在前进途中会找到一些有兴趣的东西。”

维尔斯特拉斯从德意志-克罗内迁到布伦斯堡，从1848年开始，在那里的皇家天主教高级中学执教六年。该校1848—1849年的“教学大纲”中有一篇维尔斯特拉斯的文章，这篇文章必定使当地人大吃一惊：《献给阿贝耳整数理论》。如果这篇著作会偶然落到德意志任何一个专业数学家的手里，维尔斯特拉斯就会一举成功了。但是，正象他的传记作者瑞典人米塔格-列弗勒冷冰冰地说的，人们不会在中学的“教学大纲”中，去找关于纯数学的划时代的论文。维尔斯特拉斯也很可能把他的文章拿来点烟斗了。

他的下一次努力比较顺遂。1853年(维尔斯特拉斯这时三十八岁）的暑假是在韦斯特科滕他父亲家里度过的。维尔斯特拉斯利用这个假期写了一篇关于阿贝耳函数的论文。完成以后，他送给了克列尔的大型《杂志》。论文被采用了，刊登在第四十七卷上(1854年)。

20 这可能就是那篇维尔斯特拉斯在布伦斯堡担任中学教师的经历中，引起一次有趣的事件的文章。一天早上，校长被维尔斯特拉

斯应该上课的那间教室里发出的可怕的喧闹惊动了。他查看了一下，发现维尔斯特拉斯不在那里。他急忙赶往维尔斯特拉斯的住处，敲门，应声走进去。维尔斯特拉斯正坐在微弱的灯光下沉思，房间里的窗帘还没有拉开。他工作了一个通宵，没有注意到黎明的到来。校长提醒他，已经是大白天了，并把教室里喧闹的情况告诉了他。维尔斯特拉斯回答说，他正找到一项重要发现的线索，这项发现将在科学界引起极大的兴趣，他无论如何不能中断他的工作。

关于阿贝耳函数的这篇论文，1854年发表在克列尔的《杂志》上，引起了轰动。这是一篇出自一个无名的乡村里一位默默无闻的中学教师手笔的杰作，在柏林没有人听说过他。这件事本身就够令人惊讶了。但是使得那些能够欣赏这篇著作的重要性的人更惊奇的是，这位孤独的工作者没有不时发表初步的公告，宣告他的进展情况，而是以令人钦佩的克制，把一切都暂时保留着，直到这项工作完满了才发表，这几乎是件没有先例的事。

大约十年以后，维尔斯特拉斯在给一位朋友写信时，对他在科学上的含蓄提出了他谦逊的看法："……即使我在村社的容克、律师和年轻军官圈子中的朋友们，认为我是一个热诚而令人感到亲切的人，如果没有使我成为一个遁世者的艰苦的工作，那些年[作为一名中学教师]的无限空虚和烦闷也是会使人无法忍受的……眼前没有甚么值得提的，我也不习惯于谈论将来。"

公认是即时的。在柯尼斯堡大学，雅可比曾经作出他的伟大发现，现在维尔斯特拉斯以一篇更优秀的杰作，进入了同一个领域；该校数学教授里歇洛本人是雅可比在多周期函数理论方面的一个可尊敬的后继者。他那专家的眼光立刻看出了维尔斯特拉斯做出的是甚么。他即刻说服柯尼斯堡大学授予维尔斯特拉斯名誉

博士学位，而且亲自前往布伦斯堡送交学位证书。

421 在高级中学校长为维尔斯特拉斯举行的庆祝宴会上，里歇洛宣称："我们大家都在维尔斯特拉斯先生身上找到了我们的老师。"教育部当即提升他，并给他一年的假期去从事他的科学研究工作。当时克列尔的《杂志》的编辑博查特，匆忙赶到布伦斯堡，去祝贺这位全世界最伟大的分析学家，从而开始了他们之间的亲切的友谊，这种友谊一直保持到四分之一世纪以后，博查特去世。

这一切都没有放在维尔斯特拉斯心上。虽然对于那么迅速地给予他的一切慷慨的重视，使他深受感动，并深深地感激，他禁不住对他过去的生涯投以一瞥。许多年以后，想到那个重大时刻的幸福，以及在他四十岁时，那个重大时刻为他启开的前景，他悲哀地说："生活中一切都来得太迟了。"

维尔斯特拉斯没有回布伦斯堡。一时还没有可以给他的、真正适当的位置。德国第一流的数学家们尽了他们所能做的一切，度过了这个紧急关头，使维尔斯特拉斯被任命为柏林皇家综合工科学校的数学教授。这项任命的日期是从1856年7月1日开始；同年秋，他成为柏林大学的副教授(除了另一个职务以外)，并被选入柏林科学院。

新的工作环境的激励和讲课太多带来的紧张，不久就引起了神经崩溃。维尔斯特拉斯在他的研究工作方面也工作过于劳累。1859年夏天，他不得不放弃他的课程去休息治疗。秋季他回校，继续工作，健康明显地恢复了。但是第二年3月突然发生一阵阵的头晕，他在一次讲课中倒下了。

在他以后的岁月里，他常常为这同样的疾病所烦扰，在恢复工作——担任工作大大减轻了的专职教授——以后，他从不让自己

去亲自把他的公式写在黑板上。他的习惯是坐在可以看见全班学生和黑板的地方，把需要写的东西口授给从班里选出的学生代表。这位大师的"代言人"中，有一个人产生了一种冒失的倾向，试图把叫他写的东西改得更好些。这时维尔斯特拉斯就会走上前去，把这位业余活动者的努力擦掉，让他按照吩咐他的去写。有时这位教授与固执的学生之间的战斗会进行几个回合，但是最后总是维尔斯特拉斯胜利。他以前就见过小孩子们行为不当的现象。

422

随着他的工作的声望传遍欧洲(后来传到美洲)，维尔斯特拉斯所教的班开始庞大得难于控制了，他有时感到惋惜，他的听众的质量远远落后于他们迅速增长的数量。然而他在自己周围聚集了一群极其能干的青年数学家，他们对他绝对忠诚，做了许多工作去宣传他的思想。由于维尔斯特拉斯对于发表他的著作一向不积极，如果不是他的弟子们主动传播他的演讲，他对十九世纪数学思想的影响就会大大地受到阻碍了。

维尔斯特拉斯一向很容易被他的学生们理解，也真诚地关心他们，不论是数学方面的还是人性方面的问题，他都很关心。他身上丝毫没有"大人物"的矜持，他很高兴同愿意和他在一起的学生一起步行回家(这样的学生很多)，就象和他最著名的同事在一起一样，也许当这位同事碰巧是克罗内克时，他就更加高兴。他最快乐不过的是和几个忠实的弟子一起，坐在桌旁喝上一杯，这时他自己又变成了一个兴高采烈的学生，而且坚持要为大家会钞。

有一件轶事(关于米塔格-列夫勒的)，可以使人联想到，本世纪的欧洲已经部分丧失了它在十九世纪七十年代曾经有过的东西。普法战争(1870—1871年)使法国对德国相当怀恨。但是这并没有使数学家们的思想模糊不清，他们在对待彼此的成就上是不分国籍的。这种情况同样适用于拿破仑战争和法英两国数学家

的相互尊重。1873年米塔格-列夫勒从斯德哥尔摩来到巴黎，满腔热情地准备在埃尔米特门下学习分析学。"你错了，先生，"埃尔米特告诉他："你应该在柏林听维尔斯特拉斯的讲座。他是我们大家的老师。"

米塔格-列夫勒听从了这位气量大度的法国人的正确忠告，不久之后就作出了他自己的重大发现，这项发现在今天所有关于函数理论的书籍中都能找到。米塔格-列夫勒说："埃尔米特是一个423 法国人和一位爱国者，同时我也深知，在很大程度上他也是一个数学家。"

维尔斯特拉斯在柏林担任数学教授的年代(1864—1897年)，这位被全世界公认为第一流的分析学家的生涯中，充满了科学和人性方面的饶有兴趣的事。这些趣事的一个方面，对于维尔斯特拉斯的纯科学的传记说来，不是一笔带过所能满足的。这就是他和他心爱的学生索妮亚(或索菲)·柯瓦列夫斯卡娅的友谊。

柯瓦列夫斯基夫人婚前的名字是索妮亚·科尔文-克鲁科夫斯基；她1850年1月15日生于俄国的莫斯科；在维尔斯特拉斯去世前六年，于1891年2月10日死于瑞典的斯德哥尔摩。

索妮亚十五岁开始研究数学。到十八岁时，她取得极快的进展，可以进行高级的工作，并且醉心于这门学科。由于她出身于富裕的贵族家庭，她出国学习的抱负得以满足，被录取入海德堡大学。

这位天资很高的姑娘，不仅成为近代第一位女数学家，而且也作为一名妇女解放运动的领袖而闻名，特别是在打破长期以来认为她们没有能力进入高等教育领域的偏见方面，博得了声誉。

除了这些以外，她还是一位颇有才气的作家。当她还是一个

年轻姑娘的时候，她在从事数学与从事文学之间长时期犹豫不决。在她写出她最重要的数学著作（后来以获奖论文著名）以后，她转而以文学作为消遣，以小说的形式写他在俄国的童年生活的回忆（最初以瑞典文和丹麦文出版）。关于这部作品，据说“俄国和斯堪的纳维亚的文学评论家一致宣称，索妮亚·柯瓦列夫斯卡娅在风格和思想方面，堪与俄国文学中最优秀的作家比美。”不幸这一很有前途的开端，因她的早逝中断了。她的其他文学作品只有一些片断保留下来。她唯一的一部小说被译成了许多文字。

维尔斯特拉斯虽然终生未婚，他并不是一个一看见漂亮女人就吓得逃之夭夭的单身汉。索妮亚，按照认识她的、有资格作出评价的人的意见，是极其美貌的。我们必须首先告诉读者她和维尔斯特拉斯是怎样认识的。

维尔斯特拉斯一向以完全富于人情味的方式度过他的暑假。1870年，普法战争使他放弃了通常的暑期旅行，他留在柏林，讲授椭圆函数。由于战争的缘故，在他班上听课的学生由两年前的五十人减少到二十人。索妮亚·柯瓦列夫斯卡亚当时是一位光彩夺目的、十九岁的年轻女子，从1869年秋季起，她就在海德堡大学师从列奥·科尼斯贝格尔（生于1837年）学习椭圆函数，她在那里还听基尔霍夫和赫尔姆霍茨的物理学讲座，并在相当有趣的情况下认识了著名化学家本生——后面再叙述。科尼斯贝格尔是维尔斯特拉斯最早的一个学生，是他老师的第一流的宣传员。索妮亚抓住她老师的热心，决定直接去找这位大师本人，以求得到灵感和启迪。

434

在十九世纪七十年代，未婚女大学生的情况是有些特殊的。为了防止流言蜚语，索妮亚在十八岁时就缔结了婚约，名义上算是结了婚，她离开了在俄国的丈夫，启程去了德国。在她与维尔斯特

拉斯的交往中，她欠考虑的是没有在一开始就告诉维尔斯特拉斯她是结了婚的。

既已决定向这位大师本人学习，索妮亚便敢作敢为地去柏林拜访维尔斯特拉斯。她二十岁，非常热情，非常诚挚而又非常坚决；维尔斯特拉斯五十五岁，对于古德曼收他为学生，在他成为一个数学家的道路上给予他的鼓舞，他是十分感激的，也满怀同情地理解年轻人的抱负。索妮亚为了掩饰她的惊慌，戴了一顶松软的大帽子，“因而维尔斯特拉斯完全看不见她那双惊人的眼睛，要是她愿意，那富于表情的眼神是谁也不能抗拒的。”

大约两三年以后，维尔斯特拉斯在访问海德堡时，从本生——一个刻薄乖张的老光棍——那里听说索妮亚是“一个危险的女人。”维尔斯特拉斯对他的朋友的恐惧感到非常有趣，因为本生当时还不知道，索妮亚经常得到他的私人授课已经有两年多了。

可怜的本生是根据他痛苦的个人经历对索妮亚作出评价的。他曾多年声明决不允许任何妇女，特别是俄国妇女，亵渎他实验室的男性尊严。索妮亚的一个俄国女朋友切望在本生的实验室里研究化学，她本人被赶出来了，就劝说索妮亚在这个顽固的化学家身上试试她的说服力。索妮亚把她的帽子留在家里，前往会晤本生。他确实被她迷住了，同意接受她的朋友在他实验室里当学生。等她离去以后，他才醒悟过来，明白了她对他作了些甚么。他对维尔斯特拉斯悲叹道，“就这样，那个女人使我自食其言了。”

索妮亚第一次拜访时的明显的热情，给维尔斯特拉斯留下了良好的印象。于是他写信给科尼斯贝尔格，询问她的数学才能。他还问到“这位小姐的品格是否能提供必要的担保。”在收到热情的答复以后，维尔斯特拉斯就试着请求大学评议会允许索妮亚听他的数学讲座。请求被粗暴地拒绝了。他便利用业余时间亲自照

425

顾她。每个星期日下午在他的住处给索妮亚讲课，每星期维尔斯特拉斯去回访她一次。最初几次课以后，索妮亚就脱下了她的帽子。授课从1870年秋季开始，一直继续到1874年秋季，只是由于假期或生病才稍微中断一下。当这两位朋友由于某种原因不能见面时，他们就通信。1891年索妮亚去世后，维尔斯特拉斯把她写给他的信全部烧毁，一起烧毁的还有他的许多其他文件，和也许不只一篇数学论文。

维尔斯特拉斯和他可爱的年轻朋友之间的通讯，是极富于人情味的。即使大部分通信是关于数学方面的也仍然如此。毫无疑问，大部分通信在科学上具有很大的重要性，但是不幸，索妮亚在对待论文方面是个毫无条理的女人，她留下的东西绝大部分是支离破碎或者杂乱无章的。

维尔斯特拉斯本人在这方面也不是一个完人。他不作记录而把他尚未发表的手稿随便借给学生们，而他们总是不归还他们借去的东西。有些人甚至肆无忌惮地改写他们老师的部分著作，把它损坏了，然后把结果当作他们自己的东西发表。虽然维尔斯特拉斯在写给索妮亚的信中，抱怨这种令人不能容忍的作法，但他懊恼的不是对他的思想的卑劣剽窃，而是他的想法在无能之辈的手上被粗制滥造，结果是给数学造成损害。索妮亚当然决不会干出这种事来，但是在另一方面，她也不是完全没有过错的。维尔斯特拉斯把他非常重视的一篇尚未发表的著作寄给了索妮亚，从此以后就再也没有看见它了。显然是她弄丢了，因为每当他提起这件事时，她就小心地避而不谈——从他的信上判断。

为了弥补这个过失，索妮亚竭力让维尔斯特拉斯对于他其余没有发表的著作稍微谨慎一些。他习惯于在经常外出旅行时，随身带一个白色的大木箱，里面放着他的全部工作笔记，和他尚未完 426

成的论文的各式各样的文稿。他的习惯是把一个论说反复修改很多遍，一直到他找出发展它的最好的"自然"方式为止。结果他的著作出版得很慢，只有在他从一个紧密地结合着的观点，彻底研究透了一个题目时，他才署上自己的名字，出版一篇著作。据说他的几篇粗略地写出的计划就放在这个神秘的箱子里。1880年，维尔斯特拉斯在一次度假旅行中，这个箱子在行李中丢失了。从此以后再没有听见它的消息。

1874年索妮亚缺席获得格丁根大学授予的学位以后，回俄国休息，因为兴奋和工作过度，她精疲力尽了。她的名声先期而至，她的"休息"就是一头扎进了圣彼得堡繁忙的社交季节狂热的轻浮活动之中，而维尔斯特拉斯则回到柏林，在整个欧洲到处活动，想方设法要为他心爱的学生谋到一个与她的才能相称的位置。他白费力气的努力，使他厌恶正统学术思想的狭隘。

1875年10月，维尔斯特拉斯从索妮亚那里得到她父亲去世的消息，她显然没有答复他的亲切吊慰，将近三年的时间，她完全从他的生活中消失了。1878年8月，他写信询问她曾否收到他很久以前写给她的一封信，日期他已忘记了。"你没有收到我的信吗？或者有甚么东西能够阻止你，象你惯常做的那样，自由地向我，你常常称为你最好的朋友，吐露你的秘密？这是一个谜，只有你能把谜底告诉我……"

在同一封信中，维尔斯特拉斯相当可怜地请求她，否认说她放弃了数学的谣言：一位俄国数学家切比雪夫去拜访过维尔斯特拉斯，但他外出了，不过这位数学家告诉了博查特，索妮亚已经"去交际"了，因为事实上她确实是如此。维尔斯特拉斯在这封信的结尾写道，"把你的信寄到柏林的老地址，它一定会转给我的。"

427 男人对男人的忘恩负义，是一个人们很熟悉的话题，当索妮亚

想这样做时，她证明了一个女人在这方面所能做的。她整整两年没有答复她老朋友的信，尽管她知道他不愉快，而且健康状况不佳。

当回信来到时，却是一件相当令人失望的事。索妮亚的性欲胜过了她的抱负，她和她的丈夫生活得很幸福。这时她的不幸就是成为一伙浅薄的艺术家、记者和半瓶子醋的文人奉承和愚蠢地故作惊奇的中心，他们对她无比的天才喋喋不休。肤浅的吹捧使她兴奋、激动。如果她与她那些知识分子贵族们经常交往，她原可以仍然过着正常的生活，保持她的热诚，她将不至于如她的所作所为那样，卑鄙地对待这个塑造了她的思想的人。

1878年10月，索妮亚的女儿"福菲"诞生了。

福菲出世后，她不得不安静下来，这再次唤起了这位母亲对数学的潜在的兴趣，她给维尔斯特拉斯写信，要求给予技术上的忠告。他回信说，在提出意见之前，他必须查找有关的文献。虽然她曾经怠慢了他，他仍然准备给予他慷慨的鼓励。他唯一遗憾(1880年10月的一封信中)的是，她长时间的沉默剥夺了他帮助她的机会。"但是我不喜欢过多地谈论往事——所以让我们展望未来。"

物质的艰难唤起索妮亚认识了真理。她是一个天生的数学家，再不能离开数学，犹如鸭子离不开水。所以1880年10月(她当时三十岁)她再次写信请求维尔斯特拉斯给她以忠告。不等他的答复，她就打点行装，离开莫斯科前往柏林。如果她收到了他的回信，可能会使她留在她所在的地方。然而，当心烦意乱的索妮亚出其不意地到达时，他花了一整天的时间，为她仔细检查了她的种种困难。他一定对她作了坦率的谈话；因为当她三个月后回到莫斯科时，她那样狂热地投身于她的数学，以致她那些放荡的朋友们和愚蠢的谄媚者，再也认不出她了。在维尔斯特拉斯的建议下，她着手解决光在水晶媒介中的传播。

1882年的通信有两个新的方面，一个是关于数学兴趣的。另一个是维尔斯特拉斯坦率的意见，认为索妮亚和她的丈夫对彼此都不适合，特别是她的丈夫不能真正重视她才智上的成就。数学论点涉及庞加莱，他当时正处于他事业上的开始阶段。维尔斯特拉斯以他识别年轻天才的可靠的本能，欢呼庞加莱是一个有前途的人，希望他戒除过分迅速地发表著作的癖好，让他的研究成熟，不要把它们分散在太宽的领域。谈到庞加莱如潮水般涌来的论文，他说："每星期发表一篇真正有成就的文章——那是不可能的。"

428

索妮亚的家庭难题，不久就由于她丈夫在1883年3月突然去世而自行解决了。当时她在巴黎，她丈夫在莫斯科。这个打击压倒了她。整整四天，她把自己独自关在房间里，拒绝饮食，第五天丧失了意识，第六天恢复了，要纸和笔，在纸上写满了数学公式。到秋天，她又回复原态，在奥德萨参加了一次科学大会。

由于米塔格-列夫勒的努力，柯瓦列夫斯基夫人终于得到一个她可以充分发挥自己的才干的位置；1884年秋，她在斯德哥尔摩大学讲课，她将在那里被任命（1889年）为终身教授。稍后不久，当意大利数学家维托·沃尔泰拉指出，她关于光在水晶媒介中的折射这项工作中的一处严重错误时，她遭到一次令人相当难堪的挫折。维尔斯特拉斯没有看出这一失误，他当时被公务淹没了，除了这些公务以外，他"只有吃、喝、睡觉的时间……总之，"他说，"我是医生们所说的脑子疲乏。"他这时快七十岁了，但是随着躯体疾病的增加，他的智力仍然象以往一样强健敏捷。

这位大师的七十岁诞辰，成为一个向他公开表示敬意的日子，他的弟子和从前的学生从整个欧洲前来聚会。在这以后，他公开讲演越来越少，有十年的时间是在他自己家里接待少数学生。当

他们看见他疲倦了，就避开数学而谈些别的东西，或者热心地听这位爱和人作伴的老人，回忆他学生时代的恶作剧，和他与科学界的朋友们隔绝的那些可怕的岁月。他八十岁诞辰时，举行了比他的七十岁诞辰更加令人难忘的庆祝，他在一定程度上成了德国人民的民族英雄。

维尔斯特拉斯在他垂暮之年所经历的一次最大的快乐，就是他心爱的学生终于博得了公认。1888年圣诞节前夕，索妮亚由于她的论文«论一个固体物体围绕一个固定点旋转»而获得法兰西科学院的鲍罗丁奖。 429

按照这种大奖赛的规定，论文是不记名提交的（作者的名字放在一个密封的信封里，信封外面有同印在论文上的同样的警句，只有当参加比赛的著作获奖时，才能把信封启开），所以心怀妒嫉的对手们没有机会去作出暗示，施加不正当的影响。裁判们认为这篇论文具有特殊的成就，他们把奖金从原来宣布的三千法朗提高到五千法朗。但是，金钱的价值只是这项大奖的最小的部分。

维尔斯特拉斯欣喜若狂。他写道："我不需要告诉你，你的成就使我自己和我的妹妹们（也是你在这里的朋友）多么高兴。我尤其感受到一种真正的满足；有资格的裁判们现在已经作出了他们的裁决，那就是我'忠实的学生'，我所'钟爱'的人，确实不是一个'轻佻的骗子'。"

我们可以在这两个朋友胜利的时刻离开他们。两年以后（1891年2月10日），索妮亚四十一岁时，短时间患流行性感冒后，在斯德哥尔摩去世。维尔斯特拉斯在她死后又活了六年，于1897年2月19日，在患流行性感冒后又长期患病以后，在他柏林的家中平静地去世，终年八十二岁。他最后的愿望是神父不要在他的葬礼上说什么赞扬他的话，葬礼仪式只限于通常的祈

祷。

索妮亚葬在斯德哥尔摩，维尔斯特拉斯和他的两个妹妹葬在柏林的天主教墓地。索妮亚也信仰天主教，属于希腊教会。

我们现在就维尔斯特拉斯据以奠定他在分析学中的工作的两个基本概念给以提示。详细的或精确的说明，在这里是不可能的，但是可以在任何一本论述全面的、函数论的前几章中找到。

一个幂级数是形式为

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots,$$

的表达式，其中系数 a_0, a_1, $a_2\cdots a_n$, … 是常数，z 是一个变数，所涉及的数可以是实数或复数。

430 级数的前 1，2，3，… 项的和，即 a_0, a_0+a_1z, $a_0+a_1z+a_2z^2$, … 称为部分和。如果对于 z 的某个特殊的值，这些部分和提供了一个收敛到一个确定极限的数列，就说幂级数对 z 的值收敛到同一级限。

使幂级数收敛到极限的一切 z 的值，构成级数的收敛域；对这个区域中的变量 z 的任何值，级数收敛；对 z 的其他值，级数发散。

如果对 z 的某个值级数收敛，它的值就能由取充分大的数目的项，计算到对该值的任何所需要的逼近程度。

现在，在大多数对科学有用的数学问题中，人们指出"答案"是一个微分方程(或这样的方程组)的级数解，而这个解很少能作为被制成表的数学函数(例如对数函数，三角函数，椭圆函数等等)的有限表达式得到。那么，在这样的问题中就必须做两件事：证明级数收敛，如果它收敛的话；计算它的数值到所要求的精确度。

如果级数不收敛，它通常是个信号，说明问题要末是陈述不正确，要末是解错了。大量在纯数学中出现的函数都用同样的方式

处理，不管它们是否最终可能在科学上应用，最后收敛的一般理论被详细阐明，以适用于所有这一切的广阔的范围，以致对一个特殊级数的单独检验，常常涉及已经完成的更广范的研究。

最后，所有这些(纯粹的和应用的两方面)被扩展到代替上面的单变量 z 的 2, 3, 4, … 个变量的幂级数；例如，两个变量，

$$a+b_0z+b_1w+c_0z^2+c_1zw+c_2w^2+\cdots$$

可以说，要是没有幂级数理论，大多数数学物理(包括大部分天文学和天体物理学)如我们所知，就不会存在了。

与极限、连续和收敛的概念一起产生的种种困难，促使维尔斯特拉斯去创造他的无理数理论。 431

假定我们象在中学做的那样开 2 的平方根，计算到很大数目的小数位。我们得到对所求平方根的数字序列 1, 1.4, 1.41, 1.412, … 的逐次逼近。由按照通常的规则，划分明确的步骤，进行充分的劳动，如果必要的话，我们能够展示有理数 1, 1.4, … 构成的这个逼近序列的第一个一千项，或第一个一百万项。检验这个序列，我们发现，当我们进行得足够远时，我们就决定了一个包含着我们想要多少就有多少(比如说 1000)小数位的、完全确定的有理数，这个有理数不同于一个数(小数)的序列，诸如 .000… .000 …，中的任何接连的有理数，在该序列中，在另一个数字 (1, 2, … 或9) 出现以前，要出现相当的大数目的零。

这说明了数的收敛序列意味着什么：构成序列的有理数 1, 1.4, …给我们提供了对我们称为 2 的平方根的无理数的更近的逼近，我们设想这个无理数是由有理数的收敛序列定义的，这个定义的意义在于：在有限步中计算该序列的任何特殊成员的方法(通常的中学方法)已经表示出来了。

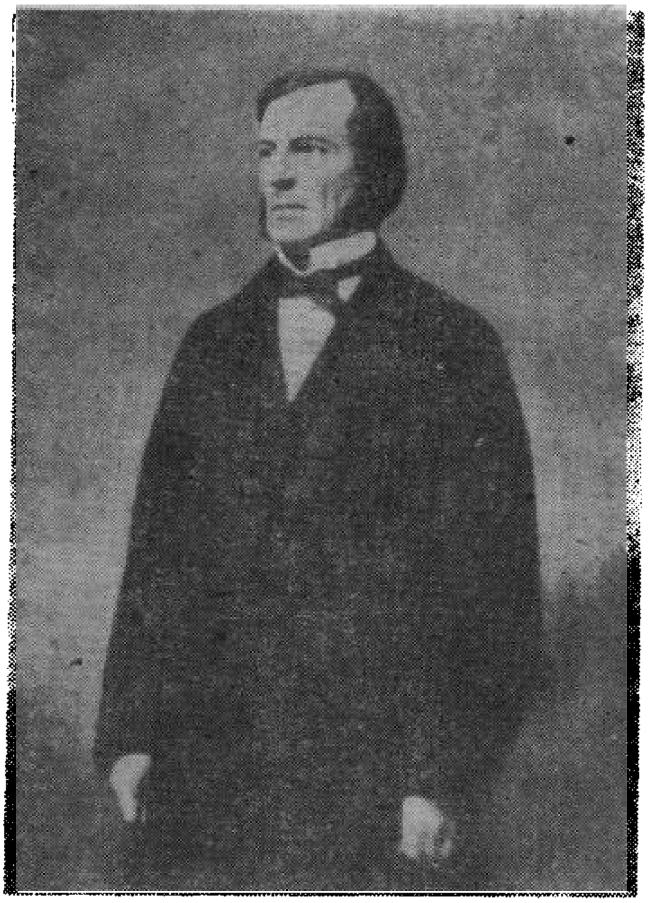
虽然不可能在实际上展示出整个序列，因为它不会在任何有

限步终止，然而我们把构造序列的任何成员的过程，看作把整个序列作为我们能够推论的一个单独的、确定的对象的十分清楚的概念。这样做，我们就有了一个在数学分析中使用无理数2的有效方法，以及同样地使用任何无理数的方法。

正如已经指出的，不可能在本书这样的记述中把这个问题说得很精确，但是甚至小心的陈述，也可能揭露出在上面的说明中极为明显可见的逻辑障碍，——促使克罗内克和其他人攻击维尔斯特拉斯的无理数的"序列"定义的障碍。

然而，不管是对还是错，维尔斯特拉斯和他的学派使这个理论有了作用。还没有哪一个神经正常的、有资格的评判者，怀疑过他们所得到的那些最有用的结果，至少没有怀疑这些结果对于数学分析及其应用的伟大效用。这并不意味着那些障碍没有能很好地对待：它只是唤起对这样一些事实的注意，在数学上，就象在其他一切事情上一样，不能把这个世界与天国混同起来，完美是一种幻想，用克列尔的话说，我们只能希望越来越近的逼近数学的真理，——不管它可能是甚么，如果可能的话——恰如用有理数的收敛序列定义无理数的维尔斯特拉斯理论一样。

说到底，为什么和我们其余的人一样是人的数学家，就总得是如此学究式地精确和如此不近人情地完美呢？正如维尔斯特拉斯所说，"确实，一个没有几分诗人才气的数学家，永远不会成为一个完美的数学家。"那就是答案：一个完美的数学家，正是由于他的诗的完美这个事实，在数学上是不可能的事。



布尔

第二十三章　完全独立

布　　尔

纯数学是布尔在一部他称之为《思维规律》的著作中发现的。

——伯特兰·罗素

“噢，我们从来不读英国数学家做的任何东西。”这句典型的大陆话，是一个杰出的欧洲数学家当被问到他是否听说过一个第一流的英国数学家的最新工作时的回答。他那带着直言不讳的优越

感的"我们",笼统地包括了大陆的数学家。

这不是那种数学家喜欢讲述的关于他们自己的故事，但是由于它极好地说明了英国数学家的特点——岛国的独创性，这个特点又一直是英国学派标榜的主要特点，因此它是对英国有史以来最具岛国独创性的数学家之一、乔治·布尔的生平和工作的理想的介绍。事实是，英国数学家们常常是安静地走他们自己的路，做着只是他们自己感兴趣的工作，就象他们只为了自己娱乐而玩板球一样，他们怀着一种自满的情绪，对于其他人向全世界大声疾呼地保证为科学上最重要的东西，一概置之不理。有的时候，就和对牛顿方法的长期盲目崇拜使英国学派付出了高昂的代价一样，无视当时的主要潮流也使他们付出了高昂的代价，但是从长远看来，这个学派的要么接受、要么放弃的不容讨价还价的态度，毕竟给数学增添了更多的新领域，那是欧洲大陆的只会模仿而缺乏独创性的大师们永远做不到的。不变量理论就是一个恰当的例子；麦克斯韦的电磁场理论是另一个例子。

虽然英国学派作为在其他地方开始的工作的有力发展者而拥有它的地位，但是它对数学发展的更大的贡献是在独创性方面。布尔的工作是这方面的一个显著例子。当它刚一出现时，人们否认它是数学，只有少数几个人例外，这些人主要是布尔自己的不那么正统的同胞，他们看出了这是对于全部数学具有最高意义的某种东西的萌芽。今天布尔所开始的工作的自然发展，正在迅速成为纯数学的一个主要分支，几乎遍及所有国家的许多工作者，正在把它扩展到一切数学领域。在这些领域中，人们正在努力把我们的成果在更坚实的基础上巩固起来。犹如伯特兰·罗素若干年前所说的，纯数学是乔治·布尔在1854年出版的他的《思维规律》一书中发现的。这样说可能是夸大其词，但是它表明了数学逻辑及其

分支在今天具有的重要程度。布尔以前的其他人，特别是莱布尼兹和德·摩根，曾经梦想过要把逻辑本身加进代数的领域；布尔把它变成了现实。

乔治·布尔不象其他一些数学的创始者，出生在经济地位最低的社会阶层。他的命运还要艰难得多。他于1815年11月2日出生在英国林肯，是一个小店主的儿子。如果我们能够相信英国作家们对往昔那些兴旺的日子所描绘的情景——1815年正是滑铁卢之战的这一年——，那么在当时作为一个小商贩的儿子，是要被命运诅咒的。

布尔的父亲所属的那整个阶级所受到的轻视，超过了被奴役的、给厨子打下手的女仆，和被人鄙视的二等听差。布尔所出生的"下等阶级"，在"上等阶级"——包括境况比较好的酒商和放债人——眼里根本就不存在。一个处在布尔的地位的孩子，理所当然，应该恭敬而感激地熟读简编教义问答手册，决不能超出这个对人类的自负和有阶级觉悟的势利行为的卓越证书所强加给他的服从的严格界限。

布尔竭力想把自己教育成为超出"上帝乐意召唤他"的地位，如果说他这种早期的奋斗是模仿在炼狱中涤罪，那是说得太轻了。按照上天的一项神圣法令，布尔的伟大精神已被指定给最卑下的阶级；那么就让它呆在那里自作自受吧。美国人也许愿意回忆，只比布尔大六岁的亚伯拉罕·林肯大约在同一时间也有他自己的斗争。林肯没有受到嘲笑，而是得到了鼓励。

年轻的绅士们为了将来担任当时开始流行的糖果店和煤矿的领袖人物，而在学校里接受训练，他们所受的教育是互相殴打虐待。这些学校不是为乔治·布尔这类人设立的。不，不是，他进的"国立学校"，目的主要在于把穷人留在适合他们的卑贱的地位上。

懂得一点点可怜的拉丁文，或者再稍微懂一点希腊文，是在工业革命的烟尘中那些不可理解的日子里，一个上等人的神秘的标记。虽然没有几个孩子懂得拉丁文，能够不带"夹带"地阅读拉丁文，但是对拉丁文的语法的知识，仍然是出身高贵的一个标志，说来奇怪，靠死记硬背记住拉丁文的句法，却被认为是准备拥有并保持财产的最有用的脑力训练。

在布尔被允许进的那所学校里，当然是不教拉丁文的。布尔对于使得有产阶级能够在财产支配权方面，统治不如他们富有的人的能力，作了一个可悲的错误判断，布尔决定，如果他想要走出困境，他必须学习拉丁文和希腊文。这就是布尔的错误。拉丁文和希腊文，与他穷困的原因毫无关系。在他的为生计奋斗的父亲的同情鼓励下，他确实在自学拉丁文了。尽管这个贫穷不堪的小商人知道，他本人决计逃脱不了穷困，他仍然尽可能地为他的儿子打开道路。他不懂拉丁文。这个奋斗中的孩子就向另一个小商人、他父亲的朋友、一个小书商求助。这个好人只能在初级语法方面给这孩子开个头。此后布尔就得靠自己学下去了。任何人只要看见过一个优秀的教师怎样努力让一个正常的八岁孩子读懂凯撒，就会知道没有导师的布尔面临的是甚么了。到十二岁时，他已经掌握了足够的拉丁文，能够把一首荷马的诗翻译成英文诗了。他的父亲满怀希望地感到骄傲，但是一点也不了解这个翻译在技术上的成就，他在地方报纸上发表了它。这在学术界引起了一场争吵，部分是对布尔的奉承，部分是对他的羞辱。

一位古典文学大师，不承认一个十二岁的孩子能够作出这样的翻译。十二岁的小孩子，对某些事情，往往知道得比他们健忘的长辈想象的更多些。在技术方面，暴露出了严重的缺点。布尔感到丢脸，下决心弥补他自学的不足。他也自学了希腊文。他现在

决心要末做好，要末不做，他花了两年时间，拼命学拉丁文和希腊 436 文，仍然是没有人帮助他。这一切辛劳的效果，在布尔的许多散文的庄严和明显的拉丁文体方面是十分清楚的。

布尔最早的数学教育得自他的父亲。他父亲通过自学，远远超出了他自己所受的那一点点教育。这位父亲还试图使他的儿子对另一个癖好发生兴趣，那就是制作光学仪器，但是布尔决心实现他自己的抱负，坚持认为古典文学是主宰生活的钥匙。他在受完普通教育以后，又选了商业课程。这次他的判断较好，但是并没有给他多大帮助。到十六岁时，他看出他必须立刻赡养他可怜的父母。在学校教书，提供了挣得稳定工资的最直接的机会，在布尔的时代，助教被叫做"助理教员"，付给他们工资而不是薪金。这二者之间不仅仅是钱的差别。可能正是大约这个时候，狄更斯的《尼古拉斯·尼可尔贝》中那个不朽的斯奎尔斯，正在多西博伊斯小学，以他对"投射"法的光辉的预言，对现代教育学作出了他伟大但不被欣赏的贡献。年轻的布尔甚至可能是斯奎尔斯的一个助理教员；他在两所学校教书。

布尔在这两所小学或多或少愉快地教了四年书。至少，在学生们平安地、顺利地入睡以后，那漫长的寒夜是他自己的。他仍然走在错误的道路上。他对于自己在社会上的无价值作出的第三个判断，与他的第二个判断相似，但是比他的第一次和第二次判断都大大前进了一步。他在资本方面一无所有——实际上，这个年轻人挣得的每一个便士，都用来赡养他的父母和维持他自己清贫生活的最低需要了——布尔现在嘱目的是上等人的体面的职业。进军队，在当时是他无力办到的，因为他买不起委任状。当律师，在财产和教育方面都有明显的要求，而他不可能满足这些要求。教书，以他当时所教的程度来说，甚至算不上是名声好的行业，更不

用说职业了。还有甚么呢？只有教会了。布尔决定当一名教士。

尽管说了许多拥护上帝和反对上帝的话，就连他最严厉的批评者也不得不承认，他有幽默感。看出了乔治•布尔一旦成为一名教士是多么可笑，他巧妙地把这个年轻人的热切的抱负，引向不那么荒谬愚蠢的渠道。一次比他们曾经经受过的、更大贫穷的意想不到的折磨，迫使布尔的父母促使他们的儿子，放弃担任教士职位的一切想法。但是他为他计划中的生涯所作的私下（严格保密的）准备，并没有完全白费；他精通了法语、德语、意大利语，它们在他真正的道路上，注定要给予他不可缺少的帮助。

最后他找到了他自己。他父亲对他的早期教育现在结果了。布尔在他二十岁时开办了他自己的一所私人授课学校。为了给他的学生们以适当的准备，他不得不教给他们一些数学，因为那是应该教的。他产生了兴趣。不久，当时那些讨厌的教科书，先是使他惊讶，然后是激起他的轻蔑。这些东西就是数学吗？难以置信。数学大师们是怎么说的呢？同阿贝耳和伽罗瓦一样，布尔直接到大本营去找他前进的命令。必须记住，他只受过初步的数学训练。为了对他的智力得到一点概念，我们可以想象，这个二十岁的孤独的年轻学生，只靠他自己的努力，没有任何帮助，掌握了拉普拉斯的《天体力学》，而这是拉普拉斯写来让认真的学生去融会贯通的最艰深的杰作之一，因为它里面的数学推理，充满了脱漏之处和莫名其妙的声明："显而易见"；然后我们还必须设想，他对拉格朗日的非常抽象的《分析力学》，作了全面的领悟了的研究，这部著作从头到尾连一个用来说明分析的图解也没有。然而，布尔依靠自学找到了他的道路，知道他在做什么。他甚至凭他自己的努力，没有任何人指导，作出了他对数学的第一个贡献。这就是一篇关于微分变量

的论文。

布尔从他这段孤独的研究中，得到了另一项成就，这个成就本身就值得用单独一段来讲述。他发现了不变量。凯莱和西尔维斯特要以杰出的方式来加以发展的、这项伟大发现的重要性，已经充分解释过了；这里我们重复一下，要是没有不变量的数学理论(由早期代数工作中产生)，相对论就是不可能的。这样，布尔在他科学生涯的一开始，就注意到了躺在他脚下的、拉格朗日本人原可以很容易看到的东西，并把它拾了起来，发现他有了一颗头等的宝石。布尔之所以能看出其他人忽略的东西，无疑是由于他对于代数关系的对称和美有很强烈的感觉——当然这是在它们碰巧是既对称又美的时候；但它们并不总是这样。其他人可能会认为他拾到的东西只是不错而已。布尔看出它属于更高的层次。 438

在布尔的时代，数学著作发表的机会是不多的，除非作者恰好是某个有它自己的期刊或学报的学术团体的成员。对布尔来说，幸运的是《剑桥数学杂志》在能干的编辑、苏格兰数学家 D. F. 格雷戈里的主持下，于1837年创刊了。布尔寄去了一篇著作。这篇著作的独创性和风格给格雷戈里留下了很好的印象。他的一封热诚的数学通信，开始了持续布尔一生的友谊。

在这里讨论英国学派当时对于把代数作为代数——即作为对一组无需任何解释，或无需应用于“数”或其他任何东西的公设之结论的抽象发展——来理解所作出的伟大贡献，会使我们离题太远，但是可以提出，代数的现代概念开始于英国的“改革者们”：布科克、赫歇尔、德·摩根、巴巴奇、格雷戈里和布尔。布科克在1830年发表了他的《代数论文》，当时被视为多少有些异端的新奇东西，它在今天已成为任何一本写得不错的中学教科书中的常识了。布科克彻底地为我们在初等代数中发现的，抛弃了 x，y，z，…在

诸如 $x+y=y+x$, $xy=yx$, $x(y+z)=xy+xz$, 等等关系中必然"代表数"这种迷信；它们不代表数，这正是关于代数及其在应用中的力量源泉的一件最重要的事情。x, y, z, …仅仅是按照一些运算结合在一起的任意的符号。一个运算符号代表+，另一个用×代表(或者简单地记作 xy, 以代替 $x\times y$), 与在开始时写下的假设，如上面的例子 $x+y=y+x$, 等等相一致。

不了解代数本身只不过是一个抽象系统，代数可能仍然牢固地停留在十八世纪的算术的泥淖中，而不能在哈密顿的指导下朝它的现代的和极为有用的变式前进。我们在这里只需注意到代数的这个革新，给布尔提供了他的第一次机会，去作出受到他的同代人重视的优秀工作。他自己独创地想出，把数学运算的符号与它们据以运算的东西分开，着手为这些运算而研究这些运算本身。它们是怎样结合的呢？它们也受某种符号代数支配吗？他发现它们是这样的。他在这方面的工作是极其有意义的，但是他自己的一项独特的贡献，即创立一个简单而可行的符号或数学逻辑体系的贡献，使这项工作相形见绌。

为了适当地介绍布尔杰出的发明，我们必须稍稍偏离一下主题，回忆一下十九世纪前半叶的一场著名的争论，这场争论在当时引起了一阵讨厌的喧闹，但是现在除了变态哲学的史学家以外，几乎没有人记得它了。我们刚刚提到过哈密顿。在那时有两个知名的哈密顿，一个是爱尔兰数学家威廉·罗恩·哈密顿爵士(1805—1865)，另一个是苏格兰哲学家威廉·哈密顿爵士(1788—1856)。数学家们通常称这位哲学家为另一个哈密顿。在谋求苏格兰律师和官方大学职位候选人的不成功的经历之后，这位善于辞令的哲学家最后成了爱丁堡大学的逻辑学和形而上学教授。如我们所看到

的，作为数学家的哈密顿是十九世纪一位杰出的富于独创的数学家。这对于另一个哈密顿也许是不幸的，因为他对数学完全没有用处，轻率的读者有时候会把两位著名的威廉爵士混淆起来。这使得另一个哈密顿在九泉下辗转反侧战栗不安。

现在，如果在数学上有什么比一个低能的苏格兰形而上学家更愚钝的，那也许就是数学上低能的德国形而上学家了。要超过苏格兰的哈密顿关于数学说过的一些可笑的荒唐话，我们不得不转向黑格尔关于天文学说过的话，或者洛采关于非欧几何说过的话了。任何想使自己迷糊的堕落的读者，都能很容易地找出他们所需要的一切东西。形而上学家哈密顿的不幸在于，他太愚钝或太懒，没有在中学时学到比对初等数学最肤浅的一知半解更多的东西，但是"他的弱点正是自命为无所不知"，当他开始讲授和写作关于哲学的东西时，他觉得不得不确切地告诉世界，数学是多么无价值。

哈密顿对数学的攻击，也许是数学所经受的许多猛烈的攻击中，未引起人们注意的最厉害的攻击。将近十年前，一个热中于教育学的人，在我们自己的国家教育协会的一次参加人数很多的会议上，宣读了从哈密顿的漫骂中摘出的长长的段落，受到了热烈的鼓掌欢迎。 440

如果听众们不是鼓掌，而是停下来，把哈密顿的一点哲学，作为一种正当享受他的数学鲱鱼的必备配莱吞下去，他们可能会从演讲中得到更多的东西。为了公正地对待他，我们重复一些他的最猛烈的攻击，让读者按照自己的想法去使用它们。

"数学［哈密顿总是把数学(mathematics)用作复数，而不是单数，就象今天习惯的那样］使头脑僵死和干涸"；"过度研究数学使头脑完全丧失哲学和生活所需要的智力"；"数学根本无助于养

成逻辑习惯”；“在数学上，迟钝是这样的被上升为才能，而才能降格为无能力”；“数学可以扭曲头脑，但永远不会纠正头脑。”

这只是一小把鸟枪子弹；我们没有篇幅来叙述他用的炮弹。整个攻击是最令人难忘的——对于一个知道的数学远远少于一个聪明的十岁孩子的人。值得特别提到的是一次最后的攻击，因为它介绍了在整个舌战中具有数学重要性的人物德·摩根(1806—1871)，他是有史以来最老练的辩论家之一，一个精力充沛的独立的数学家，为布尔开路的伟大的逻辑学家，一切怪人、骗子、吹牛者的冷酷而富于幽默感的敌人。最后，他是著名小说家(“简称爱丽丝”等)的父亲。哈密顿说，“这[一个没有必要重复的、完全是胡说八道的理由]就是德·摩根先生在其他数学家当中如此经常地持正确论点的原因。还有，要是德·摩根先生身上数学家的成分再少一些，他可能就更是一个哲学家了。人们应该记住，从长远看，数学和浅斟慢饮特别说明问题。”虽然难解的标点符号是含糊的，但意思是十分清楚的。但是沉溺于饮酒的不是德·摩根。

德·摩根从他对逻辑的领先研究中博得了一些名声，他允许自己在心不在焉的时候落入圈套，陷入与哈密顿关于其“属性的定量”的著名原理的争论。没有必要解释这个神秘的原理是什么(或曾经是什么)；它已经象支香烟那样熄灭了。德·摩根对演绎法作出了真正的贡献；哈密顿认为他在他自己的阴郁的泥淖中发现了德·摩根的宝石，这个怒气冲冲的苏格兰律师-哲学家公开指责德·摩根剽窃——做这样的事是荒谬愚蠢的，于是战斗开始了。至少在德·摩根方面，争吵是一件愉快的嬉戏。德·摩根从来不发火；哈密顿从未学会不发脾气。

441

如果仅仅是有损于科学史形象的无数关于优先权的争吵中的

一次，它就不值一提了。它在历史上的重要性在于，布尔那时(1848年)是德·摩根的坚定的朋友和热心的敬慕者。布尔仍然在小学教书，但是他和许多第一流的英国数学家有私交或通信关系。他现在来帮助他的朋友了——并不是机智的德·摩根需要什么人的帮助，而是因为他知道德·摩根是正确的，哈密顿错了。所以，在1848年，布尔出版了薄薄的一本《逻辑学的数学分析》，这是他对他的工作所开创的广阔学科的第一次公开发表的贡献，他将在这个学科中赢得他想象力的大胆和慧眼独具的不朽名声。这本小册子——它几乎就是小册子——激起了德·摩根的热烈赞扬，大师就在这里，德·摩根赶紧承认了他。这本小册子只是要在六年以后出现的更伟大的东西的预告，但是布尔已经肯定地开辟了新的、棘手的研究科目。

与此同时，布尔很不情愿地拒绝了他在数学界的朋友们要他去剑桥，在那里接受正统数学训练的忠告。他继续从事在小学教书的单调乏味的工作而毫无怨言，因为他的父母现在完全靠他供养了。最后他得到了一个他作为研究人员和讲师的特殊能力能够发挥一些作用的职位。他被任命为新近成立的女王学院的数学教授，该校在爱尔兰的那时称为科克城的地方。这是在1849年。

无需说，这个终生只知道贫穷和刻苦工作的、才气焕发的人，极好地利用了他相对来说摆脱了为经济焦虑和使人厌烦的枯燥工作的自由。他的职责现在看来是繁重的；布尔却发现它们与他习惯了的、教小学的枯燥的日常事务相比是轻松的。他作出了许多值得注意的各种各样的数学工作，但是他主要努力的是继续使他的杰作趋于完善。1854年他发表了这一杰作：《对于奠定逻辑和概率的数学理论基础的思维规律的研究》。当它发表时布尔是三十九岁。一个年龄这样大的数学家作出具有如此深刻的独创性工

作，是多少有些不寻常的，但是当我们记起布尔在能够达到他的目标以前不得不走的漫长、迂回的道路，这个现象就不足为奇了。(对比布尔和维尔斯特拉斯的经历。)

下面摘录的几段将使我们对布尔的风格和他的工作领域有所了解：

"下面这篇论文的目的，是研究那些据以进行推理的心算的基本规律；用微积分学语言来表达它们，并在这个基础上建立逻辑科学，并构造它的方法；使这个方法本身成为应用于概率的数学原理的一般方法的基础；最后，从在这些探索过程中发现的各种真理的成分中，收集一些可能与自然和人类思维的构成有关的提示……。"

"那么，把它看作逻辑的真正科学(这门科学制定了一些基本规律，又由头脑的真正证明所确定，因此允许我们用一致的方法，推断出它的附属的结论，并且为了它的实际应用，提供具有完全的一般性的方法)，我们会犯错误吗？……"

"确实存在某些建立在语言本身特点上的一般原则，据以决定只是科学语言的语素的符号的用途。在一定程度上，这些语素是任意的。它们的解释纯粹是常规的：我们可以在我们愿意的任何意义上应用它们。但是这个许可受到两个必不可少的条件的限制——第一，一旦这个意义常规地建立起来了，我们在推理的同一过程中，决不能背离它；第二，指导过程的规律应该完全建立在上面固定的意义或实用的符号的意义上。与这些原则一致，在逻辑的符号规律和代数的符号规律之间建立起来的任何一致，都只能得出过程一致的结果。解释的两个范围仍然是分开的和独立的，每一个范围都服从于它自己的规律和条件。

"现在下面几页的实际研究，把逻辑在它的实际方面，展示为借助于有确定解释的符号的帮助而执行的过程体系，并且只服从

于建立在该解释基础上的规律。但是同时，它们把那些规律展示为在形式上与代数的一般符号规律相同，只添加了一点，即逻辑符号还得服从于一个特别的规律[在逻辑代数中即$x^2=x$，除了其他方法以外，它能被解释作为'一个类x及其本身所共有的那些东西的全体的类，只能是类x']，量的符号就这点而论无需遵守这条规律。"（也就是说，在通常的代数中，每一个x等于它的平方并不成立，而在布尔逻辑代数中这是成立的）。 443

这个大纲在这本书中仔细实行了。布尔把逻辑简化成极为容易和简单的一类代数。在这种代数中，适当的材料上的"推理"，成了公式的初等运算的事情，这些公式比在中学代数第二年课程中所运用的大多数公式要简单得多。这样，就使逻辑本身受数学的支配。

自从布尔的开创性工作以来，他的伟大发现已经在许多方面被修改、改进、推广和扩展了。今天，在了解数学的性质以及奠定其整个巨大上层建筑的基础状态的任何严肃认真的尝试中，符号或数学的逻辑都是不可缺少的。如果我们只能利用布尔之前的言语逻辑论点的老方法，那么可以确定地说，人类的理智无法对付符号推理所钻研到的那些错综复杂的微妙的困难。布尔的全部计划的大胆创见无需路标，它本身就是一个里程碑。

自从1899年希耳伯特发表了他关于几何基础的杰作以来，人们已经对数学的几个分支的公设的系统阐述，给以极大的注意。这个运动可以追溯到欧几里得，但是出于某种奇怪的原因——也许是因为笛卡儿、牛顿、莱布尼兹、欧拉、高斯，以及其他一些人所发明的方法，使数学家们在自由地、不受批判地发展他们的学科方面有大量事情可做——欧几里得的方法除了几何之外，在一切学科中都被长期忽视了。我们已经看到，英国学派在十九世纪上半叶

把这个方法应用到代数上。他们的成功，似乎没有给他们的同时代人和直接后继者们的工作留下多大影响，只是由于希耳伯特的工作，公设的方法才作为对于任何数学训练的最明确、最严格的方法而得到承认。

今天这个抽象的趋势——其中在一个专门学科中的运算的符号和规则完全失去了意义，并且是从纯形式观点讨论的——风行一时，但忽略了应用(实际的或数学的)，而一些人说应用正是人类对于任何科学活动的最终主张。然而，抽象的方法确实提供了不十分严格的工作方法所不能提供的洞察力，特别是布尔的逻辑代数的真正简便，最容易看出这一点了。

444

因此我们将叙述布尔代数(逻辑代数)的公设，并在这样做了以后，看出确实能够给它们与古典逻辑一致的解释。下面一组公设是从 E. V. 亨丁顿发表在《美国数学学会会报》(1933 年，第 35 卷，274～304 页)上的一篇文章中摘录的。任何学过一星期代数的人都能很容易地看懂全文，这篇文章可以在大多数大公共图书馆中找到。正如亨丁顿指出的，(我们抄下来的)他的这第一组公设，不如他的一些其他公设那样好。但是由于它用类的包含关系的解释，与用形式逻辑的解释，同样比对于其它一些公设的解释更直接，我们更愿意在这里用它。

这一组公设是用 K，+，× 表示的，其中 K 是一类不确定的(完全任意的，没有任何预先指定的、超出公设中给出的意义或性质)元素 a, b, c, …，而 $a+b$ 和 $a\times b$(也简单地写作 ab)是两个不确定的二元运算+，×的结果。("二元"，因为+，×的每一个都作用于 K 的两个元素上)。因此有十个公设，I_a-VI：

"I_a. 如果 a 和 b 在类 K 中，那么 $a+b$ 在类 K 中。

"I_b. 如果 a 和 b 在类 K 中，那么 ab 在类 K 中。

"II_a. 有一个元素 Z，使得对于每一个元素 a 有 $a+Z=a$。

"II_b. 有一个元素 U，使得对于每一个元素 a 有 $aU=a$。

"III_a. $a+b=b+a$。

"III_b $ab=ba$。

"IV_a. $a+bc=(a+b)(a+c)$。

"IV_b. $a(b+c)=ab+ac$。

"V. 对于每一个元素 a，有一个元素 a'，使得 $a+a'=U$，$aa'=Z$。

"VI. 在类 K 中至少有两个不同的元素。"

很容易看出，下面的解释满足这些公设：a, b, c, …是一些类；$a+b$ 是所有那些至少在类 a, b 之一中的东西的类；ab 是那些既在类 a 中又在类 b 中的东西的类；Z 是"空类"——没有元素的类；U 是"全类"——包含所讨论的一切类中的一切东西的类。那么公设 V 说明已知的任何类 a，有一个包含所有那些不在 a 中的东西的类 a'。注意 VI 表示 U, Z 不是同一个类。 445

从这样一组简单而明显的陈述中，看出相当值得注意的是，整个经典逻辑都能通过由公设生成的容易的代数，用符号建立起来。从这些公设中发展起了可以称为"逻辑方程"的理论：逻辑中的问题被转换成这样的方程，然后这些方程用代数的方法"求解"；然后再按照逻辑数据重新解释这个解，给出原始问题的解答。我们用"包含"——当 K 的元素是命题而不是类时，也可以解释为"蕴涵"——的符号等式来结束这段描述。

"关系 $a<b$ [读作 a 包含在 b 中]是由以下方程中的任意一个定义的：$a+b=b$, $ab=a$, $a'+b=U$, $ab'=Z$。"

为了说明这些是合理的，作为例子，考虑第二个方程 $ab=a$。这个方程说，如果 a 包含在 b 中，那么既在 a 中又在 b 中的一切是

a 的全体。

从所述的公设中，能够证明以下关于包含的定理(如果有必要，可以有几千个更为复杂的定理)。选出来的例子都符合我们对于“包含”的意义的直观概念。

(1) $a<a$。

(2) 如果 $a<b$, $b<c$, 那么 $a<c$。

(3) 如果 $a<b$, $b<a$, 那么 $a=b$。

(4) $Z<a$ (其中 Z 是 II_a 中的元素——可以证明是满足 II_a 的唯一元素)。

(5) $a<U$ (其中 U 是 II_b 中的元素——同样是唯一的)。

(6) $a<a+b$; 如果 $a<y$, $b<y$, 那么 $a+b<y$。

(7) $ab<a$; 如果 $x<a$, $x<b$, 那么 $x<ab$。

(8) 如果 $x<a$, $x<a'$, 那么 $x=Z$; 如果 $a<y$, $a'<y$, 那么 $y=U$。

(9) 如果 $a<b'$ 不成立，那么至少有一个与 Z 不同的元素 x，使得 $x<a$, $x<b$。

446 注意到在算术和分析中“$<$”是“小于”的符号，可能是有意思的。注意，如果 a, b, c, …是实数，Z 表示零，那么(2)对“$<$”的这个解释是满足的，若 a 是正数，(4)也同样；但是(1)是不满足的，(6)的第二部分也不满足——如我们从 $5<10$, $7<10$, 但 $5+7<10$ 不成立所看到的。

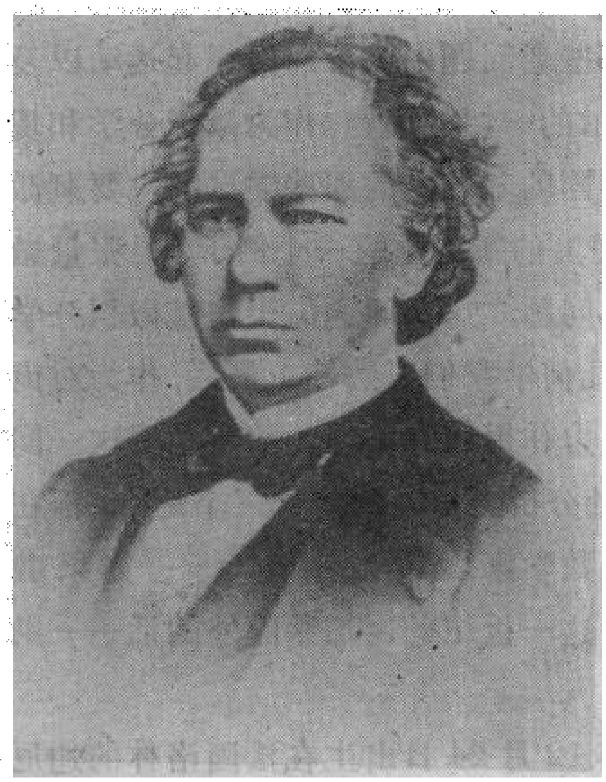
了解了这个方法在关于符号逻辑的任何工作中的作用，就能很容易地重视它的巨大力量和简便易行。但是正如已经强调过的，这个“符号推理”的重要性，在于它对与全部数学的基础有关的难解问题的运用性，要不是这个精确方法断然确定“语词”或其它“符号”的意义，这种问题也许是常人无法接近的。

几乎象所有的新奇事物一样，符号逻辑在发明之后的许多年内没有受到人们的重视。我们发现迟至1910年，著名的数学家们还蔑视地称它为没有数学意义的、哲学上稀奇古怪的东西。怀特海和罗素在《数学原理》(1910—1913)中的工作，首先使一切专业数学家的重要团体相信，符号逻辑可能是值得他们认真注意的。符号逻辑的一个坚定的反对者康托尔，可以在这里提一提，他关于无限的工作将在最后一章中论述。由于那些使数学史对于没有偏见的人成为如此有趣的读物的一个小小的讽刺，符号逻辑在对康托尔的著作的激烈批评中起了很大的作用，使它的作者对他本人和他的理论丧失了信心。

布尔在他的杰作出版以后没有活多久。在它出版后那一年，布尔仍然在不自觉地为得到他一度认为希腊文的知识能够给予他的社会地位而奋斗。他和玛丽·埃弗雷斯特结了婚，她是女王学院的希腊文教授的侄女。他的妻子成了他忠实的学生。玛丽·布尔在丈夫去世后，应用她从他那里得到的一些思想，使儿童教育合理化和变得仁慈博爱。在她的小册子《布尔的心理学》中，玛丽·布尔记述了布尔的一个有趣的思考，《思维规律》的读者们将会看出，这种思考与一些章节中没有表示出来，但是隐含着的个人哲学是一致的。布尔告诉他的妻子，在1832年他十七岁时，当他步行穿过一片田野的时候，他“突然想到”，除了从直接观察中得到知识，人还从某种不确定的、不可见的——玛丽·布尔称为“无意识的”——源泉得到知识。听到庞加莱(在后面一章中)表示了关于数学“灵感”起源于“潜意识”的智慧之中的同样看法，是很有趣的。不管怎么说，如果有过一个人产生过灵感的话，布尔在写作《思维规律》时是产生了灵感的。 447

布尔于1864年12月8日去世，终年五十岁，这时他是受人尊

敬的，并享有迅速增长的名声。他的早逝是由于他在被大雨浇透的情况下，仍然忠实地作了预定的演讲，在这以后，患了急性肺炎。他完全知道他已经作出了伟大的工作。



埃尔米特

第二十四章　人，而不是方法

埃 尔 米 特

> 与埃尔米特先生谈话：他从不唤起具体的形象；然而你很快就发觉，最抽象的本质对于他也象活着的生物一样。
>
> ——亨利·庞加莱

突出的未解决的问题需要新的方法去求解，而有力的新方法又引起有待解决的新问题。但是正如庞加莱所说，解决问题的是

人，而不是方法。

在数学中引起新方法的那些老问题中，可以回想起运动以及它对于力学、地球或天体所暗示的一切的问题，作为微积分学和现在将关于无限的推理建立在坚固的基础上的那些尝试的主要刺激因素之一。有力的新方法所提出的新问题的一个例子，是张量微积分学在几何学中引起的大堆问题，这些问题由于张量微积分学在相对论中的成功应用，而为几何学家们所熟知。最后，作为对庞加莱的话的例证，解决了给引力作用以有条理的数学说明这一问题的，是爱因斯坦，而不是张量分析方法。所有这三个论点，都在十九世纪后半叶第一流的法国数学家夏尔·埃尔米特——如果我们把他的学生、部分属于我们这一世纪的庞加莱除外的话——的一生中得到证实。

夏尔·埃尔米特于1822年12月24日出生在法国洛林的迪厄泽，他几乎不能选择比出生在十九世纪第三个十年更适合的时代了。创造性的才能与掌握其他人的工作精华的能力，在他身上罕见地结合在一起。上一世纪中叶所需要的，把高斯的算术创造与阿贝耳和雅可比在椭圆函数中的发现、雅可比在阿贝耳函数上的显著进展，以及由英国数学家布尔、凯莱和西尔维斯特迅速发展的代数不变量的广阔理论协调在一起的，正是这种结合。

449 埃尔米特差一点儿在法国大革命中丧命——虽然砍下最后一颗头颅，几乎是在他出生以前四分之一个世纪。公社使他的祖父倾家荡产，他的祖父死于狱中；他祖父的兄弟上了断头台。埃尔米特的父亲由于年轻而幸免于死。

如果埃尔米特的数学能力来自遗传，那也许是从他父亲那方面遗传来的，他的父亲学过工程。老埃尔米特发现工程与他的志趣不合，就放弃了它；在制盐业同样兴味索然地干了一阵以后，他

最后当了一名布商，安定了下来。他无疑是出于是一个无定居的人，而选择了这个栖身的行业，因为他与他的雇主的女儿马德莱娜·拉勒芒结了婚。她是一个跋扈的女人，在她家里掌权当家，从商业到她的丈夫，一切都管。她成功地使两方面都达到了可靠的中产阶级的顺遂状态。夏尔是七个孩子——五个儿子两个女儿——中的第六个。他一生下来右腿就有残疾，这使他终生成为瘸子——也许因祸得福，因为它有效地阻止他从事任何与军队有关的，即使是关系很远的职业——他不得不拄着手杖走路。他的残疾从来没有影响到他始终如一的温和的性格。

埃尔米特从他的父母那里接受了启蒙教育。由于生意继续兴隆，这一家在埃尔米特六岁时从迪厄泽迁居到南希。不久，生意上不断增加的需要占去了他父母的全部时间，埃尔米特被送到南希的公立中等学校去作一名寄宿生。这个学校结果是不令人满意的，境况顺遂的父母决定让夏尔受最好的教育，就把他送往巴黎。在那里，他先在亨利第四公立中学学习了一个短时期，在十八岁时(1840年)转到更著名的(或不名誉的)路易大帝学院——不幸的伽罗瓦的“母”校——为进综合工科学校作准备。

有一段时间，看上去好象埃尔米特要重复他在路易大帝学院的那个不能驯服的前辈的灾难。他同样不喜欢修辞学，同样对课堂上的初等数学漠不关心。但是物理课的精采讲授迷住了他，赢得了他在受教育过程中教学双方的真诚合作。后来，那些卖弄学问的教师没有为难埃尔米特，他成了一名优秀的古典学者和写作优美清新的散文的大师。

那些厌恶考试的人会热爱埃尔米特。在路易大帝学院的这两个最著名的校友伽罗瓦和埃尔米特的经历中，有一些事情，很可能会使那些把考试作为衡量人的智力高低的可靠尺码的人扪心自

450

问，他们在得出结论时，是用他们的头脑，还是用他们的脚。只是由于上帝的恩典和忠实而聪明的里夏尔教授富于外交手腕的坚持，埃尔米特才没有被愚蠢的主考人踢出去，在失败的垃圾堆上枯萎。里夏尔在十五年前曾尽了他的全部努力，为科学拯救伽罗瓦而没有奏效。当埃尔米特还是中等学校的学生时，就踏着伽罗瓦的足迹，在圣-热纳维埃夫图书馆自己阅读，既补充又忽略他的初等课程。他在这家图书馆里找到并掌握了拉格朗日关于数字方程求解的论文。他攒钱，买了高斯的《算术研究》的法文译本，而且掌握了它，而在这以前或以后，只有极少数人掌握了它。到埃尔米特领悟了高斯所做过的工作时，他就准备继续研究了。他后来喜欢说："正是从这两本书中，，我学会了代数。"欧拉和拉普拉斯也通过他们的著作指导了他。然而埃尔米特的考试成绩，说得尽可能好听一些也只是中等。数学上无足轻重的人无可争辩地击败了他。

里夏尔没有忘记伽罗瓦的悲惨结局。他竭力劝告埃尔米特，从创造性的研究转向虽然浑浊一些，却不那么令人激动的、进入综合工科学校的竞争性入学考试的水洼——伽罗瓦本人淹死在其中的那个污浊的水沟。然而好心的里夏尔忍不住告诉埃尔米特的父亲，夏尔是"一个年轻的拉格朗日。"

《新数学年报》这份专门为中学生的利益而办的杂志，创刊于1842年。第一卷包括了埃尔米特还是路易大帝学院的学生时写的两篇文章。第一篇文章是关于圆锥曲线的解析几何的一个简单练习，没有显示出甚么独创性。第二篇文章在埃尔米特的选集中只占了六页半的篇幅，却完全是另外一回事了。它的谦逊的题目是《对五次方程代数解的探讨》。

"大家知道，"这个二十岁的谦虚的数学家在开始时说，"拉格

朗日使一般五次方程的代数解依赖于确定一个特殊的六次方程的根，他称这个六次方程为简化方程［今天称为“预解方程”］……。因此，如果这个预解方程可以分解成二次或三次的有理因子，我们就会得到五次方程的解。我将试着说明这样一个分解是不可能的。”埃尔米特不仅在他的尝试中获得了成功——通过一个极其简单的论据——而且在这样作时也显示出他是一个代数学家。只要稍微作一些改动，这篇短文就能够做到所要求的一切。 451

看来似乎很奇怪，具有埃尔米特在他的一般五次方程的文章中表明的真正数学推理才干的年轻人，竟会发现初等数学是困难的。但是为了能够领悟自1800年以来发展起来的，至今仍然使数学家们感兴趣的数学，并进行创造性的工作，没有必要去懂得——甚至听说——许多在数学的漫长历史进程中出现的经典数学内容。例如，今天任何想要领悟现代几何的人，无需去掌握希腊人的圆锥曲线的几何处理(综合几何)；爱好代数或算术的人，也根本无需学习任何几何。在较小的程度上，同样的情况对分析学也成立，在分析学中所用的这样的几何语言是最简单的，而如果目的是现代证明的话，它既不必需，也不合乎需要。举最后一个例子，对于画图的工程师们用处很大的画法几何，实际上对于从事研究工作的数学家一点用处也没有。一些仍然是数学上敏感的、相当困难的科目，只需要中学代数教育和能够领悟它们的清楚的头脑。这些学科包括有限群理论，无限的数学理论，概率理论的一些部分和高等算术。所以要求报考技术学校或科学院校的考生，甚至这些学校的毕业生必须知道的很多东西，对于他们从事数学专业是完全不足取的就不令人吃惊了。这说明了埃尔米特作为一个初露头角的数学家之所以取得成功，和他作为一名考生之所以侥幸才勉强逃脱了失败的灾难。

1842年下半年，埃尔米特二十岁时参加了综合工科学校的入学考试。他通过了，但是成绩仅仅列到第六十八名。他已经是比一些考他的人当时或将要成为的好得多的数学家了。这次考试的丢脸的结果，给这位年轻大师留下的印象，是他成年后的全部成功也未能消除的。

452 埃尔米特在综合工科学校只读了一年。并不是他的头脑使他没有资格继续学习，而是他的跛脚，根据官方的裁决，跛脚使他不适宜担任为该校成功的学生敞开的任何职位。也有可能埃尔米特是被赶出去的；他是一个热心的爱国者，很可能被卷入对奋发的法国气质是非常宝贵的这个或那个政治的或军事的争吵之中。不过，这一年并没有白费。埃尔米特没有在他厌恶的画法几何上下功夫，而是把他的时间用在阿贝耳函数上，这在当时(1842年)或许是对于欧洲的大数学们有显著兴趣和重要性的题目。他也结识了一位第一流的数学家和《数学杂志》的编辑约瑟夫·刘维尔(1809—1882)。

当刘维尔看到天才时，一下子就认出了它。顺便提一下，刘维尔曾经激励著名的苏格兰物理学家威廉·汤姆森，即开尔文勋爵，给数学家下了一个所有定义中最令人满意的定义，回想起这件事是很有趣的。“你们知道数学家是什么样的人吗？”开尔文有一次问班上的学生。他走到黑板面前，写下了

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}。$$

然后他用手指着写下的式子，转身对学生们说，“一个数学家就是对他说来，这就象二加二等于四对你们一样明显的人。刘维尔就是一个数学家。”年轻的埃尔米特在阿贝耳函数方面的开拓性工作，在他二十岁时就很好地开始了，在不明显上，就象开尔文的例

子远远超出了“二加二等于四”一样，远远超出了开尔文的例子。刘维尔记起年迈的勒让德对年轻的、不为人知的雅可比的革命性工作所表示的衷心欢迎，他猜测雅可比会对刚刚起步的埃尔米特表示出同样的慷慨。他没有猜错。

埃尔米特写给雅可比的那些令人吃惊的信，第一封是1843年1月从巴黎发出的。“学习您［雅可比］关于从阿贝耳函数理论中产生的四重周期函数的论文，使我得出了一个定理，是关于这些函数的自变数［变量］的分离的，类似于您给出的……得出由阿贝耳探讨的方程根的最简表示式的定理。刘维尔先生介绍我写信给您，把这个工作呈交给您；先生，我能希望您愿意以它所需要的全部宽容欢迎它吗?”于是乎，他立即投身于数学。

453

我们大致回想一下所论问题的质朴的性质：三角函数是一个变量一个周期的函数，这样 $\sin(x+2\pi)=\sin x$，其中 x 是变量 2π 的周期，阿贝耳和雅可比通过“逆转”椭圆积分，发现了一个变量两个周期的函数，比如说，$f(x+p+q)=f(x)$，其中 p 和 q 是周期(见第十二章、十八章)；雅可比发现了两个变量四个周期的函数，比如说，

$$F(x+a+b,\ y+c+d)=F(x,\ y),$$

其中 a，b，c，d 是周期。在三角学中早期碰到的一个问题是用 $\sin x$(以及也许其它一些 x 的三角函数)表示 $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$，或 $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$，或一般的 $\sin\left(\frac{x}{n}\right)$，其中 n 是任意整数。埃尔米特着手解决的是两个变量四个周期的函数的相应问题；在三角学的问题中，我们最后被引向一些相当简单的方程；在埃尔米特的无与伦比的更困难的问题中，结果仍然是一个(n^4 次的)方程，关于这个方程，出人意

料的是它能够代数求解，也就是说，用根式求解。

埃尔米特的残疾把他关在综合工科学校之外，他现在把渴望的目光投向教书的职业，把它作为他可以谋生、同时继续研究他所热爱的数学的避难所。不管他有没有学位，这个职业都应该对他敞开大门，但是冷酷的规则和条例不允许有任何例外。官僚作风总是缢住不该被缢住的人，它差一点把埃尔米特绞死。

埃尔米特不能使自己从他的"有害的独创性"中脱身出来，他继续他的研究，直到可能的最后一刻，这时，在二十四岁时，他放弃了他正在从事的最重要的发现，去掌握取得他的第一次学位(大学文、理学士)所需要的那些不足道的东西。这位年轻的数学天才在能够得到适合于教书的证书以前，通常在第一次严格的考试以后，还有两次更难的考试，但是当有影响的朋友们使埃尔米特得到一个他能够挫败主考人的职位时，他幸运地逃脱了最后的也是最糟糕的考试。他勉勉强强地通过了他的考试(1847—1848年)。要不是由于两个提问者——斯图谟和贝特朗，两人都是优秀的数学家，当他们看到一个同行的名手时，就会一下子认出来——的友情，埃尔米特也许根本就通不过。(埃尔米特在1848年和贝特朗的妹妹路易丝结婚。)

454

由于命运的讽刺性作弄，埃尔米特第一次学术上的成功，竟是他在1848年被任命为差一点没有录取他的那所综合工科学校的一名入学考试委员。几个月以后，他在这同一所学院里被任命为主考人。他这时被安全地安置在没有哪个主考人能困住他的适当位置上了。但是为了达到这个"糟糕的显要职位"，他把几乎肯定是他最有创造力时期中的五年时间，牺牲在抚慰官僚制度的愚蠢上了。

埃尔米特最后满足了或摆脱了他那些贪得无厌的考试委员

们，他安顿下来成为一个伟大的数学家。他的生活是风平浪静的。在1848年到1850年，他受聘于法兰西学院。六年以后，在刚满三十四岁时，他被选入学院（作为科学院的院士）。尽管他作为一个有独创性的数学家是举世闻名的，但他直到四十七岁才得到了一个合适的职位：他直到1869年才被任命为巴黎师范学校的教授，最后，他在1870年成为巴黎大学的教授，他担任这一职位直到他二十七年后退休为止。他在担任这个有影响的职位期间，训练了整整一代卓越的法国数学家，其中可以提到的有埃米尔·皮卡尔、加斯东·达布、保罗·阿佩尔、埃米尔·波莱尔、保罗·潘勒韦，以及亨利·庞加莱。但是他的影响远远超出了法国，他的经典著作帮助教育了在世界各国的他的同代人。

埃尔米特杰出的工作的一个显著特点，与他反对利用他的权威地位，按着他自己的样子，重新造就他的学生们密切相关：这就是他一惯向他的同代数学家们表示的慷慨大度。也许现代没有哪一个数学家象埃尔米特那样，与欧洲各地的工作者进行了如此大量的科学通信。他写信的语气总是温和的、鼓励的、欣赏的。十九世纪后半期的许多数学家，都把他们获得公众承认归功于埃尔米特最先作出的努力。在这方面，也象在其它方面一样，整个数学史上没有比埃尔米特更优秀的人物了。雅可比也是慷慨的——除了他早期对待艾森斯坦是一个例外——但是他有一种喜欢讽刺的倾向（经常是很逗笑的，也许对不幸的受害者除外），这是埃尔米特温和的妙语中完全缺少的。当这个不知名的年轻数学家冒失地用他关于阿贝耳函数的第一篇伟大的作品去接近雅可比时，这样一个人是值得雅可比的慷慨回答的。雅可比写道："如果你的一些发现与我过去的工作恰好重合，先生，不要因此止步不前。因为你必须在我停止的地方开始，那就必然会有小范围的接触。今后如果你 455

给我与你通信的荣誉，我将只是在学习了。”

在雅可比的鼓励下，埃尔米特不仅同他分享了在阿贝耳函数方面的发现，而且给他写了四封关于数论的惊人的长信，第一封早至1847年。这些信件，第一封是埃尔米特只有二十四岁时写的，开辟了新的领域(我们不久就将指出是在什么方面)，仅仅这些信就足以确立埃尔米特为一名第一流的有创造力的数学家。他着手解决的问题之广泛，以及他为解决它们而发明的方法之大胆的独创性，确立了埃尔米特作为一位历史上天生的数学家的纪念碑。

第一封信以道歉开始：“将近两年的时间过去了，我没有回答您惠赐我的充满良好祝愿的信。今天，我请求您原谅我的长期缄默，并向您表达我看到自己在您的著作的宝库中得到一席之地所感到的全部喜悦之情。[雅可比在他自己的一项工作中，发表了埃尔米特信中的一些部分，并致以他应得的感谢。] 我已经离开工作很久了，对您这种仁慈的表示，我深为感动；先生，请允许我相信，您的仁慈不会离开我。”然后埃尔米特说，雅可比的另一项研究，激起了他目前的努力。

如果读者浏览一下在高斯那一章中，关于单变量单值函数所说的话(单值函数对变量的每一个值，只取一个值)，那么下面雅可比证明的论断就是可以理解的了：有三个不同周期的单变量单值函数是不可能存在的。有一个周期或两个周期的单变量单值函数存在，这是由展示三角函数和椭圆函数证明了的。埃尔米特宣称，雅可比的这个定理给他提示了他引进高等算术的新奇方法的思想，虽然这些方法过于专门，无法在这里描述，但是可以简单地指出其中之一的精神。

456 高斯意义下的算术，讨论有理整数1, 2, 3, …的性质；无理数(如2的平方根)被排斥在外。高斯特别研究了两个或三个未知

数的不定方程的一些很大的类的整数解，例如在 $ax^2+2bxy+cy^2=m$ 中，a, b, c, m 是任意整数，要求讨论方程的全部整数解 x, y。这里要注意的是，问题是确定的，并且得完全在有理整数域求解，也就是说，在离散数的范围内求解。要让这样一个离散问题去适合分析，其适用于连续数的研究似乎是不可能的；然而使之适合分析，正是埃尔米特所做的。他从离散的系统表述开始，把分析应用于这个问题，最后在他由之开始的离散的领域得到结果。由于分析学比为代数和算术发明的任何离散技术都要发展得更高深得多，因此埃尔米特的进展，可以与为中世纪的手工业引进现代机器相比较。

在代数和分析这两方面，供埃尔米特支配的方法，比高斯在写作《算术研究》时候所能使用的方法要有力得多。与埃尔米特自己的伟大发明一起，这些更现代的工具使他能够解决在 1800 年会使高斯困惑的问题。在一项进展中，埃尔米特赶上了高斯和艾森斯坦讨论的类型的一般问题，他至少开始了任意多个未知数的二次型的算术研究。“型”的算术“理论”的一般性质，可以从一个特殊问题的陈述中看出来。代替两个未知量 (x, y) 的二次高斯方程 $ax^2+2bxy+cy^2=m$，要求讨论 S 个未知量 n 次的类似方程的整数解，其中 n, S 是任意整数，方程左边的每一项都是 n 次的(不象在高斯方程中是 2 次)。埃尔米特叙述了他在仔细思考雅可比的研究之后，怎样看出了单值函数的周期性依赖于二次型理论中一些更深刻的问题，然后他概述了他的计划。

“但是，一经得出了这种观点，我想要向自己提出的——足够广泛的——问题，和型的一般理论的那些大问题相比就是不足道的了。在高斯先生[埃尔米特写这封信时高斯还健在，所以有礼貌地用“先生”二字]给我们展现的这个无限广阔的研究领域中，代数

和数论似乎没有必要被并入分析概念的同一个体系，我们目前对它的知识还不足以让我们形成一个精确的想法。”

然后他讲了几句话，虽然不够清楚，但可以解释为意味着理解代数、高等算术和函数理论的某些部分之间的微妙联系的关键，可以在彻底理解什么类型的“数”对于所有类型的代数方程的显示解既充分又必要的过程中找到。因此，对于 $x^3-1=0$，理解 $\sqrt[3]{1}$ 是既充分又必要的；对于 $x^5+ax+b=0$，其中 a，b 是任意已知数，为使 x 可以用 a，b 显示表示出来，必须发明什么样的“数”x 呢？当然，高斯提供了一类解答：任意的根 x 是一个复数。但是这只是开始。阿贝耳证明了如果只允许作有限次的有理运算和开根，那么就没有把 x 按 a，b 表示出来的显示公式。我们将在稍后一些再回到这个问题；埃尔米特似乎在这个较早的时候(1848 年，他当时二十六岁)，就在他心里的某个地方产生了他的一个最伟大的发现。

在对待数的态度上，埃尔米特有几分毕达哥拉斯和笛卡儿传统的神秘主义——笛卡儿的数学信条，如我们马上要讲述的，基本上是毕达哥拉斯的信条。在其它问题上，温和的埃尔米特也呈现出一种显著的神秘主义的倾向。直到四十三岁为止，他一直是一个宽容的不可知论者，就象他那个时代的许多法国科学界人士一样。然后，在 1856 年，他突然间危险地病倒了。在这样衰弱的情况下，他甚至连最不固执的福音派传教士也敌不过，热心的柯西总是为他这个才气焕发的年轻朋友在宗教问题上的不偏不倚感到遗憾，这时连忙抓住衰竭的埃尔米特，使他皈依了罗马天主教。从此以后，埃尔米特就是一个虔诚的天主教徒了，天主教的宗教仪式使他非常满意。

埃尔米特的数-神秘主义还算是无害的，而且它是争论对之

无用的那些私事之一。简言之，埃尔米特相信，数有一种超出人类一切控制的、它们自己的存在。他认为，数学家们有时候可以瞥见调节这个数的存在的天上王国之超人的和谐，正象伦理学和道德学的一些伟大天才有时宣称，他们在梦中看到了天国的神圣的完美。

458

也许这样说是对的：在今天，没有哪一个受人尊敬的数学家，在试图了解数学的性质和数学推理过程中，多少注意到了过去五十年(特别是最近二十五年)内做过的一切，还会同意神秘的埃尔米特的看法。这个关于数学的来世说的现代怀疑主义，对埃尔米特的信念是得还是失，必须留给读者去品评了。现在有资格的评判人几乎一致认为，"数学的存在"是一种错误观念，但是笛卡儿却在他的永恒的三角形理论中，赞美地表示出了这种观点，因而可以在这里引用它，作为埃尔米特的神秘信仰的缩影。

"我想象一个三角形，虽然这样一个图形也许在我的思想以外的世界上任何地方都不存在，并且从来没有存在过。然而这个图形有一种确定的性质，或形式，或决定要素，这种东西是不朽的，或永恒的，我没有发明它，它也绝对不依赖于我的头脑。这是明显的，因为有下述事实：我能够说明这个三角形的各种各样的性质，例如，它的三个内角的和等于两个直角，最大的角对着最长的边，等等。不管我是否想要，我都非常清楚，非常令人信服地看出，这些性质是在三角形中的，虽然我以前从未想过它们，甚至这是我第一次想象一个三角形。然而没有人能说我发明或想象出了它们。"把这些转换到诸如 $1+2=3$，$2+2=4$ 这样的简单的"永恒的真理"，笛卡儿的万世不移的几何，就成了埃尔米特的超人的算术了。

这里可以提到埃尔米特的一项算术研究(虽然它相当专门)，作为纯数学的预言方面的一个例子。我们回想起高斯为了给双二

次互反性以最简单的表述，把复整数（形式为 $a+bi$ 的数，a，b 是整数，i 表示 $\sqrt{-1}$）引进到高等算术中。然后狄利克雷和高斯的其他追随者们讨论了这样一些二次型，其中作为变量和系数出现的有理整数，被高斯的复整数所代替。埃尔米特探讨了这种情形的一般情况，在今天所说的埃尔米特形式中研究了整数的表示。这样一种形式的一个例子（以两个复变量 x_1，x_2 和它们的"共轭" $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$ 代替 n 个变量的特殊情形）是

459

$$a_{11}x_1\bar{x}_1+a_{12}x_1\bar{x}_2+a_{21}x_2\bar{x}_1+a_{22}x_2\bar{x}_2,$$

其中代表复数的字母上面的横杠表示那个数的共轭，即，如果 $x+iy$ 是复数，它的"共轭"是 $x-iy$；系数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 是这样的，使得对于 $(i, j)=(1, 1)$，$(1, 2)$，$(2, 1)$，$(2, 2)$，$a_{ij}=\bar{a}_{ji}$，因此 a_{12} 和 a_{21} 是共轭的，且 a_{11}，a_{22} 是它们各自的共轭（因此 a_{11}，a_{22} 是实数）。容易看出来，如果把所有的积都乘出来，整个形式是实在的（没有 i），但是用已给出的形式讨论是最"自然的"。

当埃尔米特发明这样的形式时，他感兴趣的是，发现什么样的数是由这些形式表示的。七十多年以后，人们发现埃尔米特形式的代数在数学物理中，特别是在现代量子理论中，是不可缺少的。埃尔米特一点不知道，他的纯数学会在他去世很久以后，在科学上成为有价值的——事实上，象阿基米德一样，他似乎从来没有十分关心过数学对科学的应用。但是埃尔米特的工作给物理学提供了有用的工具这一事实，也许是另一个有利于另一方的论据，这一方相信在听凭数学家们不可思议地自行其是时，他们最有力地证明了他们的抽象存在是有道理的。

埃尔米特在代数不变量理论中的杰出发明过于专门，无法在这里讨论，我们很快就要讲述他在其它领域中的两项惊人的成就。西尔维斯特的特有的评论，表明了埃尔米特的同代人对他关于不

变量的工作的高度评价："凯莱、埃尔米特和我组成了一个不变量的三位一体。"在这个惊人的三位一体中，每个人占有什么样的位置，西尔维斯特没有说；但是也许这个疏忽是不重要的，因为这样一个三足鼎立中的每一个成员，都能够把自己转变成自己，或与他共同组成不变体的人中的一个。

埃尔米特在两个领域中发现了一些也许是他全部美妙的工作中最令人吃惊的单独结果，这两个领域是一般五次方程和超越数。他在第一个领域中的发现的性质，清楚地表示在他的短论 Sur la résolution de l' équation du cinquième degré（论［一般］五次方程的解；发表在 1858 年科学院院刊上，当时埃尔米特三十六岁）的引言中。 460

"大家知道，一般五次方程能够由其系数除平方根和立方根之外，不用任何无理数决定的替换［关于未知量 x 的］化简成下面的形式

$$x^5-x-a=0。$$

［这就是说，如果我们能够对于 x 解这过方程，那么我们就能解一般五次方程。］

"这个归功于英国数学家杰拉德的卓越的结果，是自阿贝耳证明了根式解不可能以来，在五次方程的代数理论中迈出的最重要的一步。阿贝耳证明的不可能性，事实上表明了在寻找解答时，有必要引进一些新的分析元素［一些新函数类］，因此，以我们刚刚提及的非常简单的方程的那些根作为辅助，似乎是自然的。然而，为了证明把它严格地用作一般方程解中的一个基本元素是合理的，还得了解形式的这个简单性是否能让我们得出关于其根的性质的一些想法，掌握这些量的存在方式上特殊的和基本的东西，我们对

这些量，除了知道它们不能用根式表示这一事实之外，什么也不知道。

"现在很值得注意的是，杰拉德的方程以其极大的简便运用于这项研究，并且在我们将要解释的意义上，可能有一个真正的分析解。因为我们确实可以从与长期以来由前四次方程的解所表明的、我们特别专注的解不同的观点，考虑方程的代数解的问题。

461 "代替用一个包括多值根式①的公式，表示被认为是系数的函数的、互相密切相联的根系，我们可以得到通过在三次情形那样多的互不相同的辅助变量的单值函数分别表示出来的根。在这种情形下，所讨论的方程是

$$x^3-3x+2a=0,$$

如我们所知道的，只要用一个角度比如说 A 的正弦表示系数 a，就足以把方程的根分开表示为下面的确定好了的函数

$$2\sin\frac{A}{3},\ 2\sin\frac{a+2\pi}{3},\ 2\sin\frac{A+4\pi}{3}。$$

[埃尔米特在这里回想起了在通常中学代数的高级课程中讨论的、熟悉的三次方程的"三角解。""辅助变量"是 A；"单值函数"在这里是正弦函数。]

"现在有关方程是

$$x^5-x-a=0$$

我们必须展示的是一个完全相似的事实。只是必须采用椭圆函数，而不是正弦和余弦函数……。"

然后，埃尔米特立即着手解一般五次方程，为此目的用了椭圆

① 例如，象在简单的二次方程 $x^2-a=0$ 中：根是 $x=+\sqrt{a}$，和 $x=-\sqrt{a}$；当我们简单地说两个根是 $\sqrt{a}$ 时，所涉及的根式在这里是平方根、或二次无理根的"多值性"，以两个符号 ± 的形式出现。提供了三次方程的三个根的公式包含了三值无理根 $\sqrt[3]{1}$，它有三个值，即 1, $1/2(-1+\sqrt{3})$, $1/2(-1-\sqrt{3})$。

函数(严格说来是椭圆模函数，但是这个差别在这里并不重要)。要向非数学家表达这样一个功绩的惊人光彩，几乎是不可能的；打一个很不恰当的比喻，埃尔米特发现了著名的"失去的和弦"，而当时没有人对这样一个无法捉摸的东西会存在于时空中的某处有过丝毫的猜疑。不用说，他的完全出人意料的成功轰动了数学界。更了不起的是，它开创了代数和分析学的一个新的部门，其中的主要问题是发现和研究那样一些函数，按照这些函数能够以有限形式明确地解出一般 n 次方程。目前所得到的最好的结果，是埃尔米特的学生庞加莱(在十九世纪八十年代)得到的结果，他创造出了提供所需要的解的那些函数。这些实际上是椭圆函数的"自然"推广。那些被推广的函数的特征是周期性。进一步的细节会使我们过分偏离主题，但是如果篇幅许可，我们将在讲述庞加莱时再回到这一点上。

埃尔米特的另一个轰动数学界的、孤立的结果，是建立了在数学分析中用字母 e 表示的数的超越性(马上就解释)，这个数即 462

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots,$$

其中 $1!$ 表示 1，$2!=1\times2$，$3!=1\times2\times3$，$4!=1\times2\times3\times4$，等等；这个数是所谓的"自然"对数系的"底"，大致为 2.718281828…。有人说不可能想象一个没有 e 和 π(圆的周长与半径之比)的宇宙。不管是否如此(事实上它是不对的)，e 在现在的数学——纯数学和应用数学——中到处出现却是一个事实。为什么会是这样的，至少就应用数学而论，可以从下述事实中推导出来：e^x 看做一个 x 的函数，是唯一的一个相对于 x 的变化率等于函数本身的函数。——这就是说，e^x 是唯一的一个等于其导数的函数。①

① 严格说来，ae^x，其中 a 不依赖 x，是最一般的，但是在这里"所乘的常数"a 是不重要的。

"超越"的概念是极其简单的，也是极为重要的。一个系数是有理整数(0, ±1, ±2, …)的代数方程的任何根，称为代数数。这样，$\sqrt{-1}$, 2.78 是代数数，因为它们分别是代数方程 $x^2+1=0$, $50x-139=0$ 的根，这些方程的系数(第一个方程的是1.1，第二个方程的是50, −139)是有理整数。不是代数数的"数"就称为超越数。换言之，超越数是不满足任何有有理整系数的代数方程的数。

现在，已知任何根据某个确定的规律构造的数，要问它是代数的还是超越的，是一个有意义的问题。例如，考虑下面简单定义的数

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^{24}}+\frac{1}{10^{120}}+\cdots\cdots,$$

其中指数 2, 6, 24, 120, …, 是逐次"阶乘"，即 $2=1\times2$, $6=1\times2\times3$, $24=1\times2\times3\times4$, $120=1\times2\times3\times4\times5$, …所示级数按照与已知项同样的规律继续到"无限。"下一项是 $\frac{1}{10^{720}}$，前三项的和是 .1+.01+.000001, 或 .110001, 可以证明，这个级数确实确定了某个小于 .12 的确定的数。这个数是任何有理整系数的根吗？答案是否定的，虽然在不知道怎样着手时要去证明它，是对高级数学能力的艰难的考验。另一方面，由无穷级数

463

$$\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^8}+\frac{1}{10^{11}}+\frac{1}{10^{14}}+\cdots\cdots$$

确定的数是代数数；它是 $99900x-1=0$ 的根(正如记得如何求无穷收敛几何级数的和的读者可以证明的那样)。

第一个证明了某些数是超越数的人，是约瑟夫·刘维尔(鼓励埃尔米特给雅可比写信的同一个人)，他在1844年发现了很大一类超越数，其中形式为

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^{24}}+\frac{1}{n^{120}}+\cdots\cdots,$$

n 是大于 1 的实数(上面举的例子相当于 $n=10$)的所有那些数，是在最简单之列的。但是要证明一个特别的可疑的数，如 e 或 π，是超越数或不是超越数，也许是个比发明整整一大类超越数更困难得多的问题：有创造力的数学家支配——在某种程度上——那些实行条件，而可疑的数是局面的完全控制者，并且在这种情形下，正是数学家而非可疑的数，接受他只能模模糊糊地懂得的命令。所以当埃尔米特在 1873 年证明了 e（刚刚不久定义了的）是超越数时，数学界不仅十分高兴，而且对证明的不可思议的精巧大为吃惊。

自埃尔米特那时以来，已经证明了许多数(和许多类的数)是超越数。可以顺便提一下，暂时仍然是在这个黑暗的海的海岸上的高水标是什么。1934 年，年轻的俄国数学家阿列克西斯·盖尔芳德证明了一切类型为 a^b 的数是超越数，其中 a 不是 0 和 1，b 是任意的无理代数数。这解决了戴维·希耳伯特在 1900 年的巴黎国际会议上提请数学家们注意的、二十三个突出的数学问题一览表中的第七个问题。注意，在盖尔芳德的定理的陈述中，“无理的”是必需的(如果 $b=n/m$，n，m 是有理整数，那么 a^b 是 $x^m-a^n=0$ 的根，其中 a 是任何代数数，而且能够表明，这个方程等同于一个所有系数都是有理整数的方程)。 464

埃尔米特在顽固的 e 上取得的出人意料的胜利，使数学家们期望不久就能用同样的方法驯服 π。不过就埃尔米特自己而言，他有了一个好东西就够了。他写信给博查特说，“我不再试着去证明数 π 的超越性了。如果其他人愿意承担这件事，没有人会比我更为他们的成功高兴了，但是相信我，亲爱的朋友，这不会不使他们花一番气力的。”九年以后(1882 年)，慕尼黑大学的费迪南德·林德曼证明了 π 是超越数，他用的方法与埃尔米特用以解决 e 的方

法非常相似。这样就永远解决了"化圆为方"的问题。从林德曼证明的东西中，推断出不可能只用尺规画出面积等于任何给定的圆的正方形——这个自欧几里得时代以前开始，一直折磨着历代数学家的问题。

由于这个问题仍然折磨着一些狂热的人，可能有必要扼要地叙述一下林德曼的证明是怎样解决这个问题的。他证明了π不是一个代数数。但是任何可以只借助尺规解决的几何问题，当用等同的代数形式说明时，都导致一个或几个能够用逐次开平方根解出的有理整系数代数方程。由于π不满足这样的方程，就不能用所提到的工具把圆"变成方的。"如果允许用其他工具，化圆为方是容易的。对于只是有点儿怪的人，这个问题在半个多世纪以前就完全解决了。现在也没有人去把π计算到很大数目的小数位了——在这方面，所能达到的精确度已经比对人类可能有用的更大了，即便人类能活到十亿的十亿次幂的年代也够用。代替试着做不可能的事情，神秘主义者可能愿意仔细考虑下面e，π，-1和$\sqrt{-1}$之间的有用的关系，直到它对于他们变得象佛的肚脐眼对印度的瞎斯瓦米①一样明白为止，这个关系即

$$e^{\pi\sqrt{-1}}=-1。$$

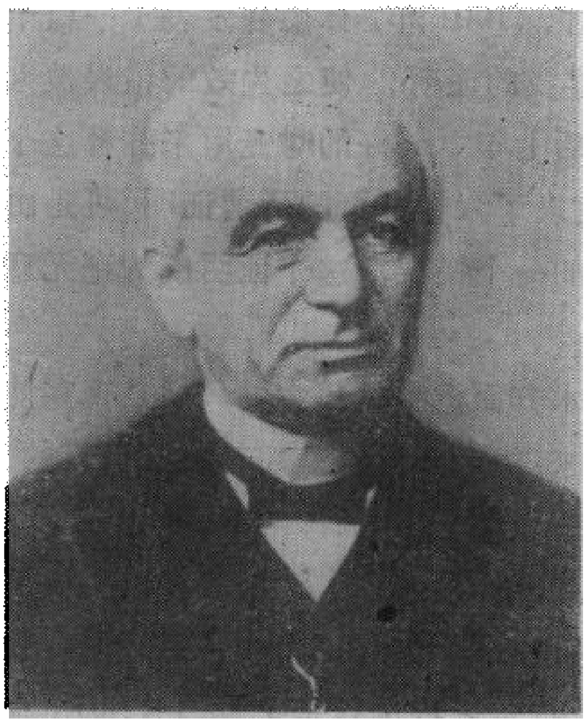
465 任何能直观地领会这个神秘的式子的人，就无需去化圆为方了。

自从林德曼解决了π的问题以来，唯一吸引业余数学家的一个突出的未解决的问题，是费马的"最后定理"。这里真正有天才的数学家无疑是有机会的。为了避免这个问题被所有的人当做对他们的邀请，从而用未证实的证明去淹没各种数学杂志的编辑，我们回想一下，当林德曼夸口要解决这个著名的定理时所碰到的事情。如果这还不能提醒人们，要解决费马的问题需要超出一般的才能，

① 斯瓦米为印度对学者、宗教家的尊称。——译者

那就没有什么东西能提醒他们了。1901年，林德曼发表了一篇十七页的论文，号称包含着长期寻找的证明。使之失效的错误被人指了出来，林德曼勇敢地把随后七年中最好的时光用来弥补这个不可弥补的缺陷；1907年，他发表了六十三页的所谓证明，可是由于几乎在推理刚一开始时犯下的一个错误，这个证明成为毫无意义的了。

虽然埃尔米特在数学的学术方面贡献是伟大的，但从现在使人们烦恼的事物的长远观点看来，他对于科学是超越国家民族的、不受宗派势力支配或愚弄这一理想的坚定执着，或许是他给予文明的更为重要的礼物。我们只能以深深的惋惜，回顾今天在科学界任何地方也找不到的、他那安详的精神美。即使当傲慢的普鲁士人在普法战争中侮辱巴黎时，埃尔米特尽管是个爱国者，仍然保持着冷静的头脑，他清楚地知道，"敌人"的数学就是数学，而不是别的东西。今天，甚至当一个科学家采取这种文明的观点时，他关于他所谓的宽宏大量也不是客观的，不受个人情感影响的，而是咄咄逼人的、就象一个采取守势的人所做的那样。对于埃尔米特，知识和智慧不是任何宗派，任何信念、任何民族的特权，这一点是非常明显的，以至他从不费心去把他天生的明智稳健述诸文字。就埃尔米特本能地知道的东西来说，我们这一代比他落后了两个世纪。他于1901年1月14日去世，始终热爱着这个世界。



克罗内克

第二十五章 怀疑者

克 罗 内 克

最深奥的数学研究的全部结果，最终都一定可以表示成整数性质的简单形式。

——利奥波德·克罗内克

能够恰如其份地称为实业家的专业数学家是极其罕见的。最接近于这个理想的人是克罗内克(1823—1891)，他在三十岁时已经把自己照料得很好了，以至在那以后，他能够比大多数数学家舒适得多地把他非凡的天才贡献给数学。

人们可以在约翰·皮尔庞特·摩尔根，即摩尔根银行和公司的创办人的功绩中，找到——按照美国数学家们熟悉的一个传说

——克罗内克的经历的对应面。如果说这个传说中有什么的话，那就是摩尔根在德国上大学时，表现出非凡的数学才能，因而他的教授们试着劝说他把数学作为他的毕生事业，他们甚至给他提供了一个在德国的大学职位，这个职位会使他迅速起飞。但是摩尔根拒绝了这项建议，而把他的天才奉献给金融，其结果是众所周知的。空谈家(学术研究方面的，而不是华尔街的)可以根据摩尔根坚持数学生涯的假说来以重建世界史作为消遣。

要是克罗内克没有为了数学而放弃金融，那对德国可能会发生什么事情，也提供了很大的推测余地。他的经营能力是很强的；他是一个热忱的爱国者，对欧洲的外交具有不可思议的洞察力，对列强之间相互抱有的未曾表达出来的情感，持一种精明的犬儒主义的态度——他的崇拜者们称它为现实主义。

一开始，克罗内克与许多聪明的年轻犹太人一样，是一个自由主义者，但是当他看出他自己的利益所在时——他在金融上获得成功以后——他成了一个坚定不移的保守主义者，并宣称他自己是那个无情的谣言制造者老俾斯麦的忠实支持者。关于埃姆斯电报的著名插曲，按照一些人的说法，是触发1870年普法战争的电火花，这得到了克罗内克的热情支持，他对于局势的掌握是如此坚定，以至在魏森堡战役之前，甚至德国的军事天才们都怀疑他们对法国的大胆挑战的结果时，克罗内克便自信地预测到了整个战役的胜利，而且在每一步细节上都证明是正确的。在那时，实际上在他整个一生中，他与第一流的法国数学家们关系友好，他头脑清醒，不至于让他的政治观点蒙蔽了他对他科学上的对手们的成就的正确理解。象克罗内克这样实际的人能与数学共命运，也许是很好的。

利奥波德·克罗内克的一生，从出世那一天起就是很舒适的。

467

他是富有的犹太双亲的儿子，1823年12月7日出生于普鲁士的利格尼茨。由于一种莫名其妙的疏忽，克罗内克的官方传记作者(海因里希·韦贝尔和阿道夫·克内泽尔)完全没有提到利奥波德的母亲，虽然他也许有一个母亲，他们把注意力集中在他父亲身上，他拥有一家生意兴旺的商店。这位父亲是一个受过良好教育的人，对哲学有一种抑制不住的渴求，他把这种渴求传给了利奥波德。还有一个儿子叫胡戈，比利奥波德小十七岁，他成了波恩的一个著名生理学家和教授。利奥波德的启蒙教育是在父亲的监督下，从一个私人教师那里接受的。对胡戈的教育培养，后来成了利奥波德热爱的职责。

利奥波德受教育的第二阶段是在准备进大学预科的预备学校，在这个阶段，他受到维尔纳校长的强烈影响，维尔纳是一个有哲学和神学倾向的人，后来克罗内克进入大学预科时维尔纳教过他。除其他东西以外，克罗内克从维尔纳那里吸收了一些开明的基督教神学思想，并终生对它保持着热情。实际上，直到他临终时，看到基督教对他的六个孩子没有明显的危害，他才容许自己在六十八岁时由犹太教改信了福音派基督教。

克罗内克在大学预科的另一位教师也对他有很深的影响，并成了他终生的朋友，这就是恩斯特·爱德华·库默尔(1810--1893)，他后来在柏林大学担任教授，是德国历史上最有独创性的数学家中的一个，我们在谈到戴德金时还要进一步讲到他。这三个人，老克罗内克、维尔纳和库默尔，十分巧妙地在利奥波德卓越的天赋上下功夫，塑造他的思想，制定了他未来的生活道路，以至即便他要离开这条道路也不可能。

我们注意到，克罗内克在他受教育的这个早期阶段，已经显露出了他温和的性格的一个突出的特点，这就是他善于与人友好相

468

处的能力，以及与已经在世界上崭露头角或将要崭露头角，而且会在商业或数学上对他有用的人结成永久友谊的本能。这种寻求正确的友谊的天才，是成功的事业家的一个突出特点，是克罗内克的一个更可贵的财富，他从来没有失去过它。他不是有意识地唯利是图，也不是一个势利的人，他只不过是一个与成功者在一起比与不成功者在一起更安心的幸运儿中的一个。

克罗内克在学校的成绩一律是优秀的，并且是多方面的。除了他已经轻松地掌握并终生保持兴趣的希腊和拉丁古典文学之外，他在希伯来语、哲学和数学方面也很出色。他的数学才能很早就在库默尔的专门指点下显露出来，他从库默尔那里接受特别的指导。但是，尽管年轻的克罗内克最伟大的才能显然是在数学方面，他并没有在多大程度上把精力集中在这个领域，而是竭力想获得与他多方面的能力相称的广泛而丰富的教育。除了他的正式学业以外，他还选修了音乐课，而且成了一名有造诣的钢琴家和歌唱家。他在老年时宣称，音乐是所有艺术中最好的艺术，也许数学除外，他把数学比做诗。他一生都保持着这许多兴趣爱好。在哪一方面他都不仅仅是一个一知半解的人；他对古典文学的热爱，在他与一个致力于希腊古典文学的翻译和传播的团体"希腊文化"的密切关系中，确实取得了成效。他对艺术的热烈欣赏，使他成为绘画和雕塑的敏锐的评论家；他在柏林的美丽的住所，成了音乐家的聚会场所，在这些音乐家中有弗利克斯·门德尔松。

克罗内克在1841年春天进了柏林大学，他继续他的广泛的教育，但是开始专门注重数学。那时柏林大学因数学系有狄利克雷(1805—1859)、雅可比(1804—1851)和斯泰纳(1796—1863)而引以自豪；艾森斯坦(1823—1852)也在那里，他和克罗内克同岁，两人成了朋友。

469

狄利克雷对克罗内克的数学趣味的影响(特别是在分析学对数论的应用上),在他全部成熟的著作中都清楚可见。斯泰纳似乎没有对他产生什么影响;克罗内克对几何不感兴趣。雅可比使他爱上了椭圆函数,他以惊人的独创性和辉煌的成功耕耘了这一领域,主要是不可思议的美在数论上的新颖的应用。

克罗内克的大学生涯在很大程度上是他中学时代的再现:他参加关于古典文学和科学的讲座,由于比过去更深入地研究哲学,特别是黑格尔体系,他沉溺于对哲学的爱好中。强调黑格尔的哲学,是因为一些好奇和有能力的读者,可能会想到在黑格尔深奥的辩证法中,去寻找克罗内克的数学异端的起源——这是一种完全超出本书作者能力的探索。不过,最近关于数学自身一致性的怀疑——克罗内克的"革命"对这种怀疑有部分责任——的一些奇怪的、非正统说法,与难以捉摸的黑格尔体系之间有一种奇怪的相似之处。承担这样一个任务的理想候选人,也许是受过波兰很受重视的逻辑熟练训练的马克思主义共产主义者,不过这只罕见的鸟儿能在什么样的香料树上找到,只有上帝知道。

克罗内克按照德国学生的通常习惯,没有在柏林度过他的全部时间,而是到处流动。他的部分课程是在波恩大学上的,他过去的老师和朋友库默尔在该校教数学。克罗内克在波恩大学期间,学校当局正处在镇压学生团体的无效斗争之中,这些学生团体的主要目的一般是鼓励酗酒、决斗和争吵。克罗内克以他习惯的机敏,秘密地站在学生们一边,因此结交了许多朋友,后来证明这些朋友是有用的。

1845年,柏林大学接受了克罗内克的博士论文,这篇论文受到库默尔在数论方面的工作的启发,论述在一些代数数领域中的

可逆元素。虽然在实际表示出可逆元素时，这个问题是极其困难的，但是人们能从下面对可逆元素的一般问题(对于任意的代数数域，不仅只对于使库默尔和克罗内克感兴趣的那些特殊域)的大致描述中，理解这个问题的性质。这个概述也可以起到这样的作用：使在这一章和以后几章中对库默尔、克罗内克、戴德金在高等算术中的工作的一些提示更容易理解。这个问题相当简单，但是需要几个初步的定义。 470

普通完全整数 1, 2, 3……称为(正)有理整数。如果m是任何有理整数，它就是一个一次代数方程的根，这个方程的系数是有理整数，即$x-m=0$。这一点以及有理整数的其它一些性质，提醒我们把整数的概念扩展到定义为代数方程的根的"数"。这样，如果r是方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根，其中a_i都是有理整数，且首项系数是1(就象在上面的方程中那样，即方程中x的最高次幂x^n的系数是1)的任何方程，那么r就称为n次代数整数。例如，$1+\sqrt{-5}$是一个2次代数整数，因为它是$x^2-2x+6=0$的根，并且不是任何有指定类型系数的、次数小于2的方程的根；事实上，$1+\sqrt{-5}$是$x-(1+\sqrt{-5})=0$的根，这个方程的后一个系数$-(1+\sqrt{-5})$不是有理整数。

如果我们在n次代数整数的上述定义中，删去首项系数是1的要求，认为它可以是任何有理整数(除零以外，零被认为是整数)，那么方程的根就称为n次代数数。这样，$1/2(1+\sqrt{-5})$就是2次的代数数，但不是代数整数；它是$2x^2-2x+3=0$的根。

现在要介绍另一个概念，即n次代数数域的概念：如果r是一个n次代数数，那么一切能从r经过反复加、减、乘、除(用零除是没有规定的，因此不能这样做，也不允许这样做)构造出来的全部

471 表达式，称作由r生成的代数数域，可以用$F[r]$表示。例如，从r我们得到$r+r$，或$2r$；从它和r，我们得到$2r/r$或2，$2r-r$或r，$2r\times r$或$2r^2$，等等。这个$F[r]$的次数是n。

可以证明，$F[r]$的每一个数都具有形式$C_0r^{n-1}+C_1r^{n-2}+\cdots\cdots+C_{n-1}$，其中$C_i'$都是有理数，并且$F[r]$的每一个元素还是次数不大于$n$（事实上次数是$n$的某个分出数）的代数数。$F[r]$中的一些代数数（但不是全体代数数）是代数整数。

代数数理论的中心问题，是研究在n次代数域中代数整数的算术可除性规律。为了使得这个问题明确起见，必须严格确定"算术可除性"意味着什么，为此，我们必须了解有理整数的算术可除性。

我们说有一个有理数m可以用另一个有理数d除，如果我们能找到一个有理整数q，使得$m=q\times d$；d（也包括q）就称作m的一个因子。例如6是12的因子，因为$12=2\times 6$；5不是12的因子，因为不存在一个有理数q使$12=q\times 5$。

一个（正）有理素数是一个大于1的有理整数，它的唯一正因子是1和整数本身。当我们试着要把这个定义推广到代数整数时，我们很快就看到，我们没有找到事物的根源，我们必须寻找能够转移到代数整数上去的有理素数的某个性质。这个性质如下：如果一个有理素数p整除两个有理整数的乘积$a\times b$，那么（可以证明）p至少整除乘积因子a，b中的一个。

考虑有理算术中的可逆元素1，我们注意到1有一个特殊的性质，即它整除每一个有理整数；-1也有同样的性质，1和-1是唯一有这个性质的有理整数。

这些和其它一些线索提示某种有效的简单的东西，我们规定下面的定义，作为代数整数的算术可除性的理论基础。我们假定所考虑的一切整数都存在于一个n次代数数域中。

如果 r, s, t 是代数整数，使得 $r=s\times t$，那么 s, t 都称为 r 的因子。

如果 j 是一个代数整数，它整除这个数域中的每一个代数整数，j 就称为一个可逆元素(在那个域中)。一个已知的域可以包含无限多个可逆元素，不同于有理域的一对 1, -1，这就是一件产生困难的事情。 472

下面要介绍有理整数和次数大于 1 的代数整数之间的一个基本的和令人苦恼的区别。

一个其唯一因子是可逆元素和整数本身的、不同于可逆元素的代数整数，称为不可约数。一个具有下列性质的不可约的代数整数称为素代数整数：如果它整除两个代数整数的乘积，那么它至少整除一个因子。所有素数都是不可约的，但是在一些代数数域中，并不是所有不可约的数都是素数，例如在 $F[\sqrt{-5}]$ 中立刻就要看到的那样。在通常的 1, 2, 3, ……的算术中，不可约数和素数是同样的。

在费马那一章中提到过(有理)算术的基本定理：一个有理整数是仅以一种方式的(有理)素数的乘积。从这个定理中产生了有理整数可除性的全部错综复杂的理论。不幸的是，这个基本定理并不对一切次数大于 1 的代数数域成立，结果是紊乱的。

举一个例子(它是教科书中关于这个问题常用的现成例子)，在域 $F[\sqrt{-5}]$ 中，我们有

$$6=2\times3=(1+\sqrt{-5})\times(1-\sqrt{-5});$$

2, 3, $1+\sqrt{-5}$, $1-\sqrt{-5}$ 在这个域中都是素数(可以用一些技巧证明)，因此在这个域中，6 不是唯一地分解成素数的乘积。

可以在这里说明，克罗内克用一个美妙的方法克服了这个困难，但是这个方法太复杂，不能一般地解释；戴德金用一个完全不

同的、但更容易掌握的方法，同样克服了这个困难，当我们讲到他的生平时将提及这个方法。戴德金的方法在今天是用得最广泛的，但是这并不意味着克罗内克的方法就不那么有力，也不意味着当更多的数学家熟悉它的时候，它不会受到人们的欢迎。

克罗内克在他1845年的论文中，着手解决在某些特别域中的可逆元素理论，这些域是由用代数公式表示高斯问题中产生的方程决定的，高斯问题是n等分一个圆周，或者同样地，构造一个n边的正多边形。

我们现在可以结束由费马开始的记述的一部分了。在证明费马的"最后定理"——如果n是大于2的整数，$x^n+y^n=z^n$对有理整数x, y, z(非0)不可能成立——的努力中，算术学家们采取了貌似自然的一步，把左边的x^n+y^n分解成一次的n个因子(正如在通常的中学代数高级课程中所做的)。这导致了对上面提到的与高斯问题联系在一起的代数数域的详尽研究——在犯了严重的、但很可以理解的错误以后。

473

一开始，这个问题布满了陷坑，很多有能力的数学家和至少一个伟大的数学家——柯西——都一头栽了进去。柯西设想在所论及的代数数域中算术基本定理一定成立，认为这是理所当然的事。在与法兰西科学院作了几次令人激动但时机未到的通信以后，他承认了他的错误。柯西当时正没完没了地对大量其他问题发生兴趣，他转到一边去了，没有能做出他富于创造力的天才完全有能力做出的伟大发现，而把这个领域留给了戴德金。主要困难是严重的：这里是一类"整数"——有关的域中的那些整数——它们不遵循算术基本定理；怎样使它们适应于规律和秩序呢？

这个问题的解答是由于发明了适合这种情形的一类全新的

"数",从而(按照这些"数")自动重建了算数基本定理,它与非欧几何的创造并列为十九世纪的一项突出的科学成就,并且在有史以来的重大科学成就中占有很高的地位。新"数"——所谓"理想数"——的创造是库默尔在1845年的发明。这些新数不是为一切代数数域构造的,而是只为那些从圆的分割中产生出来的域构造的。

库默尔也曾撞进柯西陷进去的那张网,他一度认为他证明了费马的"最后定理"。然而审阅这个所谓证明的狄利克雷用一个例子指出,与库默尔想象的假定相反,算术基本定理在所提到的域中并不成立。库默尔的这次失败是在数学中所曾发生过的最幸运的事情之一。犹如阿贝耳在一般五次方程的问题上一开始犯的错误一样,库默尔的错误使他转向了正确的道路,他发明了他的"理想数。"

库默尔、克罗内克和戴德金在他们的代数数现代理论的发明中,通过无限扩大算术的领域,以及把代数方程纳入数的范围之内,对于高等算术和代数方程理论所做的事情,相当于高斯、罗巴切夫斯基、约翰·鲍耶和黎曼把几何从欧几里得过于狭窄的组织的束缚中解放出来,对于几何所做的事。正如非欧几何的发明者们为几何和物理科学揭示了广阔的、从未想到过的视野一样,代数数理论的创造者们揭示了全新的观点,它照亮了整个算术,使方程理论、代数曲线和曲面的系统理论,以及数本身的真正性质,在一些极其简单的公设的坚实背景的映衬下,极为明显。 474

"理想"的创造——戴德金从库默尔的"理想数"这一绝妙之物中得到的灵感——不仅革新了算术,而且也革新了从代数方程和代数方程组理论中产生的全部代数,它也被证明是对普吕克尔、凯

莱和其他人的"枚举几何学"①的内部意义的可靠线索，这种几何吸引了十九世纪几何学家们的很大一部分能量，他们使自己忙于研究曲线和曲面的网的交叉。最后，如果克罗内克反对维尔斯特拉斯的分析的异端邪说(后面要讲到)，有一天会成为陈腐的正统观念，就象一切不完全癫狂的异端迟早会成为正统观念一样，那么我们熟悉的全部分析学据以奠定其基础的整数 1, 2, 3, ……的这些革新，可能最终会表明分析的扩展，毕达哥拉斯的推测可能就会面对"数"的衍生性，这是毕达哥拉斯在他的整个热狂的哲学中从未梦想到的。

克罗内克在1845年他二十二岁时，以他著名的论文«De Unitatibus Complexis»(论复可逆元素)进入了代数数的这个极其困难的领域。他讨论的那些特殊的可逆元素，是在高斯 n 等分圆周的问题所产生的代数数域中的可逆元素。由于这项工作，他获得了博士学位。

475

德国大学过去有——可能仍然有——一个与取得博士学位有关的值得称赞的习惯：成功的博士生道义上必须为他的主考人举行一次宴会——通常是有啤酒和各种配菜的长时间喧闹的宴会，在这样的庆祝宴会上，有时部分乐趣是一场提出荒谬的问题和更荒谬的答案的假考试。克罗内克实际上邀请了全体教师，包括院长，他后来宣称，对于庆祝他获得学位的这次不庄重的宴会的记忆，是他一生中最幸福的。

至少在一个方面，克罗内克和他在科学上的对头维尔斯特拉

① 在这个学科中的一个问题是：一条代数曲线上可能有圈，或者有曲线与它的切线相交的地方；已知曲线的次数，这样的点有多次呢？或者，如果我们无法回答这个问题，那么必须成立什么样的与这些点和其它一些例外的点相联系的方程呢？对于曲面的问题是类似的。

斯是很相象的:他们都是很高贵的绅士,就连那些对他们两人并不特别关心的人也承认这一点,但是除此之外,几乎在一切事情上他们都是很有趣地不相同的。克罗内克事业的顶点是他对维尔斯特拉斯的长期的数学论战,在这场论战中,双方既没有给予宽恕,也没有要求宽恕。一方是天生的代数学家,另一方一心追求的就是分析。维尔斯特拉斯高大、散漫,克罗内克结实矮小,身高不超过五英尺,但是很匀称壮实。维尔斯特拉斯在学生时代结束以后就放弃了他的击剑;克罗内克一直是一个熟练的体育家和游泳家,后期还是很好的登山运动家。

目睹这怪不相称的一对之间的争吵的人说,在那个大家伙被小家伙的顽固惹烦了的时候,他就站在那里摇晃着身躯,就象一条好脾气的圣伯纳狗①想要摆脱一只缠着他的苍蝇,但这只是激起他的追害者对他更机敏的攻击,直到维尔斯特拉斯绝望地认输,缓缓走开,克罗内克仍然紧跟着他,令人恼火地讲个不休。要不是他们的科学观点不同,这两个人本该是好朋友,两人都是伟大的数学家,一点也没有自命伟大的"大人物"身上那种骄气十足的情结。

克罗内克幸运地有一个从事银行业务的、富有的舅父。这位舅父还掌管着很大的农业。舅父死后,这一切都由年轻的克罗内克经手管理,那是这位初露头角的数学家在二十二岁取得了学位之后不久的事。克罗内克把从1845年到1853年的八年时间用在经营地产和经营商业上,他经营得十分认真,在财务上获得了成功。为了有效地管理地产,他甚至精通了农业。 476

1848年二十五岁时,这个精力旺盛的年轻企业家非常精明地爱上了他的表妹、已故的有钱舅父的女儿范妮·普劳斯尼茨尔,并

① 圣伯纳狗皮毛为黄褐及白色,头大,性聪敏,最初为圣伯纳山隘的僧人所饲养,用以寻救在雪中迷失之旅客。——译者

与她结了婚，安定下来建立家庭。他们有六个子女，其中四个比他们的父母活得长久。克罗内克的婚后生活是理想的、幸福的。他和他的妻子——一个有天赋的、可爱的妇女——以最大的热心培育他们的孩子。克罗内克的妻子在他自己最后一次患病以前几个月去世，她的去世给了他致命的打击。

克罗内克在经商的八年期间，没有做出任何数学工作。但是他在1853年发表的一篇关于方程的代数解的论文，表明他没有在数学上停滞不前。克罗内克作为一个企业家的全部活动中，一直与他以前的老师库默尔保持着活跃的科学通信，他在1853年从业务中摆脱出来以后，访问了巴黎，在那里结交了埃尔米特和其他一些第一流的法国数学家。因此当境况迫使他去经商时，他并没有中断与科学界的通信联系，而是通过以数学作为业余消遣，而不是以惠斯特、皮纳科①，或者跳棋作为他的业余消遣，来使他的头脑保持活跃。

1853年，当克罗内克关于方程的代数可解性(问题的性质在关于阿贝耳和伽罗瓦的两章中讨论过)的论文发表时，只有很少几个人懂得伽罗瓦方程理论。克罗内克的这项工作，表现了他的许多最好的工作的特点。克罗内克已经掌握了伽罗瓦理论，事实上，他也许是当时(十九世纪四十年代后期)唯一深入洞察了伽罗瓦思想的数学家；刘维尔曾经满足于对这个理论有足够的见识，使他能够聪明地编辑一些伽罗瓦的遗稿。

克罗内克的工作的一个显著特点，是它理解的透彻、全面。在这项研究中，也象在代数和数论的其它研究中一样，克罗内克拿着他的前辈们的纯金，象个得到灵感的宝石匠那样，在那上面辛辛苦

① 惠斯特是一种四人玩的牌戏，皮纳科也是一种纸牌戏，是桥牌的前身。——译者

苦地工作，加进他自己的美玉，用这块贵重的原料作出了一个完美无瑕的艺术品，上面带有他个人的艺术特征的明显色彩。他喜爱完美的东西；他的文章中经常有几页展示一个孤立结果的全面发展，以及它的全部内在含意，但是不用明确的细节去塞满这篇论文。因而就连他的最短的文章，也向他的后继者们提示了重要的发展，他的较长的著作是美好东西的取之不尽的宝藏。

477

克罗内克在他的大部分著作中是所谓的"算术学家"。他的目的是使简明的表示公式说明原因始末，并自动地揭示从一步到一步的行动，这样，在达到顶点时，便可能回顾一下整个发展，看出从前提得出的结论是明显地不可避免的。细节和附带的有用东西都被无情地删去了，只有论点的主干极其有力而简单明了地突出出来。简而言之，克罗内克是一个艺术家，他用数学公式作为他的工具。

在克罗内克关于伽罗瓦理论的著作出版以后，这一学科从只为几个人私人所有，变成了全体代数学家的公共财富，克罗内克非常艺术地做了他的工作，以致方程理论的下一个阶段——现在流行的用公设阐述这一理论及其外延——能够上溯到他。他在代数方面的目的，就象维尔斯特拉斯在分析方面的目的一样，是要找出到达他的问题中心的"天然"方法——这是一个直观和爱好的问题，而不是科学定义的问题。

同样的艺术技巧和统一的倾向，出现在他的另一篇最驰名的文章《关于一般五次方程的解》中，这篇文章最初发表于1858年，在他的选集中只占两页的篇幅。我们想起埃尔米特同年利用椭圆(模)函数给了第一个解答。克罗内克通过把伽罗瓦的思想用于这个问题，得出了埃尔米特的解答——或者实际上是同样的东西，从而使这个奇迹显得更"自然"。克罗内克有五年把大部分时间都花

在另外一篇也是很短的文章上，他在1861年的这篇文章中又回到了这一论题，寻找一般五次方程为什么可以用所用的方法求解，这样就迈出了超过阿贝耳的一步，阿贝耳解决了"用根式"的可解性问题。

克罗内克的许多工作有明显的算术色彩，要么是有理算术的，要么是代数数的更广泛的算术的。确实，如果他的数学活动有任何线索可循，那可以说是他把全部数学从代数到分析都算术化的愿望，这种愿望也许是下意识的。"上帝造了整数，"他说，"所有其余的数都是人造的。"克罗内克要求用有限的算术来代替分析，这一要求是他与维尔斯特拉斯分歧的根源。普遍算术化对于现代数学的繁荣也许是一个太狭窄的理想，但是至少它有比在其它一些理想中所能找到的更加明晰这个优点。

478

几何学从来没有认真地吸引过克罗内克。当克罗内克做出他的大部分工作时，专门化已大大发展了，也许任何人都不可能既做出克罗内克作为代数学家所做的，和在他自己的特殊类型的分析中所做的那种深入完美的工作，而同时又在其它的领域中完成任何有重要意义的东西。专门化经常受到攻击，但是它有它的优点。

克罗内克的很多学术发现的一个明显特点，是用他特有的方式，把他最感兴趣的三个部分——数论、方程理论和椭圆函数——编织成一个美丽的模式，在这个模式中，意料不到的对称性随着设计的发展被揭示出来，许多细节出乎意料地酷似其它一些不相干的东西。他用来工作的每一个工具，都似乎是命运为其它工具的更有效的作用而设计的。克罗内克不满足于把这个神秘的统一仅仅作为一种神秘的东西接受下来，他寻找并在高斯的双二次型理论中找到了它的基本结构，高斯理论中的主要问题是研究两个未知量的二次不定方程的整数解。

克罗内克在代数理论中的伟大工作不是这个模式的一部分。他在另一方面也偶然离开他的主要兴趣，按照当时的时尚，从事数学物理中一些问题(在象牛顿的万有引力那样的引力理论中)的纯数学方面的研究。他在这个领域中的贡献与其说是对物理有重大影响，不如说是对数学有重大影响。

克罗内克直到他一生的最后十年，一直是不对任何雇主承担义务的自由人。然而当他利用他作为柏林科学院院士的权利在柏林大学讲课时，他自愿承担了科学职责，而没有接受报酬。从1861年到1883年，他在大学指导本科课程，主要是在必要的引言之后讲他自己的研究结果。1883年，当时在柏林大学的库默尔退休了，克罗内克接替他过去的老师担任普通教授。在他一生的这个阶段，他作了多次旅行，是经常出席在英国、法国和斯堪的纳维亚半岛举行的科学会议的受欢迎的参加者。 479

克罗内克在他担任数学讲师的整个生涯中，与维尔斯特拉斯和其他一些知名人士竞争，这些人的科目比他自己的更受欢迎。代数和数论从来没有象几何和分析学那样受到广泛的听众的注意，也许是因为几何和分析与物理科学的联系更为明显。

克罗内克好脾气地对待他那高贵的孤立，甚至怀着某种满意的心情。他的美妙清晰的引言，哄得他的听众相信这些演讲后面的课程是容易学的。随着课程的进展，这种信念很快就化为泡影，乃至三个课时之后，除了几个忠实顽强的学生以外，其他人都悄悄地溜走了——许多人去听维尔斯特拉斯的课。克罗内克高兴了。他开玩笑说，在教室的前几排椅子后面，可以拉上一道帘子，使讲课的人与听讲的人更加亲密无间。他保持的不多的几个学生忠实地追随着他，他们陪他一起步行回家，一路上继续在教室里的讨

论，经常给柏林拥挤的人行道增加一幅有趣的景象：一个兴奋的小个子用他的整个身躯——特别是他的手——向堵塞了交通的一群着迷的学生讲着什么。他的住处总是向他的学生们敞开的，因为克罗内克真正喜爱人们，他的慷慨好客是他生活中最大的满足之一。他的几个学生成了优秀的数学家，但是他的"学校"是整个世界，他没有作任何努力去人为地得到大批追随者。

最后一点是克罗内克自己最惊人的独立工作的特点。在对分析的完善确信不疑的气氛中，克罗内克扮演了哲学怀疑者的不受欢迎的角色。没有多少大数学家认真地对待哲学；事实上，大多数人似乎厌恶哲学思考，对于任何影响到他们工作的完善的、认识论上的怀疑，他们一向不注意或不耐烦地不予理睬。

克罗内克的情形就不同了。他的工作最具独创性的部分是他的哲学倾向的自然结果，在这方面的工作中他是真正的先驱者。他的父亲、维尔纳、库默尔，以及他自己对于哲学著作的广泛阅读，在以批判的观点对待全部人类知识方面影响了他。当他从这种怀疑的观点审视数学时，他没有因为它恰好是他自己特别感兴趣的领域就放过它，而是给它注入尖刻的、有益的怀疑主义。虽然这种怀疑主义只有很少一点儿印了出来，但它使他的一些同代人极为烦恼，而它留传了下来。这位怀疑者没有对活着的人讲述他的观点，而是如他所说，"对那些在我之后的人"讲。今天这些后继者已经出现了，由于他们的协同努力——虽然他们常常只是在互相反驳上成功——我们正开始更清楚地看透数学的性质和意义。

维尔斯特拉斯(第二十二章)会在他把无理数定义为有理数的无限序列的概念上，建造数学分析。克罗内克不仅和维尔斯特拉斯争论；他还要废弃欧多克斯。对于他，就象对于毕达哥拉斯，只有上帝赋予的整数 1, 2, 3, ……"存在"；所有其余的数都是人类

想要作出比这位创造者更好的东西的无效尝试。另一方面，维尔斯特拉斯相信，他终于使2的平方根象2本身一样可以理解并安全地运用；克罗内克否认2的平方根“存在”，他断言不可能一致地推论维尔斯特拉斯对这个根或任何其他无理数的构造，或和他讲理。不论是克罗内克的年长的同事们，还是他对他们讲话的年轻的同事们，都没有对他的革命性思想表示很热情的欢迎。

维尔斯特拉斯本人似乎感到很不自在；他确实受到了伤害。他的强烈的感情多半是在一句象一首赋格曲似的巨大的德文句子①中发泄出来的，几乎不可能用英文保持这个句子的原样。“但是最糟的是，”他抱怨道，“克罗内克利用他的权威宣告，所有那些直到现在为止努力建立函数理论的人，在上帝面前都是罪人。当一个象克里斯托费尔[他的多少被忽视了的工作，在他去世多年以后，当我们今天在相对论数学中耕耘微分几何时，成了微分几何中的一个重要工具。]那样异想天开的怪人说，在二、三十年之内，目前的函数理论将被埋葬，全部分析学将归属于形式理论，我们只能耸耸肩膀作为回答。但是当克罗内克发表下面这种我将逐字逐句重复的判断时：‘如果给我时间和力量，我自己将向数学界表明，不仅几何，而且算术也能给分析指出道路，并且肯定是一条更精确的道路。如果我不能亲自做到它，那些在我之后的人会做到……，他们会看出所有那些目前对所谓的分析行得通的结论的错误’——一个我对他在数学研究中的杰出才能和卓越成就，象他所有的同事们一样真诚地和高兴地钦佩的人，作出这样一个判断，不仅侮辱了那些他恳求他们承认这一错误，并发誓放弃构成了他们的思想客体和不懈努力的东西之本质的人们，而且它也是对年轻一代的直接呼吁，要他们抛弃他们目前的领袖，作为一个一定要建立的新体

481

① 在1885年给索妮娅·科瓦列夫斯基的信中。

系的门徒，纠集在他周围。这真正是可悲的，看见一个其光荣没有瑕疵的人，竟会让他自己被他自身价值的正当感情驱使着说出这些话，使我心里充满了苦涩的悲伤，而他似乎没有看出这些话对其他人的有害的影响。

"但是这些事说得够多了，我提到它们只是要向你说明，即使我的健康状况还能允许我继续再教几年书，我为什么不能再享受我习惯于在我的数学中享受的乐趣。但是你一定不要讲到它；我不愿意其他人，那些不象你那样了解我的人，从我的话中看到事实上于我无关的情感的表露。"

当维尔斯特拉斯写这些话时，他已七十岁了，身体状况很不好。要是他能活到今天，他可能就会看到他自己的伟大体系仍然象天下闻名的长青的月桂树一样绚烂。克罗内克的怀疑，大大刺激了对全部数学基础的批判性的重新检查，但是它们没有毁掉分析。它们进行得更深入，如果任何有深远意义的东西要被一些更坚固的、但还是未知的东西代替，那么看来很可能克罗内克自己的工作有相当一部分也会被代替，因为他所预见到的批判性的攻击，揭露了在他一点没有怀疑的地方的弱点。时间会愚弄我们大家。我们的唯一安慰是更伟大的人们会在我们之后出现。

克罗内克的同代人称他对分析的破坏性攻击为"革命"，它将驱逐数学中的一切，只留下正整数。几何学自笛卡儿以来主要是把分析应用于实数（相应于在给定的直线上，从线上的一个固定点量起的距离的"数"）的有序的数对、三重数……；因此它也落在克罗内克的方案的支配下，象负正数那样熟悉的概念；例如 -2，也不会在克罗内克预言的数学中出现，通常的分数也不会出现。

482

正如维尔斯特拉斯指出的，克罗内克特别不喜欢无理数。讲到 $x^2-2=0$ 有一个根是没有意义的，除非它们能够有一个用来代

替遭到反对的东西的确定方案做后盾。

克罗内克实际上提出了这个方案，至少是大纲，他指出整个代数和数论，包括代数数，如何能根据他的要求重新构造出来。例如为了去掉 $\sqrt{-1}$，我们只需要暂时用一个字母，例如 i，代替它，并考虑 i 和其他字母例如 x, y, z, …… 的多项式。然后我们就象在初等代数中那样，对这些多项式进行运算，象对待任何其他字母那样对待 i，直到最后一步，当每一个多项式都用 i^2+1 去除时，把余项以外的一切都扔掉。任何记得一点儿初等代数的人，可以很容易地使自己确信，这导致了教科书中神秘地命错了名的"虚"数的全部熟悉的性质。用同样的方式，负数和分数以及一切代数数(正有理整数除外)都从数学中排除掉——如果需要的话——，只留下幸运的正整数。扔掉 $\sqrt{-1}$ 的妙想可以追溯到 1847 年柯西的想法。这是克罗内克的方案的根源。

那些不喜欢克罗内克的"革命"的人称它是盲动，它与有秩序的革命相比，更象醉酒后的喧闹。然而近年来在整个数学中导致了两个建设性的批评运动：要求对于任何其"存在"被指出了的"数"或其它数学的"实体"，提供有限步的构造方法，或证明这是可能的；以及从数学中排斥掉一切不能用有限数目的语词明确说明的定义。对这些要求的坚持，已经为澄清我们对数学性质的概念做了许多工作，但是仍然有大量事情有待人们去做。由于这项工作仍在进展之中，我们暂时不对它作进一步的考虑，直到我们讲到康托尔，那时有可能举一些例子，再来考虑它。

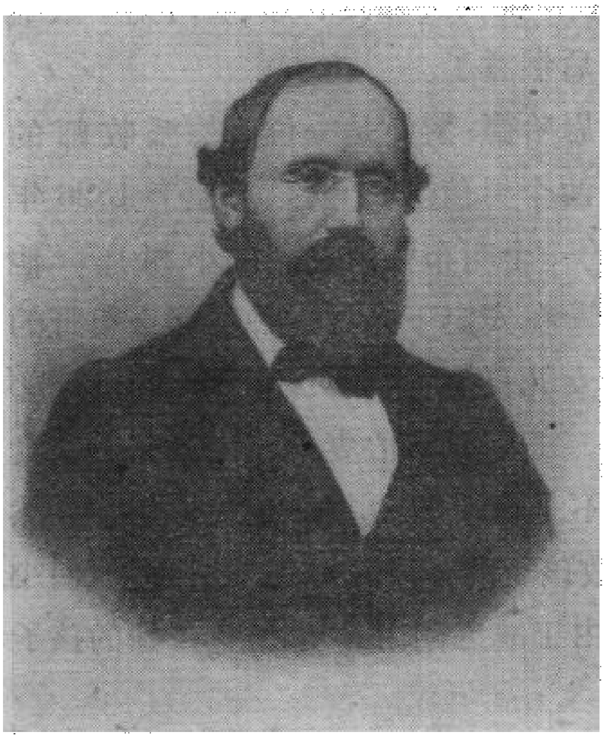
克罗内克与维尔斯特拉斯的争论，不应该留下一个使人不愉快的印象，而如果我们无视克罗内克慷慨的一生，则可能会留下那样的印象。克罗内克并不想伤害他这位善良的老前辈；他只是在纯数学的争论激烈的时候信口开河；维尔斯特拉斯在兴致好的时

483

候，对整个攻击一笑置之，他是会这样做的，他清楚地知道，正象他作出了比欧多克斯作的更好的东西一样，他的后辈们也可能会做出比他作的更好的东西。要是克罗内克再高上六、七英寸，或许他就不会觉得非要大吵大闹地过分强调他反对分析学不可了。整个舌战的大部分内容，听起来就象过分纠正一个没有道理的自卑情结那样可疑。

庞加莱总结了许多数学家对克罗内克的"革命"的反应，他说克罗内克所以能做出这么多优秀的数学工作，是因为他常常忘记了他自己的数学哲学。象许多警句一样，这一句也算不上什么机智的俏皮话。

克罗内克 1891 年 12 月 20 日因患支气管炎去世，终年六十九岁。



黎曼

第二十六章　真诚的心灵

黎　　曼

一个象黎曼这样的几何学者几乎可以预见到现实世界的更重要的特征。

——A. S. 埃丁顿

据说科勒里奇只写了很少一点最优秀的诗，但是这很少的一点应该用金子来装订。对伯恩哈德·黎曼也有同样的说法，他过于短促的壮年时期的全部数学成果只有八开本的一卷。也可以这样确切地说到黎曼：他对接触到的一切东西都作了一定程度的革新。黎曼是现代最具独创能力的数学家之一，他不幸生来体质很弱，在收获了他多产的头脑中十分之一的金色收成之前就去世了。要是

他晚生一个世纪，医学也许能够使他的寿命延长二、三十年，数学也就不至于至今还在等待他的后继者了。

格奥尔格·弗里德里希·伯恩哈德·黎曼是一位路德派牧师的儿子，是六个孩子中的第二个(两个男孩，四个女孩)，他于1826年9月17日出生在德国汉诺威的一个叫布雷斯伦茨的小村庄。他的父亲在拿破仑战争中打过仗，在安定下来过一种不那么粗野的生活时，与一位法庭评议员的女儿夏洛特·埃贝尔结了婚。1826年的汉诺威并不完全是繁荣的，一个要操心妻子和六个孩子衣食的低微的乡村牧师的境况，远不是富裕的。据一些传记作家显然是公正的断定，黎曼一家大多数孩子的体质脆弱和早逝，是他们小时候营养不良的结果，而不是由于缺乏耐力。母亲也在她的孩子们长大成人以前就去世了。

尽管贫穷，家庭生活是幸福的，黎曼总是对他全体可爱的家人保持着最热烈的爱，当他离开家的时候就总是怀着最热烈的思念。他从幼年起就是一个胆小、缺乏自信的人，害怕在公开场合讲话和引起人们对他的注意。在后来的生活中，这种顽固的胆怯是一个非常严重的缺陷，给他造成了非常苦恼的不幸，一直到他通过刻苦准备他可能要作的每一次公开讲话，克服了这种胆怯为止。黎曼童年和成年初期的动人的腼腆，使得凡是见到他的人都很喜欢他，这与他成熟的科学思想的无情大胆，适成鲜明的对照。他在自己的创造的世界里是至高无上的，他知道他的超群的力量，不害怕任何人，不管是实在的人还是想象中的人。

当黎曼还是婴儿时，他的父亲被派到克维克博恩担任牧师。年幼的黎曼在克维克博恩从他父亲那里接受了启蒙教育，他的父亲看来是一个极好的教师。从第一课起，伯恩哈德就显示出对知识的抑止不住的渴望。他最早感兴趣的是历史，特别是波兰富于浪

漫色彩的悲剧的历史。在五岁的时候，伯恩哈德总是缠住他的父亲讲不幸的波兰，而且要求反复讲述那个英雄的国家为自由进行英勇(在那时有一点儿愚昧)斗争的传说，并用已故的伍德罗·威尔逊有趣的、耐人寻味的话"民族自决"。

他在大约六岁时开始学算术，算术给这个敏感的孩子提供了一些不太困难的东西去细想。他天生的数学才能现在表现了出来。伯恩哈德不仅解决了所有推给他的问题，而且发明了更困难的题目去惹恼他的兄弟姊妹。在数学上的创造冲动已经支配了这孩子的头脑。在十岁时，他从一个叫舒尔茨的专职教师那里学习高等算术和几何，舒尔茨是一个很好的教师，他很快就发现他自己得跟着他的学生走，这孩子常常有比他更好的解题方法。

十四岁时，黎曼去汉诺威和他的祖母住在一起，在那里他进了他的第一所中等学校，上三年级。这时他经历了第一次不可抗拒的孤独。他的羞怯使他成了同学们的笑料，他只能自己娱乐。他的功课在短暂的退步以后，一直非常出色，但是这并没有给他什么安慰，他唯一的慰藉是尽量用零花钱买一些小礼物，在父母和兄弟姐妹过生日的时候送给他们。他送给父母的一件礼物是他发明并自己动手做的一个别出心裁的万年历，这使他的不轻易相信人的同学们大为吃惊。两年后，祖母去世，黎曼转学到吕讷堡的中学，在那里，他一直学习到他十九岁，作好了进格丁根大学的准备。在吕讷堡，黎曼可以步行回家，他充分利用一切机会逃回到家庭的温暖中。他接受中等教育的这几年是他一生中最幸福的阶段，当时他的健康状况还算好。

486

在学校和克维克博恩之间的往返步行，加重了他的体力负担，但是尽管他母亲为他可能会过于劳累而担忧，他为了能尽可能地经常和家人团聚，仍然继续这样奔波。

还在中学时，黎曼就因为渴望尽善尽美而受到损害，这后来推迟了他的科学论著的发表。这个缺点——如果它是缺点的话——给他的写作练习造成很大困难，一开始使人怀疑他是否能"通过"考试。但就是这同样的特点，后来使他写出了他的两篇精美绝伦的杰作，其中的一篇就连高斯也公开承认是完美的。当希伯来语教师赛费尔让年轻的黎曼到他家里寄宿，解除了他的困难时，情况就大为改观了。

他们两人在一起学习希伯来语，黎曼经常举一反三，因为这个未来的数学家那时已经准备好了要满足他父亲的愿望，作一个伟大的传教士——好象黎曼以他那种难于开口的羞怯，还能在布道坛上敲着讲台，大讲地狱和罚入地狱或者赎罪和进天堂似的。黎曼本人倾心于虔诚的境界，虽然他连见习布道也从未做过，但他确实运用过他的数学才能，以斯宾诺莎的方式，试图证明«创世纪»的真实性。年轻的黎曼没有因为失败而气馁，他坚持他的信仰，终生都是一个真诚的基督教徒。正如他的传记作者(戴德金)所说，"他虔诚地避免打扰其他人的信仰；对他来说，宗教上主要的事情是每天的自我反省。"到黎曼在中学的课程结束时，甚至他也清楚地认识到，击溃魔鬼的大本营对他毫无用处，但是可能在征服自然上对他大有好处，因此就象在布尔和库默尔的情形那样，又一次烙印没有打上去。

中等学校校长施马尔富斯注意到黎曼的数学才能，让这孩子随意使用他的图书馆，并允许他不上数学课。这样，黎曼发现了他对数学的天生的才能，但是他没有立即了解到他的能力的大小，这足以说明他那到了荒唐程度的近乎病态的谦虚的特点。

施马尔富斯建议黎曼借一本数学书回去自学。黎曼说要是那本书不是太容易的话，那是很好的，在施马尔富斯的推荐下，黎曼

借走了勒让德的《数论》。这只是一本八百五十九页的、大四开本的没有什么价值的书，事实上，大部分内容都是令人扫兴的很相近的推理。六天以后，黎曼送回了这本书。施马尔富斯问他："你读了多少？"黎曼没有直接回答，而是表示他欣赏勒让德的名著。"那当然是一本了不起的书，我已经掌握了它。"事实上他确实掌握了它。过了一些时候，在考他时他回答得很全面，尽管他已经好几个月不看这本书了。

这无疑是黎曼对素数之迷感兴趣的开始。勒让德有一个用来估计小于任意给定数的素数的近似数目的经验公式；黎曼的一篇最深刻、最有启发性的论文(只有八页)，就是关于这同一个一般领域的。事实上产生于他试图改进勒让德的结果的"黎曼猜想"，它如果不是今天对纯数学最著名的挑战的话，也是著名的挑战之一。

我们可以稍微提前一点，在这里说明这个猜想是什么。它出现在著名的论文《Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse》(《关于已知量下素数的数目》)中，该文发表在1859年11月柏林科学院的月报上，其时黎曼三十三岁。所论的问题是要提供一个公式，表明有多少个小于已知数 n 的素数。在解决这个问题的尝试中，黎曼不得不研究无穷级数

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots\cdots,$$

其中 S 是复数，比如说 $S=u+iv(i=\sqrt{-1})$，u 和 v 是实数，并且选择得使级数收敛。有了这个限制条件，这个无穷级数就是一个 S 的确定函数了，比如记为 $\zeta(S)$ (总是用希腊字母 ζ 表示这个函数，叫做"黎曼 zeta 函数")；随着 S 改变，$\zeta(S)$ 连续取不同值。对于 S 的哪些值 $\zeta(S)$ 是零呢？黎曼猜测，S 的一切 u 在 0 和 1 之间的这样的值具有形式 $1/2+iv$，即一切这样的值，实部都等于 $1/2$。

488

这就是著名的猜想。无论谁证明了它成立或证明它不成立，都将给自己带来荣誉，并将附带解决素数理论、高等算术的其它部分，以及一些分析学领域中的许多极为困难的问题。专家的意见认为这个猜想成立。1914年，英国数学家G. H. 哈迪证明了S的无穷多个值满足这个猜想，但无穷未必是全体。用这样或那样的方法解决黎曼猜想，对于数学家具有比证明或否定费马定理更大的兴趣。黎曼猜想不是那种能用初等方法解决的问题。它已经引出了非常丰富的、引起争论的文献。

黎曼在中学靠自学领会的——总是以惊人的速度——不仅仅是勒让德这个伟大数学家的著作；他通过学习欧拉的著作，熟悉了微积分学及其分支。相当令人惊奇的是，黎曼从分析学的这样一个古老的起点(由于高斯、阿贝耳和柯西的工作，欧拉的方法到十九世纪四十年代中叶已经过时)开始，后来竟能成为一名敏锐的分析学家。但是他从欧拉那里可能学到了一些在创造性的数学工作中也有一席之地的东西，即对于对称的公式和处理技巧的重视。虽然黎曼主要是从可以称为深刻的哲学思想——那些深入一个理论的中心思想——上汲取他的更伟大的灵感，然而他的工作并不完全缺少“纯技巧”，欧拉是这方面无与伦比的大师，而现在相当流行的是瞧不起纯技巧。对漂亮的公式和整齐的定理的追求，无疑会很快地蜕变为愚蠢的缺点，但是对简朴的一般原则的要求也会如此，这些一般原则确实会是非常一般的，以至于无法把它们应用到任何特殊点上去。黎曼天生的数学机敏，使他避开了对这两个极端的有害的趣味。

1846年黎曼十九岁时，作为学习哲学和神学的学生被录取入格丁根大学。他想让他的父亲高兴，尽快地得到一个有报酬的工作，以便能够在经济上帮助家庭，这种愿望使他选择了神学。但是

他丢不开斯特恩关于方程论和定积分，高斯关于最小二乘法，以及戈尔德斯米特关于地磁学的数学讲座。黎曼向宠爱他的父亲承认了这一切，请求允许他改换课程。父亲由衷地同意了伯恩哈德从事数学职业，他的同意使这个年轻人极为高兴——也深深地感激。

在格丁根大学读了一年以后，因为那里的教育方法明显是陈旧的，黎曼转到柏林大学，就学于雅可比、狄利克雷、斯泰纳和艾森斯坦，开始进入新的、充满活力的数学。他从这些大师手里学到了很多东西——从雅可比学到了高等力学和高等代数，从狄利克雷学到了数论和分析，从斯泰纳学到了现代几何，而从比他年长三岁的艾森斯坦那里，他不仅学到了椭圆函数，也学到了自信，因为他和这位年轻的大师对理论应该如何发展，有着根本的、最激励人的不同观点。艾森斯坦坚持美妙的公式，多少有点现代化的欧拉的风格；黎曼想要引进复变量，以最少的计算，从一些简单的一般原理得出整个理论。无疑地，这至少产生了黎曼对纯数学的一项最伟大贡献的萌芽。由于黎曼开创的关于单复变量函数理论的工作，在他自己的历史以及现代科学史上都相当重要，我们将概略地谈谈关于它所知道的东西。

简单说来，没有什么是明确的。单复变量解析函数的定义，在关于高斯对柯西基本定理的预测时讨论过，这个定义基本是黎曼的。当用分析而不是用几何把这个定义表示出来时，它导致一对偏微分方程①，黎曼以它们作为他对单复变量函数理论的出发点。按照戴德金的说法，“黎曼在这些偏微分方程中看出了单复变量　490

① 如果 $z=x+iy$，和 $w=u+iv$ 是 z 的解析函数，那么黎曼方程是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}。$$

这些方程早就由柯西提出来了，但是甚至柯西也不是第一个，因为达朗贝尔在十八世纪就陈述过这些方程。

[解析]函数的基本定义。也许这些对他未来的事业具有最大重要性的想法，是他在1847年[黎曼当时二十一岁]秋假期间第一次得出来的。”

黎曼灵感之起源的另一种说法，是西尔维斯特讲的下面的故事，这个故事即便可能是不真实的，也是很有趣的。在1896年，西尔维斯特去世的前一年，他回想起他住在“纽伦堡一家河边旅馆里，我在旅馆外面和一个柏林的书商聊天，他跟我一样，要去布拉格……。他告诉我，他从前在大学时是黎曼的同学，有一天黎曼收到从巴黎寄出的几期《院刊》之后，他一连几个星期闭门不出，当他回到他的朋友们当中时，他说(指柯西新发表的文章)：‘这是一种新数学’。”

黎曼在柏林大学度过了两年时间。在1848年的政治动荡中，他和保皇派的学生军一起，参加令人生厌的十六小时轮班警卫，保护在王宫里的神经过敏、貌似神圣的国王。1849年他回到格丁根大学，为取得博士学位，去完成他的数学训练。作为一个人们通常把他列为纯数学家的人来说，他的兴趣是非常广泛的，事实上，他用于物理科学的时间与他用于数学的时间同样多。

从这段时间看来，黎曼的真正兴趣似乎是在数学物理，要是他能多活二、三十年，他很可能会成为十九世纪的牛顿或爱因斯坦。他的物理学思想在他那个时代是极其大胆的。直到爱因斯坦实现了黎曼按几何方法研究的(宏观的)物理的梦想时，黎曼所预见到的——可能多少有些模糊——物理，在物理学家们看来才是合理的。在这方面，直到我们这个世纪为止，黎曼的唯一理解了的追随者是英国数学家威廉·金登·克利福德(1845—1879)，他也去世很早。

黎曼在格丁根大学的最后三个学期，以极大的兴趣听了哲学

讲座和威廉·韦伯的试验物理课程。黎曼去世后留下的哲学和心理学的未完稿，表明他作为一个哲学思想家，同他在数学和科学中一样富于独创性。韦伯看出了黎曼的科学天才，成了他的知交和能帮助他的顾问。黎曼对物理学中重要的东西——或可能成为重要的东西——有一种比大多数著述物理科学著作的数学家高得多的直感，这种直感无疑来自他在实验室中的工作，和他同主要是物理学家而不是数学家的人们的接触。就科学家们观察的宇宙而论，甚至伟大的纯数学家对物理科学的贡献，通常也突出地表现出奇怪的不切题。黎曼作为一个物理数学家，在对于数学中很可能具有科学上的应用价值的东西的直觉上，与牛顿、高斯和爱因斯坦是同等的。

491

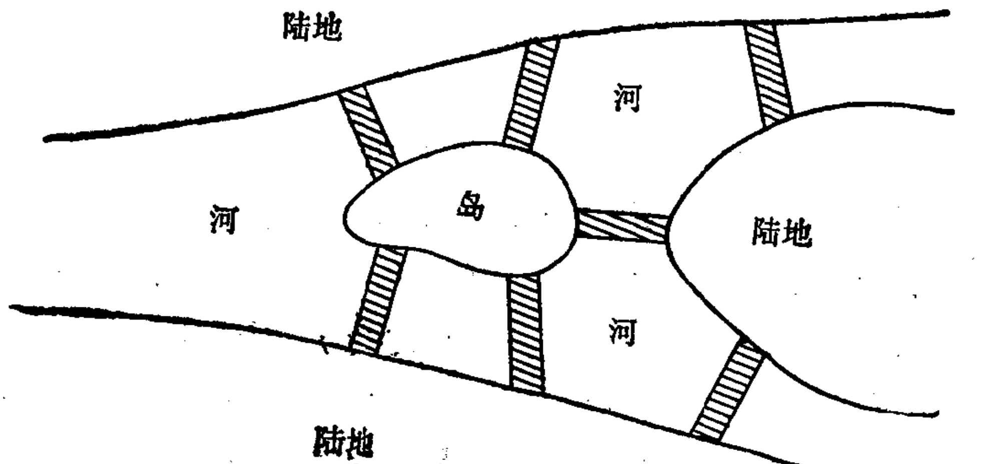
黎曼由于从约翰·弗里德里希·赫尔巴特(1776—1841)学习哲学的结果，在1850年(他二十四岁时)得出结论，"有可能建立一个完整的、圆满无缺的数学理论，这个理论从一些单独点的基本规律，推论到在现实的充满物质的空间(不断地充满的空间)中所见到的过程，不分引力、电、磁或静热力学。"这也许可以解释为黎曼抛弃了物理科学中一切有利于场论的"远距离作用"理论。在场论中，比如说，围绕着一个"带电粒子"的"空间"的各种物理性质，是数学研究的对象。黎曼在他一生的这个阶段，似乎相信充满空间的"以太"，这是一个现在抛弃了的概念。但是正象他关于几何基础的划时代工作中出现的，他后来探索物理现象在人类经验这个"空间"的几何中的说明和关联。这是现在流行的方式，它否认存在一种观察不到的以太，认为那是一种讨厌的、不必要的东西。

黎曼对他在物理学中的工作着了迷，把他的纯数学暂时放在一边，1850年他参加了由韦伯、乌尔里希、斯特恩和利斯廷刚刚开设的数学物理研究班。在这个研究班中，物理实验耗费了学习上

的谨慎本会留给数学博士论文的时间，黎曼直到二十五岁才交出数学博士论文。

我们可以顺便提到研究班的领导者之一，约翰·本尼迪克特·利斯廷(1808—1882)，因为他可能影响了黎曼在1857年的一项最伟大的成就中的想法，这项成就是把拓扑方法引进单复变量函数理论。

492 可以回想，高斯曾经预言过，拓扑学会成为数学的一个最重要的领域，黎曼通过他在函数论中的发明，部分实现了这个预言。虽然拓扑学(topology，现在称为analysis situs[仍译作拓扑学——译者])在刚刚发展起来时，与今天吸引了一个人数众多的学派的复杂理论几乎没有相似之处，但是说明一个显然开创了这整个广阔而复杂的理论的普通难题，可能是有意思的。在欧拉的时代，柯尼斯堡的普雷格尔河上有七座桥，就象图中所画的，带有阴影的条子表示桥。



欧拉提出经过所有七座桥，但不能两次通过任意一座桥的问题。这个问题是不可能解的。

我们可以在这里解决黎曼在函数论中运用拓扑方法的性质，虽然用非专门的语言来充分描述它是完全不可能的。关于单复变量函数的“单值性”的意义，我们涉及在高斯那一章中所讲的东西。现在，在阿贝耳函数理论中不可避免地出现了多值函数；z 的 n 值函数是这样一个函数，除去对 z 的某些值以外，它对 z 的每一个指定的值都恰好取 n 个不同的值。为了说明实变量函数的多值性，我们注意到由方程 $y^2=x$ 定义的、作为 x 的函数的 y，是二值的。这样，如果 $x=4$，我们得到 $y^2=4$，因此 $y=2$ 或 -2；如果 x 是除零或“无限”以外的任何实数，y 有两个不同的值 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{-x}$。在这个也许是最简单的例子中，y 和 x 由一个代数方程即 $y^2-x=0$ 联系在一起。这是一个非常特殊的例子，我们可以立即进到它的一般情形，讨论由方程

$$P_0(x)y^n+P_1(x)y^{n-1}+\cdots\cdots+P_{n-1}(x)y+P_n(x)=0$$

定义的、作为 x 的函数的 n 值函数 y，这里 P_i 都是 x 的多项式。这个方程把 y 定义为 x 的 n 值函数。如在 $y^2-x=0$ 的情形，有某些 x 的值，对于它们，y 的这 n 个值中有两个或两个以上是相等的。x 的这些值就是由方程定义的 n 值函数的所谓分枝点。

所有这些，现在都扩展到了复变量函数和由

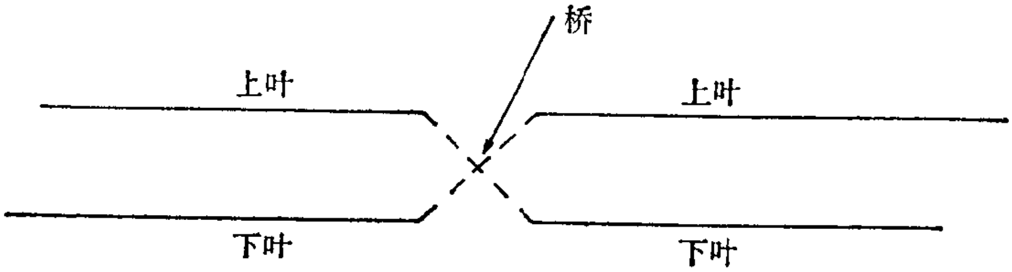
$$P_0(z)w^n+P_1(z)w^{n-1}+\cdots+P_{n-1}(z)w+P_n(z)=0$$

定义的函数 w（以及它的积分），其中 z 表示复变量 $s+it$，s，t 是实变量，$i=\sqrt{-1}$。w 的 n 个值称为函数 w 的 n 个分枝。这里我们必须提到（高斯那一章中）谈到过的关于 z 的单值函数的表示。设变量 $z(=s+it)$ 在它的平面上描出任何轨迹，并把单值函数 $f(z)$ 表示成 $U+iV$ 的形式，其中 U，V 是 s，t 的函数。那么，对每一个 z 的值都有一个且仅有一个与 U，V 的值相应的值，当 z 在 s，t 平面上描绘出它的轨迹时，$f(z)$ 在 U，V 平面上描出相应的轨迹：

$f(z)$的轨迹是由 z 的轨迹唯一决定的。但是如果 w 是 z 的多值函数，使得 z 的值恰好决定出 w 的 n 个不同的值(除去在分枝点上，那里 w 的 n 个值可能是相等的)，那么显然，一个 w 平面就不足以(如果 n 大于 1)表示轨迹，或函数 w 的"推进"了。在二值函数 w 的情形，如由 $w^2=z$ 决定的函数那样，就需要两个 w 平面，一般说来，对于一个 n 值函数(n 有限或无限)，恰好要求 n 个这样的 w 平面。

考虑单值(一个值)函数而不是 n 值函数(n 大于 1)的优点，甚至对非数学家也应该是明显的。黎曼所做的事是这样的：代替 n 个不同的 w 平面，他采用了一个后面大致描述的那种 n 叶平面，多值函数在这个曲面上是单值的，也就是说，在这个曲面上，对曲面的每一个"位置"对应着一个且仅有一个所表示的函数的值。

黎曼好象是把所有 n 个平面结合成了一个单独平面，他通过乍一看上去象是 n 值函数在 n 个不同平面上的 n 个分枝的表示的转换做到了这一点；但是稍微考虑一下就能看出，实际上，他恢复了单值性。因为他把 n 个 z 平面彼此叠合了起来；这些平面或叶的每一个都与函数的一个特殊的分枝联系在一起，使得只要 z 在一个特别的叶上移动，w(所讨论的 z 的 n 值函数)就跑过相应的函数分枝，当 z 从一叶变到另一叶，分枝就改变了，从一个分枝变到另一个分枝，一直到当变量 z 跑过了所有的叶，回到了它的初始位置时，最初的分枝恢复了为止。变量 z 从一个叶到另一个叶的通路，受连接分枝点的那些截线(可以想象它的直线桥)影响；沿着一条已知截线提供的从一叶到另一叶的道路，想象上面一叶的一个"边缘"被贴在或连结到下面一叶的相对的边上，对上面一叶的另一个边缘也是同样的。用图解表示，在截面上，



这些叶不是沿着截线(对于给点的分枝点,可以用很多种方式画出它来)随便联结在一起的,而是这样联结的,使得当 z 跑过它的 n 叶曲面,碰到桥或截线就从一叶转换到另一叶时,z 的函数的分析性态可以被连贯地描画出来,特别是关于分枝的交替在变量 z 上的结果,如果表示在一个平面上,完全围绕一个分枝点时是如此。对于一个分枝点在一个 z 平面上的这种巡回,相当于在 n 叶黎曼曲面上从一叶到另一叶的道路以及函数分枝的合成的交替。

有很多种方式,变量可以在 n 叶黎曼曲面上移动,从一叶变换到另一叶。每一个这样的方式都相当于函数分枝的一个特别的交替,这可以通过一个接着一个地写出表示所交替的 n 个分枝的字母来用符号代表。用这种方式,我们得到了某些 n 个字母的置换的符号(如在十五章那样);所有这些置换生成一个群,这个群在某些方面描画了所考虑的函数的性质。 495

黎曼曲面是不容易用图形表示出来的,那些用它们的人满足于叶的连结的图形表示,这与一位有机化学家写出一个复杂的碳化合物的“图解”公式的方式大致相同,这种方式以图解的方式记录了一些化合物的化学性态,但它不能,也不意味着要描述化合物中原子的实际空间排列。黎曼利用他的曲面及其拓扑取得了惊人的进展,特别是在阿贝耳函数方面。这方面的一个问题是,怎样做出截线以使得 n 叶曲面等同于一个平面。但是数学家们想象复杂的空间关系的能力,和其他人是一样的,即高度的空间“直觉”是极

其罕见的。

1851年11月初，黎曼把他的博士论文《单复变量函数的一般理论的基础》呈交给高斯审查。这个二十五岁的年轻大师做出的这项工作，是几项激起高斯热情的、对数学的现代贡献中的一项，那时距高斯去世还有四年时间，高斯几乎是一个传说中的人物。黎曼在高斯看完他的论文后前去登门拜访，高斯告诉他，他本人已经计划多年，要想写一篇同样题目的专题论文。高斯给格丁根大学哲学系的正式报告是值得注意的，因为在这篇报告中，高斯情不自禁地提出了一个罕见的正式看法：

"黎曼先生交来的论文提供了令人信服的证据，说明作者对该文所论述的这一问题的那些部分，作了全面深入的研究，说明作者具有创造性的、活跃的、真正的数学头脑，具有灿烂丰富的创造力。表达方式是清晰简明的，一些地方是优美的。大多数读者会希望安排更明确。整篇论文是有内容有价值的著作，它不仅满足了博士论文所要求达到的标准，而且远远超过了这些标准。"

496

一个月以后，黎曼通过了他的最后考试，包括对他的论文的公开"答辩"。一切都进行得很成功，黎曼开始希望得到一个与他的才能相称的职位。"我相信我已经用我的论文改善了我的前途，"他写信给他的父亲说，"我也希望总有一天会学会写得更快更流畅，特别是如果我进入社交界，如果我得到一个讲课的机会的话；因此我有充分的勇气。"他也向他的父亲道歉，因为他没有更加努力地去争取格丁根天文台空缺的一个助理位置，但是由于他希望"取得资格"作无薪俸的大学教师①，前景并不象想象的那样暗淡。

黎曼计划提交一篇关于三角级数(傅里叶级数)的论文作为他

① Privatdozent，无薪俸的大学教师，其报酬直接来自学生的学费。——译者

的就职论文。但是还要等两年半的时间，他才能够挂出无薪俸的大学教师的牌子，从不一定非听他的演讲不可的学生们那里，以收费的形式得到他所能得到的报酬。1852年秋季，黎曼趁狄利克雷来格丁根度假的机会，请求对他未完成的论文提出忠告。黎曼的朋友们努力使这个年轻人在社交场合与这位来自柏林的著名数学家——仅次于高斯——见面。

狄利克雷被黎曼的谦虚和天才迷住了。"第二天早晨[一次宴会之后]狄利克雷和我一起度过了两个小时，"黎曼写信给他的父亲说。"他给我提出了我需要的关于就职论文的意见；否则的话我就不得不在图书馆里做许多小时吃力的研究。他还和我一起通读了我的论文，他非常友好——考虑到我们之间地位的悬殊，这是我几乎不能期望的。我希望他以后还会记得我。"狄利克雷在这次访问期间，有几次与韦伯和其他人一起出去郊游，黎曼向他的父亲报告说，这些合乎人情的避开数学的活动，在科学上给与他的好处，比他整天坐着读书还要多。

从1853年（黎曼当时二十七岁）起，他集中精力思考数学物理。由于他对物理科学日益增长的热情，他拖延了很久，直到这一年的年底，才完成了他的就职论文。

在他能够被任命为他盼望的——但是没有报酬的——讲师位置之前，他还得作一次就职演讲，为了这次严峻的考验，他提交了三个题目由教师们从中选择，他希望并盼望着他们会选中前两个题目中的一个，这是他已经准备好了的。但是他轻率地提出的第三个题目，正是高斯已经仔细考虑了六十年或时间更长的问题——几何基础——而这个题目他没有准备。高斯无疑是出于好奇，想看看黎曼的"灿烂丰富的创造力"会对这个深奥的问题做出些什么。使黎曼大吃一惊的是，高斯指定第三个题目，作为黎曼在

497

挑剔的教师们面前证明他作为讲师的勇气的论题。"所以我又处在绝境中了,"这个冒失的年轻人向他的父亲承认,"因为我不得不做出这个题目。我恢复了我对电、磁、光和引力之间的联系的研究,我已经进行到可以没有丝毫怀疑地发表它。我越来越相信,高斯已经在这个问题上工作了许多年,并对一些朋友们(韦伯就是其中的一个)谈到过它了。我秘密地向你透露这件事,唯恐你会认为我骄傲自大——我希望时间对我还不太晚,我将作为一个独立的研究者得到承认。"

黎曼在数学物理研究班给韦伯当助手时,还同时进行两项极为困难的研究,这种过度紧张,和一向贫穷这个不利条件加在一起,造成了他一时体力衰竭。"我对于把一切物理规律结合在一起研究变得如此入迷,以至当我得到就职演讲的题目的,我也不能从我的研究中抽身出来。然后我病倒了,部分是由于思考它的结果,部分是由于在这样讨厌的天气,在室内呆得太久;我的老毛病又犯了,而且更加顽固,我无法进行我的工作。只是在几个星期以后,当天气转好了,我得到了更多的社交激励时,我才开始好起来。我租了一幢在花园中的房子度夏,从这以后,我的健康状况没有再使我烦恼。我在复活节后的两星期内完成了我不能摆脱的一件工作以后,立刻就开始着手准备我的就职演讲,并在圣灵降临节前后[那就是说,在大约七周内]完成了它。我在接着给我的演讲确定一个时间时碰到了困难,差一点儿没有达到我的目的就回到克维克博恩。因为高斯病得很厉害,医生们担心他会马上死掉。他太衰弱,无法考核我,他要我一直等到八月,希望那时他可能康复,特498 别是由于我在秋季之前无论如何是不能开课的。然后,他不管怎样,在圣灵降临节后的星期五决定,把演讲安排在第二天的十一点三十分。星期六,我幸运地通过了一切。"

这就是黎曼自己对这次历史性的演讲的记述，这个演讲要革新微分几何，为我们自己这一代的几何化物理铺平道路。在同一封信中，他讲了他在复活节前后所做的工作是怎样做出来的。韦伯和他的一些同事非常精确地测量了一个到那时为止从未被研究过的现象，即莱顿瓶中的残余电荷[放电之后，人们发现莱顿瓶并没有完全不带电]……。我把我对这个现象建立的理论给了他[韦伯的一位同事科尔劳施]，这是特地为他做出来的。我通过对电、光、磁……之间的联系的总的研究，发现了对这个现象的解释。这件事对我很重要，因为这是我第一次能够把我的工作应用到还是未知的现象上，我希望[它的]发表能有助于我的更大的工作被顺利地接受。"

黎曼的就职演讲（1854 年 6 月 10 日）得到的热情的接受，和他谦虚而惊慌的内心深处所希望的一样。他曾经万分忧虑地准备这次演讲，因为他决定要让它甚至对那些只有很少数学知识的教师也明白易懂。黎曼的论文《关于构成几何基础的假设》除了是整个数学上的一篇伟大的杰作，也是一篇供举荐的名著。高斯是很热心的。"与一切传统相反，他选择了这位候选人提交的三个题目中的第三个，希望看看这个如此年轻的人怎样处理这一困难问题。他大为惊异，完全出乎他的意料，在从教师会议上回来以后，他向威廉·韦伯表示了他对黎曼提出的思想的最高度的赞赏，他讲得非常热心，而这对于高斯来说是很少有的。"关于这篇杰作，在本书中所能说的一点将留待本章结尾去说。

黎曼在克维克博恩的家里与家人团聚，稍事休息以后，于九月间回到格丁根，给一个科学家的集会作了一次准备得很仓促的演讲（熬到深夜，急急忙忙把它准备出来）。他讲的题目是绝缘体中电的传播。在那一年中，他继续他对电的数学理论的研究，并准

499

备了一篇关于诺比莱彩色环的文章，因为如他写给他的妹妹伊达的信中所说："这个问题是重要的，因为与它联系起来能够作出非常精确的测量，电的运动所遵循的规律也能够由它测验。"

在同一封信中(1854 年 10 月 9 日)，他表达了对他第一次学术演讲获得成功的无限喜悦，以及对听讲的人出乎意料地多感到极大的满意。八个学生来听他讲！他原来估计最多有两、三个学生。这种出乎意外地受欢迎的情况鼓励了黎曼，他告诉父亲，"我能正式开课了。我最初的胆怯和不安已经越来越平息了，我开始习惯更多地考虑听众，而不是想到自己，从他们的表情上看出，我应该继续讲下去，还是作进一步的解释。"

当狄利克雷在 1855 年接替高斯的职位时，黎曼的朋友们极力要求当局任命黎曼为正式副教授，但是大学的经费不能这样滥用。不过他得到了相当于一年两百美元的收入，这比半打学生自愿付的不固定的学费要高。黎曼为他的未来焦虑，不久，他失去了父亲和妹妹克拉拉，这使他不可能再躲到克维克博恩去度假了，他确实感到又可怜又不幸。他的其余三个姊妹和另一位兄弟住在一起，这位兄弟在不来梅当邮政职员，他的薪金与"没有经济价值的"数学家的相比，算是王侯的薪金了。

第二年(1856 年；黎曼这时三十岁)前景光明了一点。象黎曼这样有创造力的天才，只要他还能够勉强维持生活，为了能够工作，他就不会被沮丧压倒。他关于阿贝耳函数的独具特色的部分著作，关于超几何级数(见高斯那一章)以及和这个级数提出的——在数学物理中极为重要的——微分方程的经典著作，都属于这一时期。在这两方面的著作中，黎曼在他自己的新方向上独树一帜。他的方法的一般性，直观能力，是他自己所特有的。他的工作吸引了他的全部精力，使他不顾物质方面的忧虑，仍然很快乐，

也许肺结核病人必不可少的乐观主义已经在他身上起作用了。

黎曼对阿贝耳函数理论的发展，不同于维尔斯特拉斯的发展，犹如月光不同于日光。维尔斯特拉斯的进攻是有条不紊的，在所有的细节上都是精确的，就象一支受过充分训练的军队，在洞察一切，对一切意外事故都有所准备的将军统率下的进军。至于黎曼，他察看了整个战场，看到了一切，但忽略了细节，留下这些细节不予考虑，他满足于在他的想象中抓住总的地形的关键位置。维尔斯特拉斯的方法是算术的，黎曼的方法是几何的和直观的。说一个比另一个"更好"是没有意义的；两种方法都不能从普通的观点去理解。 500

工作过度和缺乏合理的休息，在黎曼刚刚三十一岁时造成了他的神经衰竭，黎曼被迫和一位朋友在哈尔茨的山村度过了几个星期。他在那里遇见了戴德金。三个人一起远足登山。黎曼很快就康复了。黎曼解除了不得不保持学究面孔的紧张，放纵他的幽默感，用他天生的机智逗他的同伴发笑。他们也一起谈他们的本行——大多数数学家聚在一起时都这样，就象律师或者医生或者企业家那样，倘若他们不是非得胡扯以维持社会习俗的话。一天傍晚，在艰苦的徒步旅行之后，黎曼阅读布鲁斯特的牛顿传记，发现了牛顿致本特利的信，在这封信中，牛顿本人断言了无中间介质的超距离作用的不可能性。这使黎曼很高兴，并激起他作一次即兴演讲。今天，黎曼称赞的"介质"并不是发光的以太，而是他自己的"曲面空间"，或它在相对论时空中的反映。

最后，1857年黎曼三十一岁时，得到了助理教授的位置。他的薪金相当于一年三百美元，但是由于他终生一无所有，收入不多，他想望得更少。然而一场真正的灾难不久就降临到他头上：他的兄弟死了，照料三个妹妹的担子落在他的肩上。准确地算来，他

们每人一年只有七十五美元。无以为生地在茅屋里呆上一年也许是天堂；几乎一无所有地生活在大学社会里简直就是地狱。在黎曼的时代，这没有甚么不同。难怪他患肺结核。但是，慷慨地给予生命的上帝，不久就使黎曼最小的妹妹玛丽得到解脱，所以每个人的生活费一下子增加到了一百美元一年。如果说口粮需要注意，爱却是慷慨的，黎曼的妹妹们的忠诚和鼓励，在他身上注入的自信，更多地报偿了他为她们作出的牺牲。上帝可能知道，如果有过一个艰苦奋斗的人需要鼓励，那就是可怜的黎曼；看来这仍然是一种提供需要的奇怪的方式。

1858 年，黎曼写了关于电动力学的文章，关于这篇文章他写信告诉他的姐姐伊达，"我已经把我关于电和光之间的密切联系的发现，呈送给[格丁根]皇家协会了。我听说关于这个密切联系，高斯曾经设想了另一个理论，和我的理论不同，并告诉了他亲密的朋友们。不过，我充分相信我的理论是正确的，过几年就会得到承认。如所知道的，不久高斯收回了他的论文，没有发表它；也许他本人对它不满意。"看来黎曼在这个问题上是过于乐观了；克拉克·麦克斯韦的电磁场理论是今天占领这个领域——在宏观现象方面——的理论。光和电磁场理论的目前状况过于复杂，无法在这里描述；注意到黎曼的理论没有流传下来就足够了。

狄利克雷于 1859 年 5 月 5 日去世。他一直很重视黎曼，曾经尽他所能地帮助这个艰苦奋斗的年轻人。狄利克雷的关心和黎曼迅速增长的名声，使得政府提升黎曼来接替狄利克雷。这样，黎曼在三十三岁时成了高斯的第二个继任者。为了减轻他的家庭困难，当局让他住在天文台，就象高斯曾经住在天文台一样。最真诚的承认——那些虽然比他年长，但在某种程度上是他的竞争者的数学家的赞扬——现在蜂涌而至。在一次去柏林访问时，他受到

博查特、库默尔、克罗内克和维尔斯特拉斯的宴请。各种学术协会，包括伦敦皇家学会和法兰西科学院，授予他会员的荣誉，总之，他得到了一个科学家通常所能得到的最高荣誉。1860年访问巴黎时，他结识了法国第一流的数学家，特别是埃尔米特，他对黎曼的称赞是没有止境的。这一年，1860年，是数学物理史上值得记忆的一年，因为在这一年，黎曼开始集中写作他的论文《关于热传导的一个问题》，他在这篇文章中发展了二次微分形式（将在讲到黎曼关于几何基础的工作时提到）的全部方法，今天二次微分形式是相对论的基础。 502

黎曼的物质生活随着他被任命为正教授而大大改善，他在三十六岁时有能力结婚了。他的妻子伊丽泽·科赫是他的姐妹的朋友。婚后仅仅一个月，黎曼在1862年患了胸膜炎。他尚未完全恢复又患了肺病。有影响的朋友们劝使政府给了黎曼在意大利温暖的气候下恢复健康的费用，他在意大利度过了冬天。第二年春天，他在返回德国的途中，在他访问过的许多意大利城市的艺术宝库中得到了极大的愉快。这是他一生中短暂的夏天。

他满怀希望，离开了他热爱的意大利，可是在到达格丁根时只是病得更严重了。在回程中他不小心，在斯普吕根山口步行通过深深的积雪时，很厉害地着了凉。第二年八月（1863年），他回到意大利，首先在比萨停留，他的女儿伊达（用他姐姐的名字命名）在比萨出生。这一年的冬天异常严酷，阿尔诺河也封冻了。五月他搬进比萨城郊的小别墅。他的妹妹海伦妮在那里去世。他自己的病由于黄疸病而更加麻烦，变得越来越严重。使他深感遗憾的是，他不得不拒绝了比萨大学提供给他的教授席位。格丁根慷慨地延长了他的休假时间，使他能够在他的意大利数学界朋友的环绕中，在比萨度过第二个冬天。但是进一步的并发症使他渴望回家，在

里窝那和热那亚恢复健康无效以后，他在10月回到了格丁根，在那里，他度过了一个可以算得健康的冬天。

整个这段时间，他有力气时就工作。在格丁根，他常常表示想要与戴德金谈谈他尚未完成的工作，但是一直没有感到身体强壮到了能经得住一次拜访。他最后的计划中有一项是关于耳朵的力学的工作，他留下来没有完成。他曾经希望完成这件工作，以及其他一些他认为很重要的事情，他为恢复他的力气作了最后的努力，回到了意大利。他最后的日子是在骄利湖畔塞拉斯卡的一栋别墅中度过的。

戴德金讲述了他的朋友是怎样去世的。"但是他的力气迅速衰退；他自己感到他的终点接近了。去世的前一天，他坐在一棵无花果树下工作，在环绕着他的灿烂的风景中，他的心灵充满了愉悦……。他的生命缓缓地衰竭，没有斗争或死亡的痛苦；看起来他仿佛很有兴趣地注视着灵魂脱离躯体；他的妻子不得不给他领圣餐，……他对她说，"吻我们的孩子。"她同他一起背诵主祷文；他不能说话了。在听到'免我们的罪'这几个字时，他虔诚地向上望去；她感到他的手在她手里渐渐变凉了，随着几声最后的叹息，他那颗纯洁、高尚的心停止了跳动。在他父亲的家里给他养成的温柔的心，终生与他同在，他忠实地服侍他的上帝，就象他父亲那样，但是以不同的方式。"

503

黎曼就这样在他成熟的天才的光荣中，于1866年7月20日去世了，时年三十九岁。在他的意大利朋友们为他竖立的墓碑上，铭文的最后一句是："凡爱上帝者必诸事顺遂。"

作为一个数学家，黎曼的伟大在于他给纯数学和应用数学揭示的方法和新观点的有力的普遍性和无限的范围。细节从来没有

使他气馁；他把一个庞大的问题的整体看作一个连贯的统一体。甚至关于未完成的计划的零星笔记，通常也暗示某种令人难忘的新奇的东西，因而加深了我们对黎曼过早去世的惋惜。这里只能叙述他的一件伟大的杰作，即1854年关于几何基础的论文；虽然我们利用克利福德只是为了介绍另一个人，这对他可能不大公平，但是我们将全部引用他1870年的大胆的论文《论物质的空间理论》，作为对黎曼几何的形体和精神的独特的预言式介绍。克利福德不是一个缺乏独创的模仿者，他是一个有他自己辉煌的创造性头脑的人，对于他，可以象牛顿说到科茨那样说，"要是他还活着，我们就可能知道一些东西了。"任何熟悉相对论的物理和电子波动理论的比较有用的通俗解释的读者，都会在克利福德的简短预言中辨认出现在一些理论的几个奇妙的轮廓。

"黎曼指出，正如有不同的线和曲面，所以有不同种类的三维空间；我们只能凭经验去找出我们生活在其中的空间属于这些三维空间中的哪一类。特别是，平面几何的公理在一张纸的表面上的试验限度内是成立的，然而我们知道，这张纸实际上布满了许多小皱纹，在这些皱纹上(合曲率不为0)，这些公理不成立。他说，同样地，虽然立体几何的公理在试验的限度内对于我们空间的有限部分是成立的，然而我们没有理由得出它们对于非常小的部分也成立的结论；如果因此能够对于物理现象的解释得到什么帮助的话，我们就有理由得出它们对于空间的很小的部分不成立的结论。 504

"我要在这里指出一种方法，使这些思考可以应用于物理现象的研究。我认为实际上

(1) 空间的小部分事实上具有一种性质，类似于在一张普通水平程度的曲面上的小丘；即普通的几何规律在它们上不成立。

(2) 这种呈弯曲或扭曲的性质，以波的方式连续地从空间的一部分过渡到另一部分。

(3) 空间曲率的这种变化是我们称为物质运动(不管这物质是重还是轻)的那种现象中真正发生的。

(4) 在物理世界中，根据(也许是)连续的规律，除了这个变化以外没有其他事情发生。

"我尽量一般地解释这个假设中的复屈折规律，但是还没有得出任何确定到了可以公布的结果。"

黎曼也相信他的新几何会被证明具有科学上的重要意义。如他的论文(克利福德的翻译)的结尾所表明的：

"因此要末构成空间基础的现实必须形成一个离散的流形，要末我们必须在作用于它上面的约束力中，寻找在它之外的、它的度量关系的基础。

"对这些问题的回答，只能从以前由经验辨明的现象(牛顿假定这种现象是基础)的构想出发去得到，也可以从在这种构想中做它所不能解释的事实所要求的逐次改变去得到。"他接着说，象他自己的那些从一般概念开始的研究，"对于避免这项工作变得被过于狭窄的观点所妨碍是有用的，对于避免事物的互相依赖的知识进展被传统的偏见所妨碍也是有用的。

505

"这引导我们进入另一门科学，即物理科学的领域，这项工作的目的今天不允许我们进入这个领域。"

黎曼1854年的工作对几何有了一种新的看法。他想象的几何是非欧几里得几何，不是在罗巴切夫斯基和约翰·鲍耶意义上的非欧几何，也不是在黎曼自己的钝角假设(如在第十六章中解释的)这一苦心之作的意义上的非欧几何，而是在一个依赖于测量概念的更广泛的意义上的非欧几何。把测量关系孤立地作为黎曼理

论的中枢，是对它的误解；这个理论包含的东西远比一个测量的可以实行的原理为多，但这是它的一个主要特征。对黎曼简单扼要的论文的任何解释，都不能说明这篇论文中的全部内涵；然而，我们将试图说明他的一些基本思想，我们将选择三点：流形的概念，距离的定义，以及流形的曲率的概念。

一个流形是一类物体（至少在通常的数学中），使得这个类中的任意一个成员，都能通过给它指定的一些数来完全确定，这些数按确定的顺序排列，相应于元素的"可数"性质，已知顺序的指定，相应于"可数"性质的一个预先指定的顺序化。即使这可能甚至比黎曼的定义更难理解，但它仍然是据以开始的一个有效的起点，它在普通数学中相当于：一个流形是一个有序的数$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的"n元组"的集合，括弧（　）表示数$x_1, x_2, \cdots, x_n$应按已知的顺序写。两个这样的n元组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$(y_1, \cdots, y_n)$，当它们中的对应数分别相等，即当$x_1=y_1, x_2=y_2, \cdots, x_n=y_n$时，而且仅仅在这种情形下，两个$n$元组是相等的。

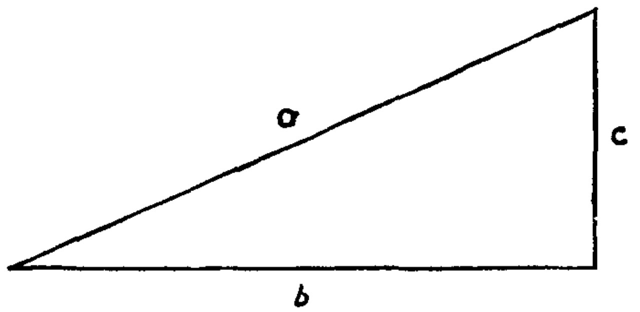
如果流形中的每一个这样的有序n元组中恰好出现n个数，那么就说流形是n维的。因此我们又回到谈论笛卡儿坐标了。如果$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中的每一个数都是正整数，0，或负整数，或者如果它是任意一个可数集（元素可以数作1，2，3，……的集合）的元素，并且如果这对于集中的每一个n元组都成立，那么就说流形是离散的。如果数$x_1 \cdots\cdots x_n$可以连续取值（如在一个点沿着一条线的运动中那样），那么流形是连续的。

这个有效定义忽略了——有意地——有序n元组的集合是否是"流形"，或者由这些n元组"表示"的某些东西是否是"流形"的问题。这样，当我们说(x, y)是平面上一个点的坐标时，我们并没有问"平面上的一个点"是什么，而是着手用这些有序数对(x, y)，其 506

中 x, y 独立地跑遍所有实数。另一方面，有时候把我们的注意力放在诸如(x, y)这样的符号表示些什么上面是有利的。这样，如果 x 是一个人的按秒计算的年龄，y 是他的按厘米计算的身高，我们可能对这个人或者所有这一类人感兴趣，而不是对他的坐标感兴趣，而我们的调查的数学涉及的只是坐标。按同样的想法，几何不再涉及"空间""是"什么——不管"是"是否意味着与"空间"有关的东西。对一个现代数学家来说，空间只是上面所描述的那类数的流形，空间的这个概念是从黎曼的"流形"中产生出来的。

黎曼在讲到测量时说，"测量在于需要比较的量的叠加，如果没有这一点，量就只能在一个量是另一个量的一部分时才能比较了，那就只能决定多和少，而不能决定多少了。"可以顺便说一下，测量的一个一致的和有用的理论，目前是理论物理，特别是量子和相对论在其中具有重要意义的一切问题中的一个迫切需要的东西。

黎曼再次从哲学的一般原则下降到不那么神秘的数学，黎曼着手制定了一个距离的定义，这是从他的测量的概念中提取出来的，它已经证明在物理和数学两方面都是富有成效的。毕达哥拉斯命题



507 $a^2=b^2+c^2$ 或 $a=\sqrt{b^2+c^2}$，其中 a 是直角三角形的最长边，b, c 是其它两边的长度，是在平面上测量距离的基本公式。怎样把它推

广到曲面上呢？平面上的直线相当于曲面上的测地线(见第十四章)；但是在球面上，例如，对于由测地线形成的直角三角形，毕达哥拉斯命题不成立。黎曼象下面这样把毕达哥拉斯公式推广到任意流形：

设$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$，$(x_1+x_1', x_2+x_2', \cdots, x_n+x_n')$是流形上的两个"点"的坐标，这两个点是互相"无限接近"的。对于我们现在的目的，"无限接近"的意义是，比测量在流形上的这两个点"分离程度"的x_1'，x_2'，……，x_n'的二次幂高的幂次可以被忽略不计。为简单起见，我们说明$n=4$时的意义——给出在四维空间中两个邻近点的距离：这个距离是

$$\begin{aligned} g_{11}x_1'^2+g_{22}x_2'^2&+g_{33}x_3'^2+g_{44}x_4'^2\\ &+g_{12}x_1'x_2'+g_{13}x_1'x_3'+g_{14}x_1'x_4'\\ &+g_{23}x_2'x_3'+g_{24}x_2'x_4'\\ &+g_{34}x_3'x_4' \end{aligned}$$

的平方根，其中十个系数g_{11}，……，g_{34}是x_1，x_2，x_3，x_4的函数。对于所有g的一个特别选择，一个"空间"就被确定了。这样我们可以有$g_{11}=1$，$g_{22}=1$，$g_{33}=1$，$g_{44}=-1$，所有其它的g_{ij}是零；或者我们可以考虑一个空间，其中除g_{44}和g_{34}外，所有的g_{ij}是零，等等。相对论中考虑的空间具有这种一般类型，其中除了g_{11}，g_{22}，g_{33}和g_{44}以外的所有g_{ij}是零，这些是一些包括x_1，x_2，x_3，x_4的简单表示式。

在n维空间的情形，邻近点之间的距离以类似的方法定义；一般表达示包含$1/2n(n+1)$项。已知对于两个邻近点的距离的已推广的毕达哥拉斯公式，找出空间中任意两点之间的距离是一个积分学中的可解问题。一个其度量(测量体系)由上述类型的公式确定的空间称为黎曼空间。

曲率，如黎曼所表达的(在他之前高斯表达过；见关于高斯那一章)，是从普通经验得出的另一个概括。一条直线的曲率是零；508 一条曲线偏离直线的量的测量，可以是对曲线上的每一点都相同的(就象对于圆那样)，或者当通过应用无穷小表示"曲率量"又成为必要时，它可以在曲线上逐点逐点变化。对于曲面，曲率同样地由偏离平面的量来测量，平面曲率为零。这可以加以概括，象下面这样使之更精确一些。为简单起见，我们首先说明二维空间的情形，即对于一个象我们通常想象曲面的曲面的情形。由表示已知曲面(当函数 g_{11}, g_{12}, g_{13} 为已知时确定了的)上邻近点距离平方的公式

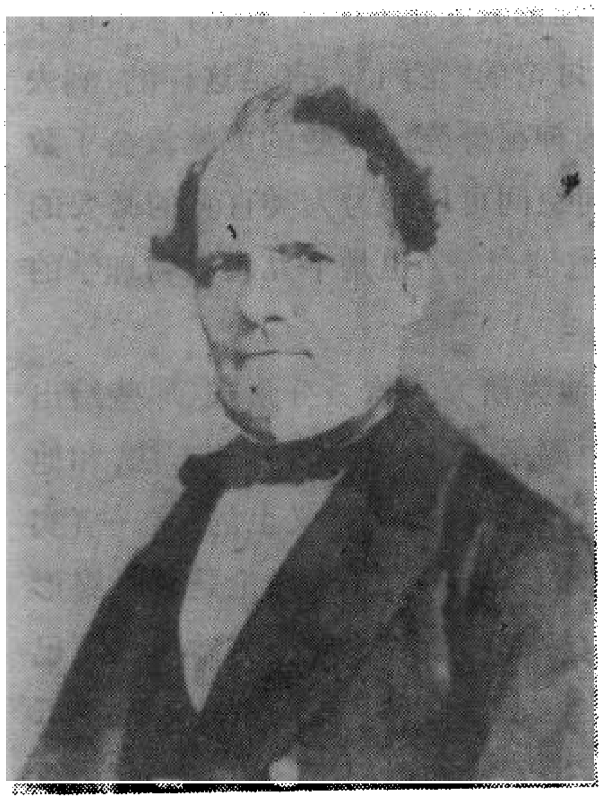
$$g_{11}x_1'^2+g_{12}x_1'x_2'+g_{22}x_2'^2,$$

完全用已知函数 g_{11}, g_{12}, g_{22} 来计算曲面上任意点的曲率的大小是可能的。现在用普通的语言谈论一个高于二维的空间的"曲率"是毫无意义的。但是黎曼推广了高斯的曲率，着手以同样的数学方式建立一个在 n 维空间的一般情形中包含一切 g_{ij} 在内的表示式，它和对于曲面曲率的高斯表示式一样，在数学上是同一类的，这个推广的表示式就是他所说的空间的曲率测量。展示一个高于二维的曲面空间的表示是可能的，但是这些对直觉的帮助，大概就象给一个没有脚的人一对破拐杖一样无用，因为它们没有给理解增加什么东西，而且它们在数学上是没有用的。

为什么黎曼要做这一切，它产生了什么结果呢？我们除了提示黎曼做了所做的事情，是因为他过人的精力驱使他去做之外，不打算回答第一个问题，我们可以简略地列举一些从黎曼对几何思想的革命中产生的结果。首先，它把为了特殊目的——用于动力学，或纯几何学，或物理科学——的、数目无限多的"空间"和"几何"的创造，置于专业几何学家的能力范围之内，它把大量重要的几何定

理，捆成能够很容易作为整体处理的紧紧的一束。其次，它澄清了我们的空间概念，至少就数学家讨论的“空间”而言是这样的，剥去了那个神秘的虚构空间的最后的神秘外壳。黎曼的成就教会了数学家们不相信任何几何，或任何空间可以作为人类直觉的必要的模式。它是绝对空间的最后一道催命符，也是十九世纪物理学的“绝对空间”的第一道催命符。 509

最后，黎曼所定义的曲率，他为研究二次微分形式(那些给出任意维数的空间中邻近点之间距离平方的公式)设计的方法，和他对于曲率是一个不变量(在前几章解释的专门意义上的)这一事实的认识，都在相对论理论中找到了物理解释。相对论是否最终形式并不是要点；自从相对论问世以来，我们对于物理科学的见解已不同于以往。没有黎曼的工作，这个对于科学思想的革命是不可能的——除非某个后来的人创造出黎曼创造的概念和数学方法。



库默尔

第二十七章　算术，第二位

库默尔和戴德金

我们因此看出理想素因子揭示了复数的本质，似乎使得它们明白易懂，并揭露了它们内部透明的结构。

——E. E. 库默尔

我的大多数读者会大失所望地得知，由于这个平凡的观察，连续的秘密就要被揭开了。

——R. 戴德金

这是一个奇怪的事实，虽然算术——数论——是产生比数学的任何其它学科更深奥的问题和更有力的方法的丰富源泉，但是它通常被看作是停留在主要进展的一个方面，作为对几何和分析学的比较浮华的成就、特别是它们对物理科学的贡献中的成就的一个或多或少冷血的旁观者，过去的两千年里，很少有大数学家在"纯数"的科学进展上作过认真的努力。

很多原因决定了对于毕竟是与数学同等优秀的东西的奇怪的忽视。在这些原因中，我们只需要注意下面的：目前算术在固有的难度方面，处于比数学的其他各大领域更高的程度；数论对科学的直接应用是很少的，而且不容易被有创造力的数学家中的普通人看出来，虽然一些最伟大的数学家已经感觉到，自然的真正数学最终会在普通完全整数的性态中找到；最后，数学家们——至少是一些数学家，甚至是大数学家——通过在分析、几何和应用数学中收获惊人地成功的比较容易的收成，企图在他们自己那一代中得到尊敬和名望，这只不过是合乎常情的。甚至高斯也屈从过，这使他在中年极为懊悔。

现代算术——高斯之后——始于库默尔。库默尔的理论始于他试图证明费马大定理，这已经提到过了(第二十五章)。这个人长寿的一生中有些事情可以在我们讨论到戴德金之前谈谈。库默尔是一个典型的老派德国人，有着最好不过地刻划了在迅速消亡的那一类人的特性的全部直率、单纯、好脾气和有趣的幽默。这些老古董，木质已经陈旧，可以在上一代的任何旧金山德国花园酒店的柜台后面找到。

511

虽然埃内斯特·爱德华·库默尔(1810年1月29日—1893年5月14日)出生于拿破仑失势之前仅仅五年，法国这位光荣的皇帝在库默尔的生活中却起了重要的、即使是不知不觉的作用。库

默尔是德意志索劳(那时属勃兰登堡公国)的一位医生的儿子，他在三岁时失去了父亲；拿破仑大军的满身虱子的幸存者，通过德意志零零落落地回到法国，带着俄国人特有的礼物斑疹伤寒，与爱清洁的德国人一起大量分享了这一礼物。这位操劳过度的医生染上了这种病，死掉了，把埃内斯特和他的哥哥留给寡妻照料。年轻的库默尔在艰难贫困中长大，但是他的艰苦奋斗的母亲，不管怎样，设法让她的儿子们上完了当地的中学。拿破仑时代法国人的傲慢和苛捐杂税，以及他母亲竭力保持的对他父亲的记忆，使年轻的库默尔实际上成了极端爱国者，他以真正的热忱，在后半生把他超人的科学才能用来在柏林的军事学院给德意志军官讲授弹道学。他的许多学生在普法战争中都干得很好。

库默尔十八岁时(1828 年)，他母亲把他送进哈雷大学学神学，并在其他方面使他适于在教会供职。由于贫穷，库默尔不能住在大学里，而是背着装食物和书本的背包，每天从索劳到哈雷来回奔波。关于他的神学学习，库默尔作了有趣的观察，发现一个对抽象思维有才能的人，究竟是从事哲学还是从事数学，多少是一桩由偶然因素或环境决定的事情。在他自己的情形，偶然因素是海因里希·费迪南德·舍尔克(1798—1885)在哈雷担任数学教授。舍尔克是个相当老派的人，但是他对代数和数论很热心，他把这种热心传给了年轻的库默尔。在舍尔克的指导下，库默尔很快就抛弃了他的伦理和神学学科，去学习数学。库默尔模仿笛卡儿，说他更喜欢数学而不是哲学，因为"纯粹错误和谬误的观点不能进入数学。"要是库默尔活到今天，他可能会修改他这种说法，因为他是一个宽宏大量的人，而现在数学中的那些哲学倾向，有时令人奇怪地想到中世纪的神学。库默尔上大学三年级时，解决了数学中的一道难题，在二十一岁时(1831 年 9 月 10 日)被授与博士学位。当时大学没有

512

空位子，库默尔在他过去上的中等学校开始了教师生涯。

1832 年他迁往利格尼茨，在那里的中学教了十年书，正是在那里，他使克罗内克开始了他革命性的事业。幸运的是，库默尔不象处于同样境况的维尔斯特拉斯那样手头拮据，还能付得起进行科学通信的邮资。和库默尔一起分享他的数学发现的著名数学家们（包括雅可比），努力使这位担任中学教师的年轻天才得到最早的机会，被提升到更适合于他的位置上去，1842 年库默尔被任命为布雷斯劳大学的数学教授。他在那里一直教到 1855 年，当时高斯的去世造成了欧洲数学界大范围的变动。

据说狄利克雷在柏林是很满意的，那时柏林是世界的数学首都。但是在高斯去世时，狄利克雷不能抗拒接替这位数学家之王和他本人以前的老师担任格丁根大学教授的诱惑。甚至在今天，作“高斯的继任者”的荣誉，对于可以轻而易举地在其它职位上挣到更多的钱的数学家们，也仍然具有不可抗拒的吸引力；直到最近，格丁根还是能够选择它愿意挑选的人。库默尔受到他的同代数学家们的高度尊敬，这从人们一致推选他为狄利克雷在柏林的继任者这个事实，就可以判断出来。从二十九岁起，他就是皇家柏林科学院的通信院士。他现在（1855 年）在大学和科学院两方面都继任狄利克雷的位置，而且还被任命为柏林军事学院的教授。

库默尔是科学天才中最罕见的天才之一，这些天才在最抽象的数学，在数学对实际事务，包括战争这个人类全部愚蠢行为中最无耻的实际事务的应用方面，以及最后，在进行极其优秀的实验物理的能力方面，都是第一流的。他最杰出的工作是在数论上，在这个领域中，他深刻的独创性促使他作出了一些最重要的发明，但是在其他领域——分析、几何、应用物理——中，他也做出了突出的 513

工作。虽然库默尔在高等算术方面的开拓性的进展，使他有资格与非欧几何的创造者相比美，我们在回顾他一生的八十三年时，不知为甚么得到这样一个印象，就是尽管他的成就是辉煌的，但他没有完成他能够做到的一切。也许是他的缺乏个人野心（下面要举出一个例子），他的悠闲和蔼，以及他豁达的幽默感，阻止他去作打破记录的努力。

库默尔在数论方面所做工作的性质，已经在关于克罗内克的那一章中叙述过了：他以在证明费马大定理的努力和在高斯的割圆理论中产生的代数数域，重建了算术基本定理，他通过一类全新的数、他所谓的"理想数"，完成了这一重建。他也继续了高斯关于双二次互反律的工作，并寻找高于四次的互反律。

正如前几章中提到过的，库默尔的"理想数"现在已大部分被戴德金的"理想"所代替，我们将在讲到理想时加以描述，所以没有必要在这里尝试几乎不可能的事，即用非专门的语言解释库默尔的"数"是些什么。但是他利用这些数取得的成绩，可以为本书这样的记述充分精确地予以说明：库默尔证明了：$x^p+y^p=z^p$，p 是素数，对于很广泛的整整一类素数 p，在凡是非 0 的整数 x, y, z 中都是不可能的。他对一切素数证明费马定理时没有成功；某些"特殊的素数"逃脱了库默尔的网——而且仍然逍遥在外。然而库默尔向前推进的这一步，远远超出了他所有的前辈曾经做过的工作，以至他几乎不由自主地成为名人。他被授与一项他没有去竞争的奖金。

法兰西科西院关于它 1857 年"大奖"赛的报告，全文如下："关于对数学科学大奖赛的报告。大奖赛设于 1853 年，结束于 1856 年。委员会发现提交参加竞赛的那些著作中，没有值得授予奖金的著作，故此建议科学院将奖金授与 M. 库默尔，以奖励他关于由

514

单位元素根①和整数构成之复数的卓越研究。科学院采纳了这一建议。”

库默尔关于费马大定理的最早的工作，日期为1835年10月。1844—1847年他又写了一些文章，最后一篇的题目是《关于$x^p+y^p=z^p$对于无限②多个素数p的不可能性之费马定理的证明》。他不断补充改进他的理论，包括他对于高次互反律的应用，直到1874年为止，那时他已六十四岁了。

虽然这些高度抽象的研究是他最感兴趣的领域，虽然他对自己说，“为了更准确地说明我个人的科学态度，我可以适当地把它称做理论的……；我特别努力得到这样的数学知识，它们不用涉及应用就能在数学中找到它们的适当地位。”库默尔不是狭隘的专家，他多少有点象高斯，好象对纯数学和应用科学两方面都同样喜爱。高斯通过他的著作，确实是库默尔的真正老师，而这个机敏的学生也证明了他的奋发精神，他发展了他的老师关于超几何级数的工作，给高斯已经做过的工作增加了重大的发展，这些发展今天在数学物理中最经常反复出现的微分方程理论中十分有用。

此外，哈密顿关于射线组（在光学中）的精采工作，鼓舞库默尔作出了他自己的一个最美好的发现，即以他的名字命名的四次曲　515

① 如果$x^p+y^p=z^p$，那么$x^p=z^p-y^p$，把z^p-y^p分解成一阶的p个因子，我们得到

$$x^p=(z-y)(z-ry)(z-r^2y)\cdots(z-r^{p-1}y),$$

其中r是“第p个单位元素根”（除1以外），即$r^p-1=0$，r不等于1。由r生成的p次域中的代数整数，是库默尔引进费马方程的研究中的那些数，它们使他发明了在这个域中重建唯一因子分解的他的“理想数”——在这样一个域中的一个整数，在对于所有素数p的域中不是唯一的素数乘积。

② 在库默尔的标题中的“无限”仍然是（1936年）不合理的，应该用“很多”代替“无限”。

面的发现，当欧几里得空间是四维的(而不是我们平常想象的三维的)，就象以直线代替点作为构成空间的不可约元素时发生的那样，这种曲面在欧几里得空间的几何中起了重要作用。在十九世纪几何学的整整一个部分中，这个曲面(以及它到高维空间的推广)占据了中心位置；据发现(由凯莱发现)，它可以利用四重周期函数表示出来(参数表示——见高斯那一章)，雅可比和埃尔米特在这些函数上作了最重要的努力。

最近(自1934年以来)，阿瑟·埃丁顿爵士观察到，库默尔的曲面与量子力学中的狄拉克波动方程有一种亲缘关系(二者有同样的有限群；库默尔的曲面是四维空间中的波曲面)。

为了完成这个循环，库默尔被他对射线组的研究带回到物理学，他对大气折射理论作出了重要贡献。他在军事学院的工作中，通过表明他自己在弹道学工作中是第一流的实验者，使科学界大吃一惊。库默尔以他特有的幽默，为他在数学上的这种糟糕的堕落辩解："当我用实验去解决一个问题时，"他对一个年轻的朋友说，"这就证明这个问题是数学上很难解决的。"

库默尔记得他自己为了受教育所作的奋斗和他母亲作出的种种牺牲，因而他不仅对他的学生们是一位父亲，对他们的父母也是一位类似兄弟的人。成千上万的年轻人在人生的旅途上，在柏林大学或军事学院得到过库默尔的帮助，对他感激不尽，他们终生铭记他，把他当作一位伟大的教师和朋友。一次，一个就要参加博士学位考试的、贫穷的年轻数学家，因患天花，不得已回到靠近俄国边境的波森的家中去了。他走后没有来过信，但是人们知道他贫穷已极。当库默尔听说这个年轻人也许没有能力支付适当的治疗费用时，他就找到这个学生的一个朋友，给了他必需的钱，派他去波森看看是否该做的事都做了。在教学中，库默尔以他朴实的比

喻和富于哲理的独白而闻名。这样，为了充分说明在一个表示中，一个特殊的因子的重要性，他说："如果你们忽视了这个因子，你们就象一个人在吃梅子时吞下了核却吐出了果肉。"

库默尔一生的最后九年是在完全退隐中度过的。"在我的遗作中什么也找不到，"他这样说，想到高斯在去世后留给编辑的大量工作。库默尔被他的家人包围着(九个孩子比他活得长)，当他退休时就永远放弃了数学，除了偶尔去他少年时代生活的地方旅行，他过着极严格的隐居生活。他在一次短时间患流感以后，于1893年5月14日去世，终年八十三岁。 516

库默尔在算术上的后继者是尤利乌斯·威廉·里夏德·戴德金(他成年后略去了前两个名字)，戴德金是德国——或任何其他国家——曾经产生的一个最伟大的数学家和最有创见的人。和库默尔一样，戴德金也很长寿(1831年10月6日—1916年2月2日)，他去世前不久在数学上仍然十分活跃。当戴德金在1916年去世时，他已经是远远超出一代人的数学大师了。正如埃德蒙·朗道(他本人是戴德金的一个朋友，也是他的一些工作的追随者)在1917年对格丁根皇家学会的纪念演讲中所说："里夏德·戴德金不只是伟大的数学家，而且是数学史上过去和现在最伟大的数学家中的一个，是一个伟大时代的最后一位英雄，高斯的最后一个学生，四十年来他本人是一位经典大师，从他的著作中，不仅我们，而且我们的老师，我们的老师的老师，都汲取着灵感。"

里夏德·戴德金是法学教授尤利乌斯·莱温·乌尔里希·戴德金的四个孩子中最小的一个，出生于不伦瑞克，那也是高斯的诞生

地。①从七岁到十六岁，里夏德在家乡的中学念书。他没有显示出明白无误的数学天才的早期证据；事实上他最早喜爱的是物理和化学，他把数学看作科学的婢女——或洗碗妇。但是他没有在黑暗中徘徊多久。到十七岁时，他已经在物理学的所谓推理中发觉了许多可疑之处，便转向了数学的异议较少的逻辑。1848 年他进了卡罗莱纳学院——给年轻的高斯提供自学数学机会的同一所学院。在这所学院中，戴德金掌握了解析几何、"高等"代数、微积分学和"高等"力学的原理。因此当他在 1850 年十九岁进格丁根大学时，已经作好了开始认真工作的准备。他的主要指导教师是莫里茨·亚伯拉罕·斯特恩(1807—1894)——他写过许多关于数论的文章——高斯和物理学家威廉·韦伯。从这三个人手里，戴德金得到了对微积分学、高等算术原理、最小二乘法、高等测地学和实验物理的全面基础训练。

后来，戴德金感到很惋惜，他在格丁根学习期间接受的数学指导，虽然对他取得教师证书的较低的要求是适当的，但对于准备从事数学事业却是微不足道的。一些重要的学科没有接触到，戴德金不得不在取得学位以后，花费两年的时间刻苦自学，补上椭圆函数、现代几何、高等代数和数学物理——那时所有这些都在柏林大学由雅可比、斯泰纳和狄利克雷作了精采的详细阐述。1852 年，戴德金由于一篇关于欧拉积分的短论文，从高斯手里获得他的博士学位(这时他二十一岁)。没有必要解释这是什么：这篇论文是一

① 戴德金的合适的传记还没有出现。一个传记本来要包括在他的选集(1932 年的第三卷)中，但是由于主编(罗伯特·弗里克)去世而未能收入。这里的记述以朗道的纪念演讲为基础。注意，按照一些德国传记作者的古老的日耳曼习惯，朗道删去了所有提到戴德金母亲的地方。这无疑是与德国已故皇帝提出、阿道夫·希特勒竭力赞成的"三K"理论一致，即"妇女的全部职责包含在三个大 K 中——Kissing，Kooking [Cooking 在德文中拼作 K] 和 Kids。"然而，人们至少想知道一位伟大人物的母亲的闺名。[三 K 为接吻、烹饪、孩子三个词的首字母。——译者]

件有用的、独立的工作，但是它没有显露出戴德金后来的许多著作中每一页上都很明显的天才。高斯对这篇学位论文的意见是很有意思的："由戴德金先生完成的这篇论文是关于积分学的研究的，它决不是平凡的东西。作者不仅显示出他对有关领域具有丰富的知识，而且也显示出预示着他将来的成就的独立性。作为一篇获得考试许可的考查文章，我认为这篇论文是完全令人满意的。"高斯显然在这篇学位论文中看出了比后来一些批评家所发现的更多的东西；也许他和这位年轻作者的密切接触，使他能够从字里行间读到些东西。不过，这篇报告，即使按它的现状看来，也多少有点在接受一篇通得过的学位论文时，通常习惯的敷衍的礼貌，因此我们不知道高斯是否真的预见到了戴德金富于洞察力的独立性。 518

1854年戴德金被任命为格丁根大学不领薪金的讲师，他担任这个位置达四年之久。1855年高斯去世，狄利克雷从柏林迁往格丁根。戴德金在格丁根的后三年期间，听了狄利克雷的最重要的讲座。后来他编辑狄利克雷关于数论的著名论著，给它增加了包括他自己的代数数理论的、划时代的"第十一附录。"他也成了那时初露头角的伟大的黎曼的朋友。戴德金在大学讲的课大部分是初等课程，但是在1857—1858年，他开了一门关于方程的伽罗瓦理论的课(给两个学生泽林和奥维尔斯)。这也许是伽罗瓦理论第一次正式出现在大学课程中。戴德金是最早重视在代数和算术中群的概念的根本重要性的人之一。在这段早期工作中，戴德金已经展示出了他后期思想的两个主要特征，即抽象性与普遍性。代替从有限群按照置换表示(见伽罗瓦和柯西两章)所提出的观点去考虑有限群，戴德金利用公设去定义群(在第十五章中作了充分的说明)，试图从它们的本质的这种提炼中，得到它们的性质。这是用的现代方式：因为抽象，因此是一般性。第二个特点一般性，正

如刚刚暗示的，是第一个特点的结果。

戴德金二十六岁时被任命（1857年）为苏黎士理工学院的普通教授，执教五年，1862年回到不伦瑞克工学院任教授。他在那里工作了半个世纪。戴德金的正式传记作者——倘若能发掘出一个来——的最重要的任务，是要解释（不是辩解）这个奇怪的事实：戴德金在一个相对来说是低下的位置上干了五十年，而一些还不配给他系鞋带的人却占据了重要的和有影响的大学席位。说戴德金喜欢默默无闻是一种解释。那些相信这种说法的人应该严格避开证券交易所，因为上帝造就了容易上当的人，他们的的确确会受骗。

戴德金直到八十五岁去世（1916年）为止，一直保持着清楚的头脑和强健的身体。他终生未婚，但是和他的姐姐尤丽叶住在一起，519 一直到她1914年去世，尤丽叶作为小说家而为人们所纪念。他的另一个姐姐玛蒂尔德死于1860年；他的哥哥成了一位杰出的律师。

这些就是戴德金的物质生活中仅有的比较重要的事实。他活得那么长，以至于虽然在他去世以前，整整一代学习分析学的学生都熟悉他的一项工作（他的无理数理论），他本人却几乎成了一个传说中的人物，很多人把他归入虚幻的死者一类。在他去世前十二年，托伊布纳的《数学家年表》把戴德金列为已于1899年9月4日去世，戴德金深感好笑。他写信给编辑说，9月4日这一天有可能是正确的，但是年代肯定是错了。"根据我自己的备忘录，我健康状况极好地度过了这一天，并且同和我共进午餐的客人、我尊贵的朋友哈雷的乔治·康托尔，进行了很有激励作用的、关于'系统和理论'的谈话。"

戴德金的数学活动几乎完全与最广义的数的领域密切相关。

限于篇幅，我们只能论述他的两项最伟大的成就。首先我们叙述他对无理数理论，因此是对分析的基础的重要贡献，即“戴德金分划”。由于这是最为重要的，我们可以简单回忆一下这个问题的性质。如果 a，b 是普通整数，分数 a/b 就称作有理数；如果不存在整数 m，n，使得一个确定的“数”N 可以表示成 m/n，那么 N 就称作无理数。因此 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$ 是无理数。如果一个无理数用十进位记数法表示出来，那么小数点后面的数字不会呈现出规律性——没有重复的“周期”，而在有理数的十进位表示，比如说 $13/11=1.181818\cdots\cdots$，其中“18”无限次重复。那么，如果表示是完全无规律的，怎样决定（更不用说计算）与无理数等同的十进小数呢？我们有无理数是什么的清楚的概念吗？欧多克斯认为他有，戴德金的数、有理数或无理数之间相等的定义，与欧多克斯的定义（见第二章）是一致的。

如果两个有理数相等，那么无疑它们的平方根显然相等。这样，2×3 和 6 是相等的；那么 $\sqrt{2\times3}$ 和 $\sqrt{6}$ 也相等。但是 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}$，因此 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$，就不是显然的。这个简单的假定的等式 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$，是中学算术中被当作理所当然的，如果我们看一下这个等式隐含着什么，它的不显然性就是明显的：开出 2、3、6 的“无规律”的平方根，然后把前两个乘在一起，结果就会等于第三个平方根。由于这三个根不管计算进行到十进小数的多少位，都不能精确地开出来，因此很明显，通过刚刚描述的乘法去证明，永远也办不到。整个人类在它全部存在过程中连续不断地苦干，也永远不能以这种方式证明 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$。随着时间的流逝，能够得到对于等式的越来越近的逼近，但是最后结局会继续向远处退去。使“逼近”和“相等”的这些概念精确，或者用更严格的、能排除所指出的困难的描述，去代替我们一开始的

520

粗糙的无理数概念，这就是戴德金在十九世纪七十年代初为自己规定的任务。他关于“连续性和无理数”的著作发表于1872年。

戴德金的无理数理论的中心是他的“分划”或“截点”的概念：一个分划把全部有理数分为两类，使得第一类中的每个数小于在第二类中的每个数；每一个这样的不“相应”于一个有理数的分划“定义”了一个无理数。这个单调的论断需要详尽阐述，特别是因为一个精确的解释隐藏了一些根源在于数学的无限理论之中的难以捉摸的困难，当我们考虑戴德金的朋友康托尔的生平时，这些困难还要再次出现。

假定已经规定了某个规则，它把一切有理数分成两类，比如说“上”类和“下”类，使得下类中的每一个数小于上类中的每一个数。（这样一个假定今天不会不引起所有数学哲学学派的争议。不过，暂时可以认为它是无可非议的。）在这个假定下，可能有三种互不包含的情形。

(A) 在下类中可以有一个数，大于该类中任何其它数。

(B) 在上类中可以有一个数，小于该类中任何其它数。

(C) 在(A)、(B)中所说的两个数（[A]中最大的，[B]中最小的）都不存在。

导致无理数可能性的是(C)。因为，如果(C)成立，假定的规则就在一切有理数的集合中“定义”了一个确定的断开或“分划”。上、下两类好象努力要合在一起。但是为了这两类合在一起，必须有某个“数”来填上分划点，而由(C)，这样的填充是不可能的。

这里我们求助于直觉。沿着一条已知直线，从任何定点量起的一切距离，都“相应”于“测量”这些距离的“数”。如果分划点留下来没有填上，那么我们就必须画出现在上面有一条不可逾越的缝隙的直线，从前我们可以想象它是由一个点的连续运动描出来

的。这违反了我们的直觉概念，所以我们说，按照定义，每个分划确实决定了一个数。这样决定的数不是有理数，就是说，它是无理数。为了提供用这样的由(类[C]的)分划决定的无理数进行运算容易掌握的方法，我们现在认为(C)中有理数的下类与分划定义的无理数是相等的。

举一个例子就够了。2的无理平方根是由这样的分划定义的，它的上类包含所有其平方大于2的正有理数，下类包含所有其它的有理数。

如果分划的有点无从捉摸的概念是令人不愉快的，可以提出两种纠正方法：设想一个不象戴德金的定义这样神秘，而又完全可用的无理数定义；按照克罗内克，否认无理数存在，不用无理数重新构造数学。在数学的现存状态下，某种无理数理论是适宜的。但是，从无理数的真正性质去看，似乎在有可能建立一个适当的无理数理论之前，有必要先彻底理解数学无限。对无限类的要求在戴德金的分划定义中是明显的。这样的类导致了严重的逻辑困难。

一个数学家把这些困难看作对于数学的一贯发展是有关系的，还是没有影响的，依赖于他玩弄诡辩的水平。勇敢的分析学家们大胆地向前进，把一个通天塔①堆在另一个的上面，坚信没有哪一个理念的暴虐之神会打乱他和他的全部工作，而苛刻的逻辑学家们则讥诮地盯着他兄弟的庄严的摩天大楼，做快速心算预测其倒塌的日期。同时，大家都很忙，大家似乎都过得很快乐。但是有一个结论显得是无法避免的：没有一个一致的数学无限理论，就没有无理数理论；没有无理数理论，就没有与我们现在所有的即便稍 522

① 通天塔(Babel)为古巴比伦之一城及该城所建之塔，建塔者拟使之高过天庭；上帝以其狂妄责罚之，使各人突操不同的语言，彼此不相了解，该塔因之无法建成。见《旧约圣经·创世纪》第十一章。意指无法实现的计划。——译者

许相似的、任何形式的数学分析；最后，没有分析，象现在存在的大部分数学——包括几何和大部分应用数学——就不再存在了。

因此，数学家们可面临的最重要的任务，看来是构造一个令人满意的数学无限理论。康托尔尝试了这件事，所取得的成功将在后面看到。至于戴德金的无理数理论，它的作者似乎有些疑虑，因为他踌躇了两年多才冒险公布了它。如果读者们回头看看欧多克斯的"同比"的定义(第二章)，他们会看到"无限的困难"也在那里出现，特别是在"不管什么样的等倍数"这个习惯用语中出现。然而，自从欧多克斯写这句话以来，已经有了一些进步；我们至少正在开始懂得我们的困难的性质。

戴德金对"数"的概念作出的另一个突出贡献是在代数数方面。对于所论基本问题的性质，我们必须提到在克罗内克那一章中说过的，关于代数数域和代数整数分解成素因子的内容。这个问题的关键在于，在一些这样的域中，分解成素因子不象在普通算术中那样是唯一的；戴德金通过发明他称为理想的东西，恢复了这个非常希望得到的唯一性。一个理想不是一个数，而是一个数的无限的类，所以戴德金又是逃到无限中去克服他的困难了。

理想这个概念是不难领会的，虽然有一个冲击常识的曲解——包含较多数的类整除包含得较少的类(下面将解释)。不过，常识总是要受到冲击的，要是我们没有什么比防震的常识更不易受损害的东西，我们就是一个天生愚蠢的物种。一个理想必须至少做两件事：它必须实际上对普通的(有理)算术听其自然；它必须迫使难对付的代数整数遵守它们无视的算术基本规律——唯一分解成素数。

包含得更多的类整除包含得较少的类，这一点涉及到下面的

现象(和它的扩展，不久将要讲到)。考虑2整除4这一事实——用算术方法，就是说，没有余项。代替这个明显的事实(如果进入 523 代数数域，它什么也得不出)，我们用所有2的整数倍的类……，-8，-6，-4，-2，0，2，4，6，8，……来代替2。为方便起见，我们用(2)表示这个类。同样，用(4)表示4的所有整数倍的类。(4)中的一些数是……，-16，-12，-8，-4，0，8，12，16，……。现在很明显，(2)是包含得更多的类；事实上(2)包含所有(4)中的数以及(只提两个)-6和6。(2)包含(4)这一事实用符号来表示，写成$(2)|(4)$。很容易就能看出，如果m，n是任意普通整数，那么当而且仅当m整除n时，$(m)|(n)$。

这可能提醒我们，普通算术可除性的概念可以由刚刚叙述的类包含的概念来代替。但是如果这样代替不能保持算术可除性特有的性质，它就是无益的。可以详细说明它确实保持了这些性质，但是举一个例子就足够了。如果m整除n，n整除l，那么m整除l——例如，12整除24，24整除72，12事实上确实整除72。象上面那样转换到类，这就成为：如果$(m)|(n)$，$(n)|(l)$，那么$(m)|(l)$，或者用文字叙述，如果类(m)包含类(n)，又如果类(n)包含类(l)，那么类(m)包含类(l)——这显然是成立的。结果是，当我们加上“乘法”的定义：$(m)\times(n)$定义为类(mn)；如$(2)\times(6)=(12)$时，数用它们相应的类来代替，做了所需要的事。注意，乘法是定义，并不意味着可以从(m)和(n)的意义中推出来。

戴德金对于代数数的理想是上述内容的概括。按照他通常的习惯，戴德金下了一个抽象的定义，那就是说，一个基于基本性质，而不是依表示或描述所定义的东西的某个特殊模式而下的定义。

考虑一个已知代数数域中的所有代数整数的集合(或类)。在这个全包含的集中有一些子集。一个子集有下面两个性质则被称

为一个理想。

A．子集中任意两个整数的和与差仍在子集中。

B．如果子集中的任何整数由任何在全包含集中的整数去乘，所得的整数仍在子集中。

这样，一个理想是整数的一个无限的类。可以很容易看出，根据A，B，前面所定义的(m)，(n)，……都是理想。象以前一样，如果一个理想包含着另一个理想，就说第一个理想整除第二个。

524

可以证明每一个理想是一个具有形式为

$$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n$$

的整数的类，其中a_1，a_2，…，a_n是所论的n次域中的固定的整数，x_1，x_2，…，x_n中的每一个可以是域中不管什么样的任意整数。这样，通过只表示固定的整数a_1，a_2，…，a_n来用符号表示一个理想是方便的，这可以由以$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$作为理想的符号来完成。符号中a_1，a_2，…，a_n的顺序是不重要的。

现在必须给理想的"乘法"下定义：两个理想$(a_1, \cdots, a_n)$，$(b_1, \cdots, b_n)$的乘积是符号为$(a_1b_1, \cdots, a_1b_n, \cdots, a_nb_n)$的理想，在这个符号中出现由第一个符号中的一个整数与第二个符号中的一个整数相乘得到的所有可能的积a_1b_1，等等。例如，(a_1, a_2)和(b_1, b_2)的乘积是$(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)$。把任何这样的乘积符号（对于一个$n$次域）化简成最多含有$n$个整数的符号总是可能的。

可以用一个最后的短评来完成这个叙述的梗概。一个其符号只包含一个整数的理想，诸如(a_1)，称为一个主理想。象以前一样用记号$(a_1)|(b_1)$表示(a_1)包含(b_1)，我们可以毫无困难地看出，当且仅当整数a_1整除整数b_1时，$(a_1)|(b_1)$。那么，象以前一样，算术可除性的概念在这里——对于代数整数——完全等同于类的包含。一个素理想是除了包含给定域中的全部代数整数的全包含理

想之外，不能被任何理想“整除”——包含在内——的理想。代数整数现在被它的相应的主理想所代替，人们证明了一个已知理想只是在某种程度上的素理想的乘积，恰如在“算术基本定理”中，一个有理整数只是在某种程度上素数的乘积。根据对代数整数的类包含的上述算术可除性的等同性，算术基本定理对于代数数域中的整数得到了恢复。

任何对戴德金的创造的前述简单梗概加以考虑的人都会看到，他所做的工作要求有深刻的洞察力和在抽象能力方面远远超出普通良好数学头脑的有天赋的头脑。戴德金是完全符合高斯心意的数学家：“但是在我们看来，这些[算术的]真理应该从概念而不是从记号得出来。”戴德金总是依靠自己的头脑，而不是依靠巧妙的符号表示和对公式的熟练运用来使自己前进的。如果有过一个人把概念放入数学的话，戴德金就是一个，他喜爱创造性思想胜于喜爱枯燥无味的符号。这种智慧现在是明显的，虽然在他活着的时候可能并不是如此。数学存在得越久，就变得越抽象——也许正因为如此，也就变得更实际。

525



庞加莱

第二十八章　最后一位通才

庞　加　莱

一个名副其实的科学家，尤其是一个数学家，在他的工作中感受到与一个艺术家同样的印象；他的愉快也同样巨大，并具有同样的性质。

——亨利·庞加莱

星占学家威廉·利利（1602—1681）在《他的生活和时代的历史》中，对于对数发明者、梅奇斯顿的约翰·内皮尔（1550—1617）和计算出第一个常用对数表的、伦敦格雷沙姆学院的亨利·布里格斯

(1561—1631)的会见，作了一次有趣的——即便是难以置信的——叙述。一个叫约翰·马尔的"杰出的数学家和几何学家"，"在布里格斯先生之前到达苏格兰，目的是要在这两个如此博学的人会面时在场。布里格斯先生指定了在爱丁堡会面的日期，但是没有能如期前往，内皮尔勋爵怀疑他不会去了。一天，碰巧马尔和内皮尔勋爵正讲到布里格斯先生："'噢，约翰(梅奇斯顿的约翰说)，布里格斯先生不会来了。'正在这时，有人敲门；约翰·马尔急忙下楼，他很满意地证实来人正是布里格斯先生。他把布里格斯先生领上楼，带进勋爵的房间，在开口说话之前，两人互相赞赏地注视着，几乎过了一刻钟。"

西尔维斯特回想起这个传说，讲述了他自己怎样仿效布里格斯使人目瞪口呆的赞赏的世界纪录，那是在 1885 年，他访问一位写了许多令人惊奇的、成熟和有不可思议的创见的文章的作者时的事，这些文章是关于分析学的一个新分支的，从十九世纪八十年代初开始，它们就使各种数学杂志的编辑们应接不暇了。

"当我最近在盖-吕萨街庞加莱[1854—1912]的通风的休息处拜访他时，"西尔维斯特承认，"我完全进入了布里格斯面晤内皮尔时的感情……。在那个被抑制的智慧的伟大蓄积者面前，我的舌头一下子失去了功能，直到我用了一些时间(可能有两、三分钟)仔细端详和承受了可谓他思想的外部形式的年轻面貌时，我才发现自己能够开口说话了。"

西尔维斯特在另一处记述他在辛辛苦苦地爬上通往庞加莱那"通风的休息处"的三层狭窄的楼梯以后，停下来，擦着他那硕大的秃头时，看到的不过是一个孩子，当时他惊奇得不知所措，这个"如此美貌，如此年轻"的孩子，竟然是那些洪水般涌来、预告了柯西的一个后继者的到来的文章的作者。

第二件轶事可以多少说明那些能够欣赏庞加莱的工作范围的人，对他的工作所持有的尊敬的程度。当一个爱国的英国将官在[第一次]世界大战的狂热民族主义时期——那时所有学术界的爱国者都把抬高他们风雅的盟国，贬低他们粗俗的敌人当作一种义务——问伯特兰·罗素，法国现代产生的最伟大的人是谁，伯特兰·罗素立刻答道："庞加莱。""什么？那个家伙？"他那位穿军服的交谈者喊道，认为罗素指的是法兰西共和国的总统雷蒙·庞加莱。"噢，"当罗素明白了那个人惊愕的原因时，他解释说："我想到的是雷蒙的堂兄弟，亨利·庞加莱。"

庞加莱是最后一个实际上以全部数学——包括纯数学和应用数学两方面——作为他的研究领域的人。人们一般认为，在今天起步的任何人都不可能全面地理解数学的四个主要部分——算术、代数、几何、分析——中的两个以上，更不用说作出高质量的创造性工作了，对天文学和数学物理就更谈不上了。但是，甚至在十九世纪八十年代，在庞加莱的伟大事业开始时，人们就普遍认为高斯是最后一个数学通才，所以不能证明不可能有某个未来的庞加莱再次包罗这整个领域。

随着数学的演化，它既扩展也收缩，多少有点象勒梅特尔的一个宇宙模型。目前，这个状况是爆炸地扩展的，任何人要想熟悉自1900年以来倾注于世的全部刚刚开始的数学，是完全不可能的。但是在一些重要的部分，一个最受欢迎的收缩的倾向是清楚明显的。例如，在代数中就是如此，公设法的全面采用，立刻使得这个学科更抽象、更一般、更连贯。现代着手的一些工作揭开了一些意想不到的类似的情形。可以想象，下一代的代数学家将无需知道许多现在被视为有价值的东西，因为这些特殊的、困难的东西，有许多将被归入范围更广阔的、较为简单的一般原理。当相对论把

以太的复杂的数学束之高阁时，在经典的数学物理中就发生了这一类的事。

扩展中的这种收缩的另一个例子，是较之向量分析的许多特殊用途来，张量分析的应用有了迅速增长。这样的扩展和压缩往往一开始很难为年纪大的人所掌握，并且常常要经过严峻的斗争才能存在下来，但是最后人们通常认识到，一般方法比为特殊问题设计的各种各样巧妙的花样在本质上更简单、更容易掌握。当数学家们断言诸如张量分析这样的东西是容易的——至少与它之前的一些算法相比较——时，他们并不是要显得优越或神秘，而是在陈述一个每个学生都能自己证实的、有价值的真理。这个范围广大的一般性的特性，是庞加莱大量著作的一个卓著特点。

如果抽象性和一般性有所指出的那种明显的优点，那么它们有时候对那些对细节感兴趣的人来说有严重缺点也是事实。一个工作中的物理学家知道在他的工作中出现的特殊微分方程是可解的，因为当他和数学家都不能完成能够用于特殊问题的数值解所要求的赫拉克勒斯①式的劳动时，某个纯数学家证明了它可解，这对他有什么直接用处呢?

从庞加莱作出他的一些最有独创性的工作的领域中，举一个例子：考虑一个均匀的、不可压缩的流体，被它的粒子的引力作用聚合在一起，围绕一个轴旋转。在什么条件下运动是稳定的?这样一个稳定的旋转流体的形状是什么?麦克劳林、雅可比和其他一些人证明了一些椭球是稳定的；庞加莱采用了比他的前辈们更直观、而且“不那么数学”的方法，他一度认为他确定了一个梨形体的稳定性的标准。但是他错了。他的方法不适于数值计算，不适于后

529

① 赫拉克勒斯为希腊神话中主神宙斯之子，力大无穷，曾完成十二项英雄业绩。——译者

来的工作者，包括著名的查理·达尔文的儿子G. H. 达尔文，去得到一个明确的解，即便这些工作者没有被在得出确定的结论以前，必须从道路上清除的极其可怕的代数和算术的丛林阻挡住。①

对双星的演变感兴趣的人，如果数学家们的研究结果，以他能应用于计算机器的形式，呈现在他面前，他会比较轻松。自从克罗内克的“没有构造就没有存在”的法令以来，一些纯数学家本人对于非构造性的存在定理，也不象他们在庞加莱的时代那样热心了。庞加莱蔑视要求使用数学的人在他们进行工作以前必须具备的那些细节，这是有助于他多方面才能的一个最重要的原因。另一个原因是他非同寻常地全面掌握了单复变量函数理论的全部方法。在这方面他是无与伦比的。可以注意到，庞加莱把他多方面的才能极好地用来揭示以前未曾猜想到的、数学的相距甚远的分支——例如(连续)群和线性代数——之间的联系。

为了全面起见，我们在讲到庞加莱的生平以前，必须回想他的观点的另一个特点：很少有几个数学家具有庞加莱那样宽广的哲学观点，没有一个数学家在清晰地讲解的天赋方面超过他。也许他总是对科学和数学的哲学含意深感兴趣，但是只是在1902年，当他作为一个伟大的专业数学家的地位，已经无可挑剔地确立起来时，他才把普及数学从一种附带的兴趣，转到可以称为数学普及的呼吁，真诚热心地投身于和非专业的人们一起，尽情分享他的学科的意义及其对人类的重要性。在这里，他对一般胜于对特殊的喜爱，帮助他深入浅出地向知识的门外汉们，讲述数学中比技术更

530

① 这个著名的“梨形体”的问题，在宇宙进化论中有相当大的重要性。1905年由利亚波诺夫明显地解决了，他的结论在1915年由詹姆斯·琼斯爵士进一步证实：他们发现运动是不稳定的，极少有人有勇气去检查那些计算。1915年以后，利亚波诺夫的一位同胞莱昂·利希滕施泰因对旋转流体的问题作了一般考虑。这个问题似乎是招致不幸的；两个利都死于非命。

重要的东西。二、三十年前，可以在巴黎的公园和咖啡馆里，看到工人和女店员们热心地读着庞加莱的这一部或那一部杰作的印刷简陋、封面纸张低劣的通俗本。这些著作的较好的版本，也可以在有专业学问的人的书桌上找到——经过反复翻动，明显是读过的。这些书被译成英文、德文、西班牙文、匈牙利文、瑞典文和日文出版。庞加莱对所有的人用他们能识别的语言，讲着数学和科学的通用的语言。他的风格，他自己特有的风格，在翻译中失去了很多。

由于庞加莱的通俗著作的文学成就，他被授与法国著作家所能得到的最高荣誉，成为法兰西学院院士。心怀妒嫉的小说家们有几分恶意地说，庞加莱获得这个对科学界人士独特的荣誉，是因为(文)学院的一个职能是不断地汇编一部权威性的法语字典，通才庞加莱显然是在诗人和语言学家们告诉世界甚么是自守函数的努力中给他们帮了忙。建立在对庞加莱的著作进行研究的基础上的公正看法，认为这个数学家正该得到他所得到的荣誉。

与庞加莱对数学的哲学思想感兴趣密切相关的，是他对数学创造心理的专注。数学家们是怎样作出他们的发现的呢？后面庞加莱会在他写的有关个人发现的一个有趣的故事中，告诉我们他对这个秘密的看法。结论好象是数学发现是在数学家这方面的长期艰苦劳动之后，或多或少自己冒出来的。正如在文学中——按照丹特·加布里埃尔·罗赛蒂①的话——一首诗成熟之前，“一定量的基本脑力劳动”是必要的，在数学中也是如此，没有事先的单调辛苦的工作，就没有发现，但是这决不是整个情形。凡是创造力未能提供一个窍门，使有天赋的人能据以进行创造的全部“解释”，

① 罗赛蒂(Dante Gabriel Rossetti，1828—1882)，英国画家、诗人，拉斐尔前派创始人之一，祖籍意大利。——译者

都值得怀疑。庞加莱到实际心理学中去遨游，和其他一些在同一方向遨游的人一样，没有能带回金羊毛①，但是它至少提出了这样 531 的事情并不是完全神秘的，有一天当人类聪明到能够懂得他们自己的躯体时，金羊毛是可以找到的。

庞加莱的智力遗传在父母两方面都很好。我们只追溯到他的祖父。在1814年的拿破仑战争期间，这位祖父只有二十岁，隶属于在圣·康坦的陆军医院。1817年他在鲁昂定居之后，结了婚，生了两个儿子：莱昂·庞加莱，生于1828年，后来成为一名第一流的医生和医师公会的成员；安托万，成为公路及桥梁部门的总检查官。莱昂的儿子亨利于1854年4月29日出生在洛林的南希，成为二十世纪初的第一流数学家；安托万有两个儿子，雷蒙从事法律，在世界大战期间升任法兰西共和国总统；安托万的另一个儿子成了中等教育局局长。庞加莱祖父的一个跟随拿破仑入侵俄国的兄弟失踪了，在莫斯科大败后音信杳无。

从这个杰出的家系表看，人们可能会认为亨利会显示出一些管理才能，但是他没有，只是在他的童年时代随意发明了一些供他的妹妹和小朋友们玩的政治游戏。在这些游戏中，他总是极其公正的，注意让他的每一个玩伴都在"当官"的游戏中扮演他或她的角色。这也许是"从小看大，三岁看老"的一个确证，庞加莱天生不具备懂得最简单的管理原则的能力，而他的堂兄弟雷蒙本能地运用着这些原则。

庞加莱的传记是由他的同胞、现代主要的几何学家之一加斯东·达布（1842—1917）在1913年（庞加莱去世后的第二年）非常详

① 见希腊神话中阿尔戈英雄随同伊阿森乘阿尔戈舟去海外寻找金羊毛的故事。——译者

细地写成的。有些事情该书作者可能没有注意到，但是好象达布在讲述了庞加莱的母亲“出自一个在默兹区的家庭，她的[母亲的]双亲住在阿兰西，她是一个很好的人，很灵敏，很聪明”以后，无意中忘记提到她娘家的姓。难道法国人可能在德国1870年和1914年对法国的文化入侵之后，从他们新近的教师那里接过“三个大写的K”——在戴德金那一章中提到过——的观点吗？不过，从达布后来讲的一件轶事中，可以知道庞加莱母亲的姓可能是朗努瓦。我们知道，这位母亲把她的全部注意力都贡献给她的两个孩子亨利和他妹妹（未提到名字）的教育了。他的妹妹后来成了埃米尔·布特鲁的妻子和一位数学家（死得很早）的母亲。 532

庞加莱童年时代智力发展极快，这部分归功于她母亲的不断照料。他很早就学会了说话，但是他在一开始说得很糟，因为他想得比说得要快。从婴儿时起，他的运动神经的调节官能就很差。当他学会写字时，人们发现他左右手都能用，用左手写字或画画同用右手一样糟糕。庞加莱从来没有摆脱这种身体不灵活的毛病。可以回想一下和这有关的一件有趣的事，当庞加莱被认为他那个时代的第一流数学家和主要的科学普及者时，他参加了比奈测验①，表现得这样丢脸，以至于要是不把他作为著名的数学家，而是当作孩子来判断的话，他就会被这次测验列为一个低能儿。

五岁时，亨利因患白喉而受到严重障碍，喉咙麻痹达九个月之久。这次不幸使他很长时间虚弱而胆小，但是这也使他回到他自己的消遣，因为他不得不避开他那个年龄的孩子们的比较粗野的游戏。

他的主要娱乐是阅读，这里他非凡的才能首次显示了出来。一

① 比奈，Binet Alfred（1857—1911）为法国心理学家，对智力测验作出了重大贡献。——译者

旦读过了一本书——以难以置信的速度——便永记不忘，他总能说出讲到一件特定的事情是在第几页和第几行。他终生保持着这种强有力的记忆力。这种罕见的本领可以称为视觉或场所的记忆，欧拉也和庞加莱一样具有这种本领，不过程度差一些。在顷刻记忆——以不可思议的准确性回想起一系列早已过去的事件的能力——方面，他也是不寻常地强有力的。然而他还不脸红地说他记忆力"坏"。他可怜的视力也许给他的记忆力增加了第三个奇特之处。大多数数学家看来主要是靠眼睛记住定理和公式，而庞加莱几乎完全是靠耳朵。他在学校学习高等数学时，看不清黑板，就坐在后面听，不记笔记也能很好地跟上并记住——这在他是一种很容易的技术，但对大多数数学家却是不能理解的。然而他一定也有一种"内部眼睛"的生动的记忆力，因为他的许多工作就象黎533曼的许多工作一样，是那种伴有敏捷的空间直觉和实际形象的类型的。他不能灵巧地运用他的手指，这当然妨碍他去做实验。这看来很可惜，因为要是他掌握了实验的艺术，他自己的一些关于数学物理的工作，可能就与现实更密切了。要是庞加莱在实验科学方面也象他在理论上那么强有力，他可能就会和无与伦比的阿基米德、牛顿和高斯三人一起，成为无与伦比的第四个了。

没有多少大数学家是公众的想象力喜欢把他们描绘成的那种心不在焉的梦想家。庞加莱是一个例外，不过只是在一些较小的事情上，诸如在他的行李中带走了旅馆的亚麻布制品如台布、床单之类。但是很多决不是心不在焉的人也干同样的事，人们知道，一些最机灵的家伙把饭店的银餐具偷偷放到衣袋里溜走。

庞加莱的心不在焉的一个方面，类似于一些完全不同的事情。(达布没有讲这件事，但是应该讲到它，因为它说明了庞加莱晚年的某些粗暴无礼的行为。)一位著名的数学家打老远从芬兰来到

巴黎，和庞加莱商量一些科学问题，女仆通报后，庞加莱没有离开书房去欢迎这位来访者，而是继续不停地踱来踱去——因为这是他思考数学时的习惯——足足有三个小时。整个这段时间，那位谦虚的来访者一直安静地坐在隔壁的屋子里，与这位大师只隔着薄薄的门帘。最后，门帘掀开了。庞加莱的水牛般的大脑袋伸进了房间一下。"你大大打扰了我。"那个脑袋突然出现，随即消失了。来访者没有被接见就离开了，这恰恰是"心不在焉"的教授所要的。

庞加莱的小学成绩是优异的。虽然他一开始并没有在数学上显示出任何显著的兴趣。他最早是热爱自然史，他终生都是动物的伟大爱护者。他第一次试用步枪时，不在意地射下了一只他并没有瞄准的鸟。这个不幸深深地影响了他，以至从那以后，什么也不能(除了强迫的军事训练)使他去碰火器。九岁时，他显示出将要成为他的一项主要成就的第一次希望。法文作文的教师宣称，年幼的庞加莱交去的一篇形式和内容都很新颖的短短的习作，是一篇"小小的杰作"，并把它作为他的一件宝贝保留了起来。但是他也劝告这个学生，如果他希望给学校的主考人留个好印象，就得更平常一些——更笨些。 534

庞加莱不能参加同学们的比较喧闹的游戏，就发明了他自己的游戏。他还成了一个不知疲倦的跳舞迷。由于他所有的功课对他说来都象呼吸一样容易，他把他的大部分时间用在玩耍和帮助他母亲做家务上。甚至在他一生的这个比较早的阶段，他已显示出了他的"心不在焉"的一些比较可疑的特点：他常常忘记吃饭，几乎从来记不得他是否吃过早饭。也许他是不愿意象大多数孩子那样吃得过饱。

对数学的热情，在青春期或在那以前不久(当他大约十五岁

时)抓住了他。从一开始他就显示出一个终生的特点:他的数学是在他不停地踱来踱去时做出来的，而且只是在一切都想好了时才写下来。他工作时，谈话或其它嘈杂的声音从来不会干扰他。后来他写数学论文一挥而就，从来不回头看看他写了些什么，并且在写作时限制他自己只作极少几处删改。凯莱也用这种方法写作，也许欧拉也是这样。庞加莱的一些工作显出写作匆忙的痕迹，他自己说他从来没有在完成一篇文章后，不是为文章的形式，就是为文章的内容懊悔。不只一个写得很好的人有同样的感觉。庞加莱对古典文学研究的鉴别力，教会了他形式和内容的重要性，他在中学时代古典文学就很好。

1870年庞加莱十六岁时，普法战争在法国领土上爆发了。虽然庞加莱太年轻、体质太弱，不能服现役，然而他完全承担了他那一份恐惧，因为他居住的地方南希，被侵略的浪潮淹没了，这个年轻的孩子便伴随他那乘着救护车巡回医疗的、作医生的父亲四处奔波。后来他和母亲、妹妹一起，在极端困难的情况下，到阿朗西去看他的外祖父母出了什么事。他曾在漫长的学校假期中，在外祖父的宽敞的乡村花园里，度过了他童年时代最幸福的时光。阿朗西靠近圣普里瓦的战场。为了到达这个城镇，他们三人不得不"在冰冻的严寒中"穿过被烧毁了的、荒芜的村庄。最后他们到达了目的地，只是发现家里已经被抢劫一空，"不只是有价值的东西，就连不值钱的东西"也被抢走了，并且被野兽般的行径弄得很脏，535 这种行径法国人在1870年和继后的1914年是很熟悉的。外祖父母什么也没有了;在他们目睹大洗劫的那天，他们的晚饭是一位贫穷的妇女供给的，她不肯抛弃她已成废墟的农舍，并且坚持要和他们分食那一点点晚饭。

庞加莱永远忘不了这件事，他也忘不了南希的长期被敌人占

领。正是在战争期间，他学会了德语。庞加莱无法得到任何法国消息，又急于想知道德国人关于法国和他们自己说了些甚么，于是他自学了这种语言。他所看见的和他从入侵者自己的官方报道中知道的一切，使他终生成为一名热情的爱国者。但是，正象埃尔米特一样，他从来没有把他国家的敌人的数学，和他们更实际的行动混淆起来。另一方面，他的堂兄弟雷蒙只要一说到德国人的任何东西就恨得大叫大嚷。在那平衡一个爱国者的仇恨与另一个爱国者的仇恨的簿记上，庞加莱可以和库默尔相抵，埃尔米特与高斯相抵，这样就产生了隐含在圣经的契约"以眼还眼，以牙还牙"之中的完全的零。

按照通常的法国习惯，庞加莱在从事专业之前参加了取得他的第一次学位（文学士及理学士）的考试。他在1871年十七岁通过了这些考试——数学差一点没有通过！他迟到了，考试时有些慌，在收敛几何级数的求和公式的极其简单的证明上失败了。但是他的名气已经走在他前面，主考人宣称："除庞加莱以外，任何学生都会考不及格。"

接着他准备了林学院的入学考试，在这所学校中，他使他的同伴们大吃一惊：他赢得了第一次数学头奖而从不费事去做任何课堂笔记。他的同班同学们预先考过他，他们认为他是一个吊儿郎当的人，选出一个四年级的学生，用一道看来是特别难的数学难题来测验他。庞加莱不假思索地立刻给出解答就走开了，留下想引他上当的人问道："他是怎么解出来的呢？"在庞加莱的一生中，其他一些人也会问同样的问题。当他的同事们交给他一道数学难题时，他好象从不思考，"答案象一枝箭似的飞了出来。"

这一年年底，他考入综合工科学校，名列第一。有几个关于他独特的考试的传说流传了下来。其中的一个讲到有一个主考人，　536

事先得到了庞加莱是一个数学天才的警告，就把考试暂停了四十五分钟，以便设计"一道'好'题"——一道精心想出的难题。但是庞加莱战胜了他，这位提问人"热烈地祝贺考生，告诉他，他赢得了最高分。"庞加莱与折磨他的人一起的经历似乎表明，法国的数学主考人自从毁了伽罗瓦，又差一点同样毁了埃尔米特以来，已经学到了一些东西。

在综合工科学校，庞加莱以他在数学上的卓越才气，在所有体育锻练、包括体操和军事训练上的极端无能，以及他完全没有绘画能力，画出的东西甚么也不象而闻名。最后一点决不是开玩笑；他在入学考试时绘画得了零分，差点把他关在校门外面。这曾使他的主考人大伤脑筋："……有了零分是不能录取的。在其他一切科目[除了绘画]上他都是绝对无可匹敌的。如果他被录取，那将是第一名；但是他能被录取吗？"既然庞加莱是被录取了，好心的主考人们可能在零前面放了一个小数点，在零后面添了个1。

尽管庞加莱在体育锻练上很无能，他在班上却很得人心。有一年年底，他们举办了庞加莱艺术作品的公开展览，用希腊文仔细地给展品标上标题，"这是一匹马"，等等——并不总是准确的。但是庞加莱对绘画的无能，在他学习几何时也有它严重的一面，他失去了第一的位置，在学校名列第二了。

庞加莱在1875年二十一岁时离开了综合工科学校，进了高等矿业学校，打算当一名工程师。虽然他诚心诚意地学习他的专业，还是留下了一些空暇去研究数学，他在着手解决一个微分方程的一般问题上，显示了他的能力。三年后他向巴黎的科学院提交了一篇同一题目的论文，作为数学博士论文，但是这篇论文涉及到一个更困难也更一般的问题。被请去审查这项工作的达布说，"第一眼我就清楚地看出这篇论文是不同寻常的，很有接受的价值。它

所包含的结果肯定足以为几篇好论文提供材料。但是，我必须不 537
怕说出，如果要求庞加莱对他的工作方法提出一个精确的想法，那么很多地方需要修改或解释。庞加莱是一个直观主义者。一旦达到了顶峰，他从不追溯他的步骤。他满足于闯过难关，把勘测注定更容易通向尽头的坦途①的辛苦留给别人。他很乐意地做了我认为是必要的修正和整理。但是当我要求他做这件事时，他向我解释说，他脑子里有许多其它想法；他已经在忙着一些大问题了。他会把解答给我们的。"

因此年轻的庞加莱就象高斯一样，被围攻他的头脑的大群想法压倒了，但是与高斯不同的是，他的座右铭不是"少些，但是要成熟。"一个有创造力的科学家把他的劳动果实储藏了很久，以至它们中的一些已不新鲜了；比较性急的人则把采集到的一切不论生熟都散播出去，随着风和气候带它们落到可能成熟、可能腐烂的地方去；前一个人对科学的进展所做的工作是否比性急的人更多呢，这是一个没有解决的问题。有人认为这样，有人认为那样。由于作出一个决定超出了客观标准的范畴，人人都有权提出他自己的纯主观的意见。

庞加莱注定不会成为一个矿业工程师，但是他在见习期间表明了他至少有真正工程师的勇气。在一次造成十六人牺牲的矿井爆炸和着火之后，他立即跟着救援人员下井了。但是这个职业同他的志趣不合，他欢迎他的学位论文和另一项早期工作为他打开的、成为专业数学家的机会。他的第一次学术任命是1879年12月1日在卡昂担任数学分析教授。两年以后(他二十七岁时)，他被提升到巴黎大学，1886年他再次晋升，在巴黎大学负责力学和

① 据说当亚历山大大帝想要很快地征服几何时，梅纳奇斯对他说，"几何无坦途。"

实验物理课程(后一项看来有点奇怪,是考虑到庞加莱作学生时在实验室中的功绩吧)。庞加莱除了去欧洲参加科学会议和1904年作为圣路易博览会邀请的演讲人去美国访问过一次以外，一直住在巴黎,成为法国数学的统治者。

533

庞加莱的创作时期开始于1878年的学位论文，终止于他在1912年逝世——当时他正处在他力量的顶峰。他给这个相对短促的三十四年的跨度塞进了大量著作，当我们考虑到大部分工作的难度时，其数量简直是绝对难以置信的。他的记录是近五百篇关于新数学的文章,其中很多是范围广泛的研究报告,还有三十多部实际上包括了数学物理、理论物理和理论天文学当时的所有分支的著作。这还没有计入他关于科学的哲学的那些名著和他的通俗文章。谁要想对这个庞大的劳动量有一个恰当的概念，就必须成为第二个庞加莱，所以我们现在只从他的最驰名的著作中选出两、三种，加以简单论述，谨在此最后一次为必需的不全面而道歉。

庞加莱的第一次成功是在微分方程理论方面，他把分析学的全部方法应用于微分方程，他是分析学的绝对大师。选择这个早期的主要努力方向,已经表明了庞加莱对于数学的应用倾向,因为自从牛顿时代以来,微分方程吸引了众多的工作者,主要是因为它们在物理世界的探索中具有的重要性。“纯”数学家有时候喜欢想象他们的一切活动都服从于他们自己的趣味，科学上的应用没有向他们提供什么有趣的东西。然而纯数学家中的一些最纯的人，终生孜孜不倦地致力于微分方程，这些方程首先出现在将物理状况转变成数学符号之中,恰恰是这些,实际上提出了这一理论的核心微分方程。由科学提出的一个特殊的方程，可以被数学家们推

广，然后转回到科学家手里(经常是没有他们能够使用的任何形式的解答)，以便应用到新的物理问题上，但是总的说来，动机是科学的。傅里叶在一段使一类数学家恼怒的名言中总结了这个命题，但是庞加莱赞成这种说法，并在他的大部分工作中遵循它。

"对自然的深入研究，"傅里叶宣称，"是数学发现的最丰厚的源泉。这种研究通过提出一个供研究的明确目标，不仅有排出含糊的问题和无用的计算的优点，而且也是一个形成分析本身和发现分析中那些原理的可靠方法，了解这些原理是必要的，科学总应该保存它们。这些基本的原理，就是在自然现象中反复出现的那些原理。"对此，一些人可能会反驳：很可能，但是在高斯意义上的算术怎么办呢？无论如何，庞加莱是遵循了傅里叶的忠告，不管他是否相信它——甚至他在数论中的研究，也多多少少受到了其他一些更接近于物理科学的数学研究的间接鼓舞。

庞加莱在微分方程上的研究，在1880年，他二十六岁时，导致了他的第一个最好的发现，椭圆函数(和一些其它函数)的推广。单变量(单值)周期函数的性质，在前面几章中多次叙述过，但是为了说明庞加莱所做的工作，我们可以重复基本的东西。三角函数 $\sin z$ 有周期 2π，即 $\sin(z+2\pi)=\sin z$；那就是说，当变量 z 增加 2π 时，z 的正弦函数回到它的初值。一个椭圆函数，比如说 $E(z)$，有两个不同的周期，比如说 p_1 和 p_2，使得 $E(z+p_1)=E(z)$，$E(z+p_2)=E(z)$。庞加莱发现周期性只是一个更一般的性质的特例：当变量由可数的无限多个它自身的线性分式变换代替时，一些函数的值还原，所有这些变换形成一个群。几个符号就能讲清楚这个论断。

设 z 被 $(az+b)/(cz+d)$ 代换。那么对于 a, b, c, d 的值的一个可数无限集，有 z 的一些单值函数，比如说 $F(z)$ 是其中的一个，

使得

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=F(z)。$$

进而，如果 a_1, b_1, c_1, d_1, 和 a_2, b_2, c_2, d_2 是 a, b, c, d 的值集中的任意两个，又如果 z 先被 $\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ 代换，然后在这个式子中，z 被 $\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ 代替，得到比如说 $\frac{Az+B}{Cz+D}$，那么我们不仅有

$$F\left(\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\right)=F(z), \quad F\left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right)=F(z),$$

而且有

$$F\left(\frac{Az+B}{Cz+D}\right)=F(z)。$$

540 进而保持 $F(z)$ 的值如刚才解释的那样不变的所有置换

$$z\to\frac{az+b}{cz+d}$$

(箭头读作"用……代换")的集合形成一个群：集合中两个置换的逐次实施的结果

$$z\to\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}, \quad z\to\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$$

是在集合中；集合中有一个"恒等置换"，即 $z\to z$(这里 $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$)；最后，每一个置换有一个唯一的"逆"——就是说，对于集合中的每一个置换，有一个单独的另一个置换，如果把它作用到第一个置换上去，就产生同等置换。总之，用前面各章的术语，我们看出 $F(z)$ 是一个在一个线性分式变换的无限群下不变的函数。注意，如开始时说的那样，置换的无限是可数的无限：置换能用 1, 2, 3, …… 数出来，不象直线上的点那样多。庞加莱实际构造出了这样的函数，他在十九世纪八十年代的一系列文章中发展了它们的最重要的性质。这样的函数称为自守函数。

这里只需说两点，以指出庞加莱用这个奇妙的创造取得了什么样的成就。首先，他的理论把椭圆函数理论作为一个细节包括进去。其次，正如著名的法国数学家乔治·洪堡所说，庞加莱发现了两个值得注意的命题，这些命题“给了他代数和谐的钥匙”：

两个在同一个群下不变动的自守函数①，是由一个代数方程联系起来的；

反过来，在任何代数曲线上的点的坐标，都能够用自守函数表示出来，因此可用一个参数（变量）的单位函数表示出来。

一条代数曲线是其方程具有类型为 $P(x, y)=0$ 的曲线，其中 $P(x, y)$ 是 x, y 的多项式。举一个简单的例子，中心在原点——(0, 0)——半径为 a 的圆的方程是 $x^2+y^2=a^2$。按照庞加莱的第二 541 把“钥匙”，把 x, y 表示成一个单参数的，比如说 t 的自守函数，一定是可行的。它确实是可行的；因为如果 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$，那么，开平方并相加，我们就消去了 t（因为 $\cos^2 t+\sin^2 t=1$），得出 $x^2+y^2=a^2$。但是三角函数 $\cos t$, $\sin t$ 是椭圆函数的特例，而椭圆函数又是自守函数的特例。

这个广阔的自守函数理论的创立，只不过是庞加莱在三十岁以前做出的、分析学中许多令人吃惊的东西中的一个。他并没有把全部时间都奉献给分析学，数论、代数的一些部分，数学天文学，占据了他的注意力。在数论中，他以几何形式重新建立了双二次形式的高斯理论（见高斯那一章），这特别合乎那些象庞加莱一样喜欢直观方法的人的心意。这当然不是他在高等算术理论中作过的全部贡献，但是限于篇幅，不能进一步详述。

① 庞加莱以现代微分方程理论的创始者之一，德国数学家拉扎勒斯·富克斯(1833—1902)的名字，称他的一些函数为富克斯函数，其原因无需在这里说明。其他一些函数他以费利克斯·克莱因的名字称为克莱因函数——讽刺性地承认有争议的优先权。

这个本事很大的人的工作，从没有不受人重视。在三十二岁(1887年)这个不寻常的年轻年龄，庞加莱被选入科学院。他的提名人说了一些言过其实的话，但是大多数数学家会同意这是真实的："[庞加莱的工作]高于通常的赞扬，但是我们不可避免地想起雅可比写到阿贝耳的话——他解决了在他之前无法想象的问题。确实必须承认，我们正目睹一场数学上的革命，这场革命在每个方面都可以与半个世纪以前，由于椭圆函数的出现所产生的革命相比。"

在这里离开庞加莱的纯数学工作，就象刚刚坐在宴会桌旁就站起来一样，但是我必需转到他的多方面才能的另一方面了。

自从牛顿和他的直接后继者的时代以来，天文学慷慨地给数学家们提供了比他们能解决的还要多的问题。直到十九世纪后期为止，数学家们在着手解决天文学问题时所用的方法，实际上都是由牛顿本人、欧拉、拉格朗日和拉普拉斯发明的那些方法的直接改进。但是贯穿整个十九世纪，特别是自从柯西对单复变量函数的发展，以及他本人和其他一些人关于无穷级数收敛性的研究以来，纯数学家的工作中已经积聚了大量未经试验的方法。对于庞加莱，分析对他象思考一样自然，这一大堆未曾用过的数学，好象是世界上用来解决天体力学和星系演变的突出问题的最自然的东西。他从这一大堆中拣出并挑选了他喜爱的东西，改进了它们，发明了他自己的新方法，以理论天文学一个世纪以来没有经受过的庞大的方式向它进攻。他把这个进攻现代化了；对于大多数天体力学专家来说，他的战役确实是极端现代的，以至于甚至今天，在庞加莱开始他的进攻四十年或更久以后，还很少有人掌握他的方法，一些不能运用他的方法的人，暗示它在实际解决问题上是没

有价值的。然而庞加莱并不缺乏有力的拥护者，他们的胜利对于庞加莱时代以前的人们是不可能的。

庞加莱在数学天文学上的第一次(1889年)成功，出自他对"n体问题"的一个不成功的考虑。对于$n=2$，这个问题已由牛顿完全解决了；著名的"三体问题"($n=3$)将在后面谈到；当n超过3时，一些可以适用于$n=3$的情形的化简可以继续下去。

根据牛顿的万有引力定律，两个质量为m, M，间隔距离为D的质点，以与$(m\times M)/D^2$成比例的力相互吸引。想像空间中随意分布的n个质点；假定所有的质点的质量、初始运动和相互之间的距离在给定的瞬间都是已知的。如果它们按照牛顿定律互相吸引，那么在任意规定的时间间隔之后，它们的位置和运动(速度)是什么呢？对于数学天文学，在一个星团、或星系、或星系团中的星，可以看作是按照牛顿定律互相吸引的质点。这样，"n体问题"相当于——在它的一个应用中——提问从现在起一年或此后十亿年，天空是什么样子的，人们认为，我们现在有足够的观察数据，可以描述一般状态。当然问题由于辐射而极其复杂——星的质量不会历数百万年而不变；但是n体问题在其牛顿式的、一个完全的、可计算的解答中，也会提供对一切人类目的充分准确的结果——人类很可能在辐射能够造成可以观测到的误差之前很久就消亡了。 543

这实质上是为瑞典国王奥斯卡二世在1881年提供的奖金所提出的问题。庞加莱没有解决这个问题，但在1889年，由于他对动力学微分方程的一般讨论，和对三体问题的一次进攻，不管怎样，他被一个由维尔斯特拉斯、埃尔米特和米塔格-列夫勒组成的评奖团授与了这一奖金。三体问题通常被认为是n体问题的最重要的情形，因为地球、月亮和太阳提供了一个$n=3$的情形的例子。维尔斯特拉斯在给米塔格-列夫勒的报告中写道："您可以告诉您

的国王，这项工作确实不能看作提供了所提出的问题的完全解答，但是不管怎么说，它是非常重要的，以至于他的发表将在天体力学史上开创一个新的时代。因此可以认为陛下在设立这一竞赛时所考虑的目的已经达到。"法国政府不甘心落在瑞典国王后面，在庞加莱获得奖金后封他为荣誉军团骑士——这是对这位年轻数学家的天才所给的比国王的两千五百克朗和金质奖章便宜得多的奖励。

由于我们已经提到过三体问题，我们现在可以报告它最近的发展中的一个项目；自从欧拉那时以来，它就被认为是整个数学领域中最困难的问题之一。从数学上讲，这个问题归结为解九个微分方程（都是线性的、二阶的）联立方程组。拉格朗日成功地把这个方程组化约为更简单的形式。如同在大部分物理问题中那样，无法期望有限形式的解；如果确实存在一个解，它将由无穷级数给出。如果这些级数满足那些方程（形式上），而且对于变量的一些值收敛，那么解就"存在"。中心困难是证明收敛。到1905年为止，已经发现了各种各样的特殊解，但是没有证明任何能被称为一般的东西的存在。

在1906年和1909年，一个完全意想不到的地区——芬兰——取得了一项重要进展，对于这个国家，老于世故的欧洲人甚至今天还认为它几乎是不开化的，特别是对它还债的奇怪习惯，认为不文明；在帕沃·努尔米①在田径赛跑中跑过美国之前，很少有美国人认为这个国家超出了石器时代。除了所有三体同时撞到一起的极罕见的情形，赫尔辛福斯②的卡尔·弗里绍夫·宗德曼利用归

544

① 帕沃·努尔米（1897—1973）为芬兰径赛运动员。在三次奥运会上共获六枚金牌，保持4分10.4秒的1英里赛跑世界纪录达八年（1923—1931）。——译者

② 即赫尔辛基。——译者

功于意大利人莱维·奇维塔和法国人潘勒韦的分析方法，作出他自己的巧妙变换，证明了存在上述意义的解。宗德曼的解答不适宜于数值计算，也没有提供多少关于实际运动的信息，但是那不是这里感兴趣的事：一个不知道是否可解的问题被证明是可解的了。许多人曾经不顾一切地努力证明这个重要结论，当证明即将出现时，一些人在人力所能及的范围内，急忙指出宗德曼没有做出什么重要的事，因为除了他解决的那个问题以外，他没有解决其他的问题。这一类批评在数学上就象在文学和艺术上一样平常，这再次表明数学家同任何人一样是凡人。

庞加莱在数学天文学中的最有独创性的工作，总结在他的伟大专著《天体力学新方法》(三卷、1892、1893、1899年)中。接着是1905—1910年的具有更直接的实际性质的另一部三卷集的著作《天体力学教程》，以及再晚一些出版的他的课程讲义《长流体质量平衡的图形》，和一本历史性评论著作《关于宇宙论的假设》。

达布(得到其他许多人的支持)就这些著作中的第一部发表看法，说它确实开创了天体力学的一个新时代，它可以与拉普拉斯的《天体力学》和达朗贝尔早期关于岁差的著作媲美。"沿着拉格朗日开创的分析力学的道路，"达布说，"……雅可比建立了一个看来是动力学中最完整的理论。五十年来，我们依靠这位杰出的德国数学家的那些定理，从各种角度应用它们，研究它们，但是没有添加任何本质的东西。正是庞加莱第一次打破了似乎装着这个理论的这些僵硬的框子，为它设计出客观世界的前景和新的窗口。他在动力学问题的研究中引进或使用了不同的概念：首先是变分方程，即决定问题的无限接近于已知解的解答的线性微分方程，这个概念以前就有过，而且不仅仅可以应用于力学；其次是积分不变式，这完全属于他，并在这些研究中起了重要作用。这些概念上还加上

了其它一些基本概念，特别是涉及所谓“周期”解的那些概念，对于它们，其运动被研究的那些物体，在一定时间后回到它们的初始位置和初始相对速度。”

周期解的概念开创了数学的整整一个部门，即对周期轨道的研究：比如说，已知一个行星，或恒星系，以及星系中所有成员在确定的时期内初始位置和相对速度的完整记载，要求确定在什么条件下星系会在某个稍后一些的时期回到它的初始状态，从此无限地继续重复它的循环运动。例如，太阳系具有这种周期类型吗？或者如果不具有，那么要是它是孤立的、而且不受外部星体的干扰，它会具有吗？无需说，这个一般的问题还没有完全解决。

庞加莱的许多天文学研究工作是定性的，而不是定量的，因为适宜于一个直觉主义者，这个特点把他领向了拓扑学的研究，就象它曾领过黎曼一样。他发表了六篇关于拓扑学的著名论文，它们革新了当时的这个学科。关于拓扑学的研究又被大量应用于天文学的数学。

我们已经提到过庞加莱关于旋转流动物体问题的工作——在宇宙学中具有明显的重要性，它的一个方面假定行星一度很象这样一些星体，它们可以被看作好象它们实际上不是那么荒谬可笑的样子。它们是否如此，对这种情形的数学并不重要，它本身就很有意思。从庞加莱自己的概述中摘出的几段话，比任何释义更清楚地说明了他在这个困难的学科中用数学说明的东西的性质。

“让我们想象一个[旋转]流动物体由于冷却而收缩，但是收缩慢得足以保持均匀，并使旋转在一切部分都一样。

“一开始，形状很近似一个球的这团物体变成一个旋转椭球，它将变得越来越扁，然后，在某个一定的时刻，它将变成一个有三个不同的轴的椭球。再后来，形状不再是椭球，而成了梨形，直到

最后这一团物体在它的“腰”部越来越凹进去，分成两个隔开的、不同的物体为止。

“上述假说肯定不能应用到太阳系。一些天文学家认为它可能对一些双星是成立的，二等天琴星座类的双星可能会呈现出类似于我们讲到的那种形式的过渡形式。”

然后他继续提出对土星光环的应用，它宣称已经证明了只要光环的密度超过土星密度的 1/16，光环就能够是稳定的。可以说，直到 1935 年这些问题还不能被看作完全解决了。特别是对可怜的老土星的更严格的数学处理，似乎表明它还没有被大数学家们完全征服。这些数学家中包括克拉克·麦克斯韦，过去的七十年中他一直在断断续续地不停地研究它。

我们必须再次离开这个几乎还没有尝到什么东西的宴会，进入庞加莱在数学物理中的大部头著作。这里他的运气不是那么好。要想乘机利用他卓越的才能，他应该晚生三十年或多活二十年。当物理学达到它的一个循环出现的衰老的周期时，不幸他正处在他的全盛时期；当物理学开始恢复青春时——在普朗克于 1900 年，爱因斯坦于 1905 年，完成了赋与这个衰老的浪子第一对新命脉的困难、棘手的手术之后——他已经如此彻底地浸透了十九世纪的理论，以至于他在 1912 年去世之前几乎没有时间去领悟奇迹。庞加莱在他整个成年时期，似乎都是通过思考去汲取知识，而没有有意识地去努力。他象凯莱一样，不只是一个多产的创造者，而且也是一个学识渊博的学者。他的范围也许比凯莱的还要宽广，因为凯莱从来没有自称他能够懂得在应用数学中正进行的一切。这种独特的博学，当碰到与经典科学相对立的、现实的科学问题时，也许是一个不利条件。

在物理学坩锅中沸腾的一切只要一出现，庞加莱就会立刻掌握它们，把它们构成几个纯数学研究的题目。当无线电报发明时，他抓住这个新东西，创立了它的数学。当其他人或者无视爱因斯坦关于(狭义)相对论的早期工作，或者把它只作为一个奇怪的东西忽略过去时，庞加莱已经在忙着它的数学了，他是第一个告诉世界什么已经到来的高名望的科学界人士，他催促全世界把爱因斯坦的理论看作也许是新纪元的最重要的现象，他预见到这个新纪元，但是他自己不能开创这个新纪元。对于普朗克的量子理论的早期形式也是如此。当然，有各种不同的意见；但是时间过得这样久了，现在看来，数学物理之于庞加莱，犹如谷神星之于高斯；虽然庞加莱在数学物理方面所完成的工作足够赢来半打伟大的荣誉，但是那不是他生就去从事的职业，要是他坚持从事于纯数学，科学从他得到的会更多——他的天文学工作也就是纯数学，而不是其他。但是科学得到的已经够多了，而且一个具有庞加莱的天才的人，有权作他喜爱的事。

我们现在还有篇幅来讲述庞加莱多才多艺的最后一个方面：他对数学创造的基本原理的兴趣。在1902年和1904年，瑞士数学杂志《数学教学》对数学家们的工作习惯进行了调查。调查表发给了许多数学家，其中一百多人作了回答。对于问题的回答和对一般倾向的分析，在1912年以最后形式发表。①任何希望窥视数学家的“心理”的人，都能在这件奇特的工作，以及庞加莱在看到这个调查的结果之前，独立得出的观点的证据中，找到许多有趣的东西。在我们引用庞加莱的话以前，可以提到普遍感兴趣的几点。

① 《数学教学》关于数学家工作方法的调查。可从杂志及单行本中见到。戈蒂埃-维拉尔著，巴黎。

那些后来成为大数学家的人对数学的早期兴趣，已经在前面各章中多次举例说明了。对于"在什么时期……和在什么情况下数学抓住了你？"这个问题，收到了九十三人对第一部分的回答：三十五人说在十岁以前，四十三人说在十一岁到十五岁；十一人说在十六岁到十八岁；三人说在十九岁到二十岁；只有一个晚的说在二十六岁。

另外，凡是有数学家朋友的人都会注意到，他们当中有一些人喜欢在早晨很早的时候工作（我知道一个很出众的数学家，他在早得不近人情的清晨五点钟开始他一天的工作），而另外一些人在天黑以前甚么都不做。对于这一点的回答，表明了一个奇怪的倾向——也许是重要的，尽管有许多例外：北方民族的数学家们宁愿在夜里工作，而拉丁系民族的数学家喜欢在早晨工作。在夜里工作的数学家中，长时间的集中精力，在他们年纪大一些的时候常常引起失眠症，于是他们改成——不情愿地——早晨工作。费利克斯·克莱因在年轻时夜以继日地工作，他有一次指出摆脱这种困境的一个可能的途径。他的一个美国学生抱怨由于思考数学而不能睡觉。"睡不着，嗯？"克莱因哼了一声，"水合氯醛是干什么的？"不过，不能不加区别地推荐这种药物；克莱因自己的悲剧性的衰竭也许与它有关。

548

也许收到的回答中最重要的是，那些关于灵感与苦干哪一个是数学发现的源泉这个问题的回答。结论是"数学发现，不论大小……都永远不会自发地产生。它们总是自觉和不自觉地以一片播种了基础知识，并花费劳动充分准备好了的土壤为先决条件的。"

那些宣称天才是百分之九十九的汗水，只有百分之一的灵感的人，如托马斯·阿尔瓦·爱迪生，和那些把这个数字颠倒过来的人并不抵触。哪方都是对的。一方记住了苦干，而另一方在貌似突

然发现的激动中把它忘得精光，但是当他们分析他们的印象时，双方都承认，没有苦干和“灵感”的闪现，就不可能作出发现。如果只是苦干就够了，那么许多酷爱艰苦工作的人，他们对于某个科学分支似乎无所不知，同时又是很好的批评家和评论家，怎么会自己连一个小小的发现也从来没有作出来呢？另一方面，那些相信“灵感”是科学或文学上发现和发明的唯一因素的人，看看雪莱的任何一首“完全自发的”诗早先的草稿（只要这些草稿保存了下来，并重写过），或者巴尔扎克使他的气得发狂的出版商承受的任何一部长篇小说的一次次修改稿，可能发现是很有教益的。

庞加莱在一篇1908年发表，以后又收入他的《科学方法》中的文章里，说明了他对数学发现的看法。他说，数学发现的产生，是一个应该使心理学家们非常感兴趣的问题，因为它是人类头脑似乎从外部世界借得最少的活动，而且通过了解数学思维的过程，我们有希望得知什么是人类头脑中最本质的东西。

549

庞加莱问道，“怎么竟会有一些不懂数学的人呢？这应该使我们感到吃惊，或者，更确切地说，如果我们不是如此对它习以为常，它就会使我们吃惊。”如果数学仅仅是建立在逻辑规则的基础上，如同所有正常的人都接受的那样，而且只有疯子才会否认这一点（按照庞加莱的说法），那么，怎么会有这么多人不懂数学呢？对这个问题也许可以这样回答，还没有哪一组证实数学上的无能是正常人类模式的详尽试验公布过。“还有，”他问，“在数学中错误怎么会是可能的呢？”亚历山大·蒲柏说：“犯错误是合乎人性的，”这是和任何其它解答一样不能令人满意的解答。消化系统的化学也许与它有点关系，但是庞加莱想要更微妙的解释——一个不能以喂给“无价值的躯体”麻醉剂和酒精来作试验的解释。

“在我看来答案是明显的，”他宣称。逻辑同发现或发明没有

什么关系，记忆力起了作用。不过记忆力并不象它可能的那样重要。他一点不脸红地说，他的记忆力不好："那么它为什么没有在一段困难的、大多数棋手[他认为他们的"记忆力"是极好的]都会失败的数学推理中抛下我呢？显然是因为它受到推理的一般进程的指导。一个数学证明不只是演绎推理的并列；它是按一定顺序排列的演绎推理，而顺序是比组成部分本身更重要的。"如果他有这个顺序的"直觉"，记忆力就算不得甚么了，因为每一个演绎推理都将自动占据它在序列中的位置。

然而数学创造不仅在于做出已知事物的新组合；"任何人都能做出组合，但是这样的组合会有无限多个，大多数是没有意义的。创造恰恰在于避免无用的组合，做出那些有用的组合，它们只构成一小部分。发明是识别、选择。"但是这一切不是以前就说过几千遍了吗？有哪一个艺术家不知道选择——一个不可捉摸的东西——是成功的一个秘密呢？我们恰恰处于我们在研究开始以前的地方。

550

为了结束庞加莱的观察报告的这一部分，可以指出，他说的许多东西都是建立在一个假定上的，这个假定可能确实是成立的，但是它没有一点儿科学证据。直截了当地说，他假定人类的大多数都是数学上低能的人。如果在这点上同意他，那么我们甚至无需接受他的纯浪漫的理想。它们属于灵感的文学，而不属于科学。

我们转到一些不那么引起争论的东西，现在来引用一段著名的文字，庞加莱在这段文字中描绘了他自己的一个最伟大的"灵感"是怎样产生的，用意在于证明他的数学创造的理论。它是否起到了这个作用，可以留待读者去判断。

他首先指出，为了领会他的叙述，不需要懂得专业术语："心理学家们感兴趣的不是定理，而是环境。

“我花了十五天，竭力证明不存在与我后来称为富克斯函数类似的函数；我那时非常无知。每天坐在我的工作台前，花上一、两个小时的时间；我试了很多种组合，什么结果也没有得到。一天傍晚，与我的习惯相反，我喝不加牛奶和糖的很浓的咖啡；我不能入睡，各种想法蜂涌而至；我觉察到它们互相冲突，可以这么说，直到一对想法钩在一起，形成了一个稳定的组合。到早晨我已经证实了一类富克斯函数、即从超几何级数中得出的那类函数的存在。我只需要写出结果，这用了我几个小时。

“接着我想用两个级数的比来表示这些函数；这个想法是完全有意识的，想出来的；与椭圆函数的相似指导了我。我问自己，如果这些级数存在的话，它们的性质是什么，我毫无困难地构造出了这些级数，我称它们为富克斯级数。

“然后我离开了当时我住的地方卡昂，参加矿业学院主办的一次地质调查旅行。旅行的紧张使我忘记了我的数学劳动；到达库唐斯以后，我们乘公共汽车去某地游览，就在我踏上汽车踏板的那一瞬间，产生了一个想法，显然没有什么我以前想到的东西为它作准备，这个想法是，我用来定义富克斯函数的那些变换，与非欧几何的那些变换是一致的。我没有作证明；我不会有时间，因为一上车，我就在继续一个中断了的谈话；但是我立即感到这是完全的确定无疑的。一回到卡昂，我就在我的空闲时间证明了这个结果，以使自己安心。

551

“然后我着手研究一些算术问题，没有甚么明显的成绩，也没有怀疑过这些问题会与我以前的那些研究有任何联系。研究得不到成功，使我感到厌烦了，于是我去海边度过了几天，思考另一个问题。一天，当我沿着海边的峭壁散步时，那

个想法又出现了，又带有那种简明、突然、立即确定的特点，这就是不定三元二次型的那些变换，与非欧几何的那些变换是一致的。

“一回到卡昂，我就考虑这个结果，得出了它的结论；二次型的例子向我表明，有一些富克斯群与相应于超几何级数的那些富克斯群不同；我看出我能把它们应用于富克斯函数的理论，因此存在一些与从超几何级数中得出的那些 θ 富克斯函数不同的 θ 富克斯函数，这是我到那时为止所知道的一些唯一不同的 θ 富克斯函数。很自然地，我给自己提出了构造所有这些函数的任务。我进行了系统的再三努力，一个接着一个地解决了所有的外围问题；然而有一个问题仍然解决不了，攻下它就会取得全盘胜利。但是我的全部努力只是使我更通晓了这个问题的困难，而这本身确实是有些道理。所有这些工作都是完全有意识地去做的。

“正在这时，我离开卡昂前往瓦勒里昂山，在那里服兵役。因此我有了一些很不同的急务。一天，在穿过大街时，挡住我的那道难题的解答突然出现了。我没有试图立刻深入研究它，只是到了我的服役结束以后，我才继续研究这个问题。我已经有了所有的组成部分，只需要装配它们，排列它们就行了。所以我写出了我最后的论文，一挥而就，毫无困难。”

这类事情，他说，还可以从他自己的工作和其他数学家的工作中，举出许多其他的例子，如在《数学教学》杂志中报告的。从他的经历中，他相信这种表面上的“突然的启发”，“[是]以前长期潜意识工作的明显标志，”他继续推敲他的潜意识思维的理论和它在数学创造上的作用。有意识的工作，作为一种引发潜意识一直积聚的炸药的触机是必要的——他没有这样说，但是他所说的与此相

552

当。但是如果我们仿效庞加莱，把正是我们要了解的目的的那些活动，强加在“潜意识思维”或“潜在自我”之上，那么我们在合理的解释方面能得到些什么呢？不去赋与这个神秘的动因一种假设的机智，使它能够在提出来（怎样提出来，庞加莱没有说）供它检查的“数目极多的”可能组合中作出区别，而平静地说“潜意识”除了“有用的”组合外，拒绝一切组合，因为它对对称和美有一种感受力，这听起来不免象给初始问题一个给人印象较深的名字来解决它一样。也许这正是庞加莱打算做的，因为他一度把数学定义为给各种不同的事物同一名字的艺术；所以在这里他可能是通过给同一事物以不同的名字来完成他的观点的对称性。看来很奇怪，一个能够满足于数学创造的这样一种“心理学”的人，在宗教问题上竟然是一个完全的怀疑主义者，庞加莱就是这样一个人。在庞加莱高明地沉溺于心理学之后，怀疑主义者们很可能会因为曾经不相信甚么而绝望了。

在二十世纪第一个十年期间，庞加莱的名声增长得很快，他开始被看作——特别是在法国——一切关于数学的事情的大智者。他对各种从政治到伦理学的问题的见解，通常是直截了当的、被大多数人当作最终的见解来接受。正象在一个伟人去世后几乎必然会发生的那样，庞加莱生前令人眼花缭乱的名声，在他去世后的十年中经历了不公平的黯然失色的时期。但是他对于什么东西会使后代感兴趣的直觉已经在为它自己辩护了。只举许多例子中的一个，庞加莱是全部数学都能用经典逻辑的基本符号重写这一理论的有力反对者；他认为是某种超出逻辑的东西，使数学成了现在的样子。虽然他没有象现在的直觉学派走得那样远，但是他象那个学派一样，似乎相信至少一些数学概念先于逻辑概念，并且如果二

者之间有因果关系，那么正是逻辑必定出自数学，而不会反过来。这是否就是最终信条还有待考虑，但是目前看来，好象庞加莱使用听凭他自由使用的一切冷嘲去攻击的理论，不管它有什么样的优点，并不是最后的理论。

553

在庞加莱的最后四年中，除了令人苦恼的疾病之外，他繁忙的生活是平静而幸福的。各种荣誉从全世界所有的主要学术团体那里象雨点般向他飞来。在1906年，五十二岁时，他获得了法国科学家可能得到的最高的荣誉称号，法兰西科学院院长。所有这一切并没有使庞加莱妄自尊大，因为他是真正谦逊的、单纯的不装腔作势。他当然知道，在他的壮年时期他没有一个接近于他的对手，但是他也能毫不做作地说，与要知道的东西相比，他什么都不知道。他很幸福地结了婚，有一个儿子和三个女儿，他从他们那里得到了很多乐趣，特别是在他们幼小的时候。他的妻子是艾蒂安·若弗鲁瓦·圣伊莱尔的曾孙女，圣伊莱尔作为那个爱争吵的比较解剖学者居维埃的对手而为人们所记忆。庞加莱的爱好之一是交响音乐。

在1908年于罗马举行的国际数学大会上，庞加莱因病没有能宣读他的激动人心的(也许是过早的)演讲《数学物理的未来》。他的病是前列腺增大，意大利的外科医生们给他作了手术，解除了症状，人们以为他得到了根治。回到巴黎以后，他象以前一样精力充沛地继续他的工作。但是在1911年，他开始有了他可能不久于人世的预感，12月9日他写信给一个数学杂志的编辑，询问是否能接受一篇尚未完成的论文——与通常的习惯相反——关于一个庞加莱认为最最重要的问题的论文："……以我的年纪，我可能不能解决它了，所得到的结果，有可能把研究者们带到新的、意想不到的道路上去，尽管它们使我多次受骗，我认为它们太有前途了，我

自愿献出它们……。”他已经把两年时间中较好的部分用来试着去克服他的困难，但没有收效。

他猜测的那个定理的证明，能够使他在三体问题上取得惊人的进展；特别是它将使他能够证明比以前考虑过的更一般的一些情形的无限多个周期解的存在。这个期望中的证明，在庞加莱的“未完成交响乐”发表以后不久，就由一个年轻的美国数学家乔治·戴维·伯克霍夫(1884--　　)证明了。

1912年春天，庞加莱再次病倒，7月9日接受了第二次手术。手术是成功的，但是7月17日，他在穿衣服的时候，非常突然地死于血栓。他当时五十九岁，正处在他能力的顶峰——用潘勒韦的话说，“理性科学的活着的大脑。”



康托尔

第二十九章　失乐园?

康　托　尔

数学如同一切其他学科，现在轮到它在显微镜下向世界揭示在它的基础上可能存在的弱点了。

——F. W. 韦斯塔韦

由乔治·康托尔(1845—1918)在1874—1895年创造的Mengenlehre(集论，或类论，特别是无限集论)的引起争论的题目，按照它的年代顺序，很可以作为本书的结尾。这个题目对于数学来说，象征着十九世纪有先见之明的预言家们认为是从物理科学到民主政府的一切事物中，极其合理的原则的总崩溃，这些预言

家们预见到了一切，只是没有预见到这场大崩溃。

如果说用"崩溃"来描述世界正在尽全力享受的转变，可能是太重了，那么，科学思想的演变正在如此迅速多变地进行着，以至确实很难把这一演变与革命区分开来。

没有过去的错误作为动乱的根深蒂固的焦点，物理科学现在的激变也许不会发生；但是认为我们的前辈有我们自己这一代正在做的事情的全部灵感，那就对他们过誉了。这一点是值得考虑一下的，因为一些人可能很想说，数学思想上的相应的"革命"(其开端现在是显而易见的)，只是对芝诺和古希腊的其他一些怀疑论者的回声。

毕达哥拉斯在2的平方根上的困难，和芝诺关于连续(或"无限可除性")的种种悖论——就我们所知——是我们现在的数学分裂的起源。今天，那些关心他们的学科的哲学(或基础)的数学家们，在用于数学分析中的推理的正确性上，分裂成至少两个派别，现在显然没有甚么和解的希望，这种不一致可以退回许多个世纪，追溯到中世纪，再追溯到古希腊。所有各方面在数学思想的各个时代都有它们的代表，不管那个思想是隐藏在挑起争论的悖论中，象芝诺那样，还是隐藏在逻辑的巧妙中，象中世纪一些最令人恼怒的逻辑学者那样。数学家们通常认为这些差别的根源是一个气质问题：试图把象维尔斯特拉斯那样的分析学家，转变到象克罗内克那样的怀疑者的怀疑主义，必然会象试图把基督教的原教旨主义者转变到偏激的无神论那样徒劳无益。

在这场论战中，引自几位领袖人物的几段注明日期的话，可以作为我们对乔治·康托尔奇特的脑力生涯感到热心的兴奋剂——或镇静剂，视爱好而定——，康托尔的"正确的无限理论"，在我们这一代加速了历史上关于传统数学推理正确性的最激烈的蛙鼠之

战(爱因斯坦有一次这样称呼它)。

1831年，高斯如下表达了他对"实际无穷的恐惧"。"我反对把无穷量作为一个完满的东西来使用，在数学中决不允许有这样的用法。无穷只是一种说话的方式，真正的意义是指一些比值，在其它一些比值被允许无限制地增加时，无限趋近的极限。"

这样，如果 x 表示一个实数，那么当 x 增加时 $1/x$ 减小，我们能够找到一个 x 的值，使 $1/x$ 与零之差为任意预先给定的量(除零以外)，该量可以任意的小，当 x 继续增加时，差保持小于这个预先给定的量；$1/x$"当 x 趋于无穷时"的极限是零。无穷的符号是 ∞；$1/\infty=0$ 的论断有两个理由是无意义的："用无穷去除"是一个不明确的运算，因此没有意义；第二个理由就是高斯所说的。同样地，$1/0=\infty$ 也是无意义的。

康托尔既同意又不同意高斯的见解。他在1866年写到实在(高斯称之为完满的)无穷时，说"尽管在潜在无穷和实在无穷之间有本质的差别，前者意味着一个增加到超出所有有限的限制(就象上面的 $1/x$ 中的 x)的可变有限量，而后者是一个超出所有有限量的固定的常量，只是它出现得太经常，因而它们被混淆了。"

康托尔接着说，数学中无穷的误用，在他那个时代的谨慎的数学家中，正当地激起了对无穷的恐惧，恰象它激起高斯的恐惧一样。然而他坚持认为所导致的"对合理的实在无穷的不加鉴别的拒绝，不亚于对事物的规律[不管那可能是什么——似乎还没有作为整体揭示给人类]的违背，必须为其本然地对待"——不管可能是怎样的。康托尔就这样与中世纪的大神学家们为伍了，他是这些神学家的深切的学生和热烈的赞美者。

一些古老的问题的绝对肯定和完全解答，如果在吞下去之前先腌透，就能更好地咽下去了。这里是伯特兰·罗素在1901年关

于康托尔对无穷作的普罗米修斯式的进攻所不得不说的话。

"芝诺关心过三个问题……。这就是无穷小、无穷，和连续的问题……。从他那个时代到我们自己的时代，每一代最优秀的有才智的人都试过解决这些问题，但是广义地说，什么也没有得到。……维尔斯特拉斯、戴德金和康托尔彻底解决了它们。它们的解答清楚得不再留下丝毫怀疑。这个成就可能是这个时代能够夸耀的最伟大的成就……。无穷小的问题是维尔斯特拉斯解决的，其他两个问题的解决是由戴德金开始，最后由康托尔完成的。"①

这一段文字中的热情，甚至今天还使我们感到温暖，虽然我们知道罗素在他和 A. N. 怀特海的《数学原理》第二版（1924年）中承认，戴德金的"分划"（见第二十七章）并不是十全十美的——这个"分划"是分析学的脊髓。它在今天也不是十全十美的。今天在十年中支持或反对科学或数学中的一个特别信念所做的一切，比在古代、中世纪，或后来的文艺复兴时期的一个世纪中所做的还要多。今天着手解决一个突出的科学问题或数学问题的、有才智的优秀人物，比以往任何时候都更多，最后的事物成了原教旨主义者的私人财富。在罗素 1901 年的评论中的那些最后的事物，没有一个残存下来。四分之一世纪以前，那些看不见预言家们向他们保证的、象正午的太阳在午夜的天空中闪耀那样在头上闪耀的伟大光辉的人，只能被称做傻瓜。今天，对于站在预言家一边的每一个有能力的专家，都有一个反对他的同样有能力的站在对立面的专家。如果说什么地方有愚蠢的言行，它也是分布得非常均匀的，以至它不再是区别的标记。我们正在进入一个新时代，一个怀疑和象样的谦卑的时代。

558

大约同一时期（1905年）站在怀疑一边的，我们发现有庞加

① 引自 R. E. 莫里茨的《数学大事记》，1914年。我没有找到原始出处。

莱，"我讲到过……我们需要不断地回到我们的科学的第一批原理，也讲到过这对于研究人类思维的好处。这种需要已经激发了两个大胆的计划，它们在数学的最新发展中占有非常显著的位置。第一个是康托尔体系……。康托尔给科学引进了考虑数学无穷的新方法……但是发生了这样的事，我们遇到了会使爱利亚学派的芝诺和麦加拉哲学学派高兴的一些悖论，一些明显的矛盾。所以每一个人都必须寻找补救的方法。就我来说——而我并不是单独一人——我认为重要的是永远不要采用一些不能用有限的文字完全定义的东西。不论采用什么样的疗法，我们一定可以请来一位治疗一个极好的病理学病例的医生，并为此而感到喜悦。"

几年以后，庞加莱为病理学本身的缘故而对它产生的兴趣多少有些减弱了。1908年在罗马举行的国际数学大会上，这位厌倦了的医生自己说出了这样的预测："今后的几代人将把集合论当做一种人们已经从中恢复过来了的疾病。"

康托尔不由自主地、违反他自己意愿地发现，"数学的肌体"害了重病，芝诺传染给它的疾病还没有得到缓解，这个发现正是康托尔最伟大的功绩。他的扰乱人心的发现是他自己聪明的一生的一个奇怪的共鸣。我们首先看一看他的物质生活的一些事实，这些事实本身也许没有多大兴趣，但是它们后来的那些方面对他的理论有奇特的启发。

乔治·费迪南德·路德维希·菲利普·康托尔的双亲都是纯犹太血统，他是富商乔治·沃尔德马·康托尔和他的妻子、艺术家玛丽·博歇的第一个孩子。父亲出生在丹麦的哥本哈根，但在年轻时移居俄国的圣彼得堡，数学家乔治·康托尔于1845年3月3日出生在该城。1856年父亲因患肺病移居德国的法兰克福，他在那里过

着舒适的退休生活，直到1863年去世。由于这种奇怪的多民族的混杂情况，几个祖国都有可能宣称康托尔是它们的儿子。康托尔559本人喜爱德国，但是不能说德国很热诚地喜爱他。

乔治有一个弟弟康斯坦丁，成了一名德国军官（对于犹太人是什么样的职业啊！），还有一个妹妹索菲·诺比琳。弟弟是一位很好的钢琴家；妹妹是一位有成就的设计师。乔治被抑制的艺术天性，在数学和哲学中找到了它汹涌的发泄机会，既是古典的，又是经院式的。孩子们显著的音乐气质是从他们的母亲那里继承来的。她的祖父是一个音乐指挥，她的一个兄弟住在维也纳，教出了著名小提琴家约阿希姆。玛丽·康托尔的一个弟弟是音乐家，一个侄女是画家。如果真的象单调平庸的心理学支持者所宣称的，正常状态和不动感情的稳定性是一回事，那么在康托尔家族中的这一切艺术才华，可能就是康托尔不稳定的性格的根源了。

这一家都是基督教徒，父亲皈依了新教；母亲生来就是罗马天主教徒。康托尔和他的主要敌手克罗内克一样，偏爱新教一方，对中世纪神学作没完没了的无益而琐细的分析，有一种奇特的爱好。要是他没有成为数学家，那么很可能他会在哲学和神学方面留下他的痕迹。可以提到与此有关的一件有趣的事，耶稣会会士们热心地抓住康托尔的无穷理论，他们敏锐的逻辑头脑，在超出他们对神学的理解之外的数学比喻中，发现了对上帝存在和圣三一及其三位一体、一体三位、相互平等、永远并存的不容置疑的证明。在过去两千年中，数学炫耀着一些美丽而奇怪的一致性，这是无与伦比的。康托尔有敏锐的机智，生气时有更锋利的舌头，说他嘲弄了这种“证明”的自命不凡的荒谬愚蠢，是十分公正的，尽管他本人是虔诚的基督教徒和神学专家。

康托尔的学生生涯和最有才华的数学家们一样——他最伟大

的才能很早(在十五岁以前)就得到承认，对数学研究有一种着迷的兴趣。他在一位私人教师那里接受了启蒙教育，接着在圣彼得堡的一所小学上学。当全家搬到德国时，康托尔先进了在法兰克福的私立中学和达姆斯塔特的非古典学派的学校，1860年十五岁时进了威斯巴登中学。

康托尔决心成为数学家，但是他讲求实际的父亲看出了这孩子的数学才能，顽固地想要强迫他学工程，因为工程是更有前途的谋生的职业。在康托尔1860年行坚信礼之际，他父亲写信给他，表达了他和乔治在德国、丹麦和俄国的众多婶、姨、叔、舅及堂表兄弟们对这个有才华的孩子所抱的很高的希望："他们盼望你的正是成为一位特奥多尔·金费尔，然后，如果上帝愿意，也许成为工程学天空的一颗闪光的星星。"什么时候父母们才会了解让天生的赛马去拉车的专横愚蠢呢？　560

对上帝的虔诚呼吁，在1800年竟在迫使这个敏感而虔信宗教的十五岁的孩子屈服，在今天(感谢上帝！)会象一只网球那样，从我们这一代年轻人的更硬的头上反弹回去。但是它重重地击中了康托尔。事实上它把他打昏了。年轻的康托尔深爱他的父亲，又有很深的宗教天性，他无法看出这位老人只是在考虑他自己对钱的贪婪。这样，乔治·康托尔极其敏感的头脑的第一次不正常就开始了。乔治没有象今天有才能的孩子，有几分成功的希望就反抗，乔治没有反抗，他屈服了，就连顽固的父亲也明显地看出，他是在毁了他儿子的意愿。但是乔治·康托尔在不顾他自己天性的敦促，而试着去取悦他父亲的过程中，播下了自我怀疑的种子，这使他在后期成了克罗内克恶毒攻击的很容易的牺牲品，并造成他怀疑他的工作的价值。要是康托尔被培养成一个独立的人，他就决不会对那些已经建立起名声的人那样缺乏自信地顺从，这种顺从使他

的生活很不幸。

当危害已经铸成时，父亲让步了。乔治在十七岁以优异的成绩完成了中学学业，这时他得到了“亲爱的爸爸”的允许，上大学学习数学。“我亲爱的爸爸！”乔治用他孩子气的感激口吻写道，“你自己也能体会到你的信使我多么高兴。这封信确定了我的未来。……现在我很幸福，因为我看到如果我按照自己的感情选择，不会使你不高兴。我希望你能活到在我身上找到乐趣，亲爱的父亲；从此以后我的灵魂，我整个人，都为我的天职活着；一个人渴望做什么，凡是他的内心强制他去做的，他就会成功！”这个爸爸无疑是应该受到感激的，即使乔治的感激照现代的情趣看来，有一点儿太缺乏独立精神。

1862年康托尔在苏黎世开始了他的大学生活，但是次年父亲去世，他转学到柏林大学。在柏林大学，他专攻数学、哲学和物理。他对前两个学科同样感兴趣；对物理学他可从来没有任何感情。他的数学指导教师是库默尔、维尔斯特拉斯和他未来的敌人克罗内克。按照通常的德国习惯，康托尔在另一所大学度过了一段不长的时间，1866年在格丁根大学住了一学期。

在柏林有库默尔和克罗内克，数学气氛就充满着算术。康托尔深入钻研了高斯的《算术研究》，写出了他的博士论文，1867年获得博士学位，他的论文讨论高斯留下的关于不定方程

$$ax^2+by^2+cz^2=0$$

的x, y, z整数解的难点，其中a, b, c是任意已知整数。这是一件很不错的工作，但是不妨说没有哪一个读到它的数学家预见到，这个二十二岁的稳健的作者，会成为数学史上一个最激进的发明者。在这项首次尝试中，才能无疑是显而易见的，但是天才——没有。在这篇严谨的经典论文中，没有一点伟大发明者的迹象。

对于康托尔在二十九岁以前发表的全部最早的工作，也可以这样说。这些工作是优秀的，但是任何象康托尔那样从高斯和维尔斯特拉斯那里完全领会了严格证明学说的有才气的人，都能够做出它们。康托尔最早的爱好是高斯的数论，他是被证明的困难、严谨、清晰完善吸引到这个理论来的。在维尔斯特拉斯的影响下，他不久就从这一理论岔到严格的分析中，特别是三角级数（傅里叶级数）理论中了。

这个理论的难以捉摸的困难（其中无穷级数收敛性的那些问题比在幂级数理论中更不容易对付），似乎激励了康托尔比他的任何一位同代人更深入地研究分析的基础，这样就导致他对无限本身的数学和哲学进行重大的进攻，而这是关于连续、极限和收敛的全部问题的基础。康托尔在快满三十岁时发表了他的第一篇关于无穷级数的革命性论文（在克列尔的杂志上）。下面将要叙述它。康托尔在这篇论文中建立的关于全部代数数集合的意想不到和似非而可能是的结果，以及直接使用的方法的完全新颖，标志着这位年轻作者是一个有非凡的独创力的、有创造性的数学家。是否所有的人都认为新方法成熟或不成熟，这无关紧要；但全世界都承认一个在数学上有十分重要的新东西的人已经出现。应该立刻给他一个有影响的位置。

562

康托尔的物质生活与任何一个不大出名的德国数学教授的生活一样。他从来没有实现在柏林大学获得教授职位的抱负，那也许是在康托尔最伟大、最有创见的创造时期(1874—1884年，二十九岁到三十九岁）德国最高的荣誉。他活跃的专业生涯全是在哈雷大学度过的，那是一所独特的三流学院，他在1869年二十四岁时被任命为不领薪金的教师（一个全靠从学生那里收学费维持生

活的讲师)。1872年他成为讲师，1879年——在对他工作的批评开始出现对他本人恶意的人身攻击的局面之前——他被任命为正教授。他最早的教学经历是在柏林的一所女子中学。为了这个奇怪的不合适的工作，他得听一个缺乏创见的、数学上的庸人关于教学法的乏味演讲，然后才有资格取得教孩子们的国家证书。这对社会是一种浪费。

不管正确与否，康托尔为他没有得到他渴求的柏林大学的职位责怪克罗内克。人们常常谈到犹太人咄咄逼人的宗派，有时把它作为反对雇用他们从事学术工作的论据，但是人们并没有十分普遍地注意到，当两个犹太人在纯科学问题上意见不一致时，或者当一个人嫉妒或害怕另一个人时，他们之间的仇恨只不过是恶毒的学术上的仇恨。非犹太人或者对这些仇恨一笑置之，或者以一种有效的欺诈方式扑向它们，这种方式常常使他们能够在真诚友谊的伪装下达到他们恶意的目的。当两个犹太知识分子争吵时，563 他们吵得冤冤不解，不留余地，并且不遗余力地掐彼此的脖子或在彼此的背上捅刀子。或许这终究还是比另一种假装虔诚的伪善更体面的战斗方式——如果人们一定要战斗的话。任何战争的目的都是消灭敌人，对这桩不愉快的事情，表现出感情用事或武士风度，都是无能的战士的标志。克罗内克在科学论战上是一个最有能力的斗士；康托尔却是一个最无能的战士。但是，以后就会看出，克罗内克对康托尔的强烈敌意，并不完全是个人的，至少部分是出于科学，而且是不存偏见的。

1874年，康托尔二十九岁时发表了他关于集合论的第一篇革命性的论文，同年与瓦利·古特曼结婚，生了两个儿子和四个女儿。没有一个孩子继承了父亲的数学才能。

这一对年轻夫妇在因特拉肯度蜜月时，常和戴德金交往。戴

德金也许是当时试图认真而同情地了解康托尔的颠覆性学说的唯一的第一流数学家。

在十九世纪最后二十五年德国数学界的霸王们眼里，戴德金本人是一个不大受欢迎的人，因而有深刻独到见解的戴德金，就处于同情科学上名声不好的康托尔的地位。局外人有时候以为，在科学上，独创性总是一定会受到热烈欢迎。数学史反驳了这个乐观的幻想：在牢固建立的科学中，违反它的人的道路，与人类保守性的任何其他领域中的违反者的道路可能同样艰难，即使人们承认这位违反者由于超过顽固正统观念的狭窄范围，而发现了有价值的东西，情况也仍然是这样。

如果戴德金和康托尔在向新的方向出击之前停下来考虑一下，他们两人都很可能得到他们本来指望得到的东西。戴德金整个工作的一生是在平庸的位置上度过的；现在戴德金的工作已被承认为德国有史以来对数学作出的最重要贡献之一，那种认为戴德金情愿呆在默默无闻的困境，而让智力上完全不比他高明的人，在得到公众和学术界尊敬的光荣中，象马口铁一般闪闪发光的说法，在那些本人是"雅利安人"而不是德国人的旁观者看来，纯粹是一派胡言乱语。

十九世纪德国学术成就的理想，是一种完全等同于"安全第一"的崇高理想，也许它正确地说明了对待激进的独创性的一种极端高斯式的谨慎——可以想象，新事物可能并不完全正确。对于云雀高飞的习惯，一部诚实地编辑的百科全书的资料来源，一般说来比一首关于同一题目的诗，比如雪莱的诗，更加可靠。(564)

在这样一种令人倒胃口的被说成事实的环境中，康托尔的无穷论——过去两千五百年中对数学的最令人不安的独创性贡献之一——所感受到的自由，大约同一只试图穿过一层冰冷胶粘的空

气、飞上云霄的云雀的自由一样多。即便这个理论完全错了——有人认为不能用任何类似康托尔认为他开始进行的东西的形式来加以补救——也应该得到较好的对待，而不能主要因为它是新事物，没有以正统数学的神圣名义给它命名，就向它扔砖头。

1874年这篇开拓性的论文，着手建立起全部代数数集合的一个完全意想不到的、高度似非而可能是的性质。虽然这些数在前面几章中已多次描述过，我们仍将再次说明它们是些什么，以便清楚地阐明康托尔所证明的事实的性质——在说到"证明"时，我们有意忽视了目前对康托尔所用推理的合理性的全部怀疑。

如果 r 满足一个有理整数（完全正数）系数的 n 次代数方程，而且如果 r 不满足次数小于 n 的这样的方程，那么 r 就是一个 n 次代数数。

这可以推广。因为很容易证明一个类型为

$$c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n=0,$$

其中 c_i 是任意已知代数数（如上定义的）的方程，其任何根本身就是代数数。例如，按照这个定理，

$$(1-3\sqrt{-1})x^2-(2+5\sqrt{17})x+\sqrt[3]{90}=0$$

的所有的根都是代数数，因为系数是代数数。（第一个系数满足 $x^2-2x+10=0$，第二个系数满足 $x^2-4x-421=0$，第三个系数满足 $x^3-90=0$，这样，方程的次数分别是1，2，3）。

565 想象（如果你能够）全部代数数的集合。在这些数中，有全部正有理整数1，2，3，……，因为它们中的任意一个，比如说 n，满足一个代数方程 $x-n=0$，方程中的系数（1和 $-n$）是有理整数。但是除这些以外，全部代数数的集合还包括全部有理整系数二次方程的全部根，全部有理整系数三次方程的全部根，等等，以至无穷。

全部代数数的集合应比它的有理整数1, 2, 3, ……的子集包含着无限多个元素,在直观上不是很明显吗？它可能确实是明显的,但是它碰巧是错的。

康托尔证明了全体有理整数1, 2, 3, ……的集合与"无限地包含更广泛"的全体代数数的集合,包含着恰恰同样多的元素。

这里不能给出这个似非而可能是的陈述的证明，但是可以很容易地使证明所根据的那一类方法——"一一对应"的方法——明白易懂。这会使有哲学头脑的人懂得基数是什么。在说明这个简单但多少有些难以捉摸的概念之前，先看看关于康托尔理论的这一个及其它一些定义的看法的表达方式可能是有帮助的，这些看法强调了一些数学家和许多哲学家之间，关于"数"或"量"的全部问题的态度上的差异。

"一个数学家从来不用量本身去定义量,而一个哲学家会很愿意这样做;数学家定义它们的相等、它们的和和它们的积，这些定义决定了,更精确地说,构成了量的全部数学性质。他甚至以更抽象、更形式的方式，制定了符号,同时规定了符号必须据以组合的规则;这些规则足以表示这些符号的特性,给予它们数学意义。简言之,他用几个棋子,由支配它们的移动和它们之间的关系的约定来确定它们的同样方式，用任意的约定创造了数学的实体"。①并不是所有的数学思想学派都同意这种看法，但是它们至少提出了一种对下面基数的定义负责的"哲学"。

566

① L. 库蒂拉,《论数学的无穷》, 巴黎, 1896, 49页。鉴于这部著作的很多部分现在已毫无希望地过时了，我们能够向普通读者推荐它，是由于它的透彻明确。一位波兰第一流的专家瓦克罗·西尔平斯基写了一部说明康托尔体系的原理的著作《超限数教程》(巴黎, 1928)任何具有小学程度和对抽象推理感兴趣的人都能理解它。波莱尔写的前言提供了必要的危险信号。上面库蒂拉著作的摘录与希耳伯特的方案有某种历史性的兴趣。它提前三十年预见到希耳伯特关于他的形式主义的纲领。

注意，定义中的开始阶段是以库蒂拉的开场白的精神描述“同样的基数”；然后“基数”就象长生鸟一般从它的“同样性”的灰烬中再生了。这完全是一个没有明确定义的概念之间的关系的问题。

当两个集合中的所有东西都能一对一地对应起来时，就说这两个集合有同样的基数。在分成对之后，哪个集合中都没有不成对的东西了。

举几个例子可以讲清这个奥秘的定义。这是那些非常深奥，以至被忽视了几千年的平常、明显、丰富的微不足道的事物中的一个。集合 (x, y, z)，(a, b, c) 有同样的基数(我们不干那种说“当然！每一个包含三个字母”的蠢事)，因为我们能够把第一个集合中的 x, y, z 与第二个集合中的 a, b, c 象下面这样分成对，x 对 a，y 对 b，z 对 c，并且这样做了以后，我们发现在哪个集合中也没有剩下不成对的东西。显然还有其他进行分对的方式。再有，在一个根据法律实行一夫一妻制的基督教社会中，如果二十对已婚夫妇坐在一起进餐，那么丈夫的集合就与妻子的集合有同样的基数。

作为这个“明显的”同样性的另一个例子，我们记起伽利略的全体正整数平方的集合和全体正整数集合的例子：

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots, n^2, \cdots$$
$$1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$$

这个例子和上述例子之间的“似非而可能是”的差别是明显的。如果所有的妻子都离开餐室到客厅去，留下她们的丈夫饮葡萄酒聊天，那么正好有二十个人坐在餐桌旁边，恰好是原来的一半。但是如果所有的平方数抛开自然数，剩下来的恰好与原来的一样多。不管我们喜欢与否(如果我们是有理智的动物，我们就不会喜欢它)，这个赤裸裸的奇迹就出现在我们面前：一个集合的一部分可以有与整个集合同样的基数。如果有人不喜欢“同样基数”

的"成对"定义，他可以接受挑战，去下一个更恰当的定义。

直觉(男人的，女人的，或数学的)已经被大大高估了。直觉是一切迷信的根源。

注意，在这个阶段一个头等重要的困难被掩饰过去了。一个集合或一个类是什么呢？用哈姆莱特的话说，"这是一个值得考虑的问题。"① 我们要回到它，但是我们不回答它。不管谁能够成功地、使康托尔的批评者们完全满意地回答这个天真的问题，都很可能会去解决针对康托尔巧妙的无限论的一些更严重的障碍，同时在不动感情的基础上建立数学分析。为了明白这个困难不是微不足道的，试想想全体正有理整数 1, 2, 3, ……的集合，问问你自己，与康托尔一起，你是否能在你心里把这个全体——它是一个"类"——当作一个确定的思考对象，就象三个字母的类 x, y, z 一样容易理解。为了领会康托尔所创造的超限数，他要求我们做的正是这件事。

现在我们继续讲"基数"的定义，我们采用一个更方便的专门术语：两个集或类的元素能够一对一的对应起来(如在前面举出的例子中那样)，就说它们是相似的。在集合(或类)x, y, z 中有多少元素呢？显然是三个。但是"三"是什么呢？下面的定义包含了一个答案："一个已知类中元素的数目是相似于已知类的所有类的类数。"

这个定义从尝试的解释中什么也得不到；必须就按它这样去理解。它是 1879 年由戈特洛布·费雷格提出的，1901 年又由伯特兰·罗素再次(独立地)提出来。它优于"类的基数"的其它定义的一点，是它既可以应用于有限类，又可以应用到无限类。那些认为

① 见莎士比亚名剧《哈姆莱特》第三幕、第一场。原话为"生存还是毁灭，这是一个值得考虑的问题。"——译者

这个定义对于数学太神秘的人，可以按照库蒂拉的忠告，不去试图定义"基数"来避开它。不过，那样做也会引起一些困难。

康托尔的全体代数数的类，相似于(在上面定义的专门意义上)它的全体正有理整数的子类的惊人结果，只是无限类的许多完全意想不到的性质中的第一个。暂时假定他为了得出这些性质所用的推理是正确的，或者，即便康托尔留下的形式不是无可非议的，也能够使它严格，那么我们必须承认它的力量。

例如考虑超越数的"存在"。在以前的一章中，我们看到埃尔米特为了证明这一类的一个特殊数的超越性，付出了多么巨大的努力。甚至在今天，也没有一般方法能用来证明我们怀疑是超越数的任何数的超越性；每一个新的类型都要求发明特殊的、巧妙的方法。例如，人们怀疑由

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

当n趋于无穷时所决定的数(这是一个常数，虽然从它的定义看好象是一个变量)是超越的，但是我们无法证明它。所需要的是指出这个常数不是任何有理整系数代数方程的根。

所有这一切提出了一个问题："有多少超越数？"它们比整数、有理数、或全体代数数更多呢，还是更少？由于(根据康托尔的定理)整数、有理数和全体代数数的数目相等，这个问题就归结为：超越数能用1, 2, 3, ……数遍吗？全体超越数的类，相似于全体有理整数的类吗？答案是否定的；超越数比整数无限地多得多。

这里我们开始进入集论的引起争论的方面。刚刚讲到的结论对于克罗内克那种性格的人，很象是一个挑战。在讨论林德曼的π是超越数(见第二十四章)的证明时，克罗内克问道，"你关于π的美妙研究有什么用呢？既然无理数[因此是超越数]不存在，为什么

要研究这样的问题呢?”我们可以想象这种怀疑主义对于康托尔的超越数比整数1, 2, 3, ……无限地多得多的证明的影响，按照克罗内克的看法，整数1, 2, 3, ……是上帝的最杰出的工作和唯一确实“存在”的数。

甚至康托尔的证明的概要,在这里也是无法讨论的,但是他所用的那类推理的一些东西，可以从下面的简单考虑中看出来。如 569 果一个类相似于(在上面的专门意义上)全体正有理整数的类，就说这个类是可数的。一个可数类中的元素能够用1, 2, 3, ……数遍;一个不可数类中的元素不能用1, 2, 3, ……数遍:不可数类有比可数类多的元素。不可数类存在吗?康托尔证明了它们存在。事实上,在任何线段上的所有点的类就是不可数的,不论这个线段多么小(倘若它多于单独一个点)。

由此我们多少看出超越数为什么是不可数的。在高斯那一章,我们看到任何代数方程的任何根,都能用笛卡儿几何的平面上的点表示。所有这些根组成了全体代数数的集合，康托尔证明了这个集合是可数的。但是如果在单单一个线段上的点是不可数的,那么可以推知在笛卡儿平面上的所有点也同样是不可数的。代数数点缀在平面上,就象星星在漆黑的夜空;稠密的黑色就是超越数的天空。

关于康托尔的证明,最值得注意的是,它没有提供哪怕是一个超越数能据以构造出来的方法。对于克罗内克，任何这样的证明都是十足的废话。“存在证明”的许多比较适度的例子都激起他的愤怒。这些例子中有一个特别有意思，因为它预示了布劳威尔反对在有关无穷集的推理中充分应用古典(亚里士多德的)逻辑。

一个多项式$ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots+l$，其中系数$a$, b, ……, l是有理数,如果不能被分解成两个有理系数多项式的乘积,就称它为

不可约的。现在，对大多数人来说，象亚里士多德会做的那样，断言一个已知多项式要么是可约的，要么是不可约的，是一个有意义的陈述。

对于克罗内克就不是这样了，按照克罗内克的看法，在提供出一些确定的，能够在明确的有限步完成的过程，使我们能够据以解决任何已知多项式的可约性之前，在逻辑上我们没有权利在我们的数学证明中使用不可约的概念。按照他的说法，如果那样用了，那就是在我们的结论中引入了自相矛盾的东西，而且没有所叙述的过程就使用“不可约性”，充其量也不过只能给我们一种“没有证实”的、非最后的决定。所有这些非构造性的推理——按照克罗内克的看法——都是不合逻辑的。

570

由于康托尔在他的无限类理论中的推理大多是非构造性的，克罗内克把它看作一类危险的数学疯狂。克罗内克看见数学在康托尔的领导下走向疯人院，便热烈地致力于他所认为的数学真理，用他能够抓到的一切武器，猛烈地、恶毒地攻击“正确的无穷理论”和它的过于敏感的作者，悲剧的结局不是集论进了疯人院，而是康托尔进了疯人院。克罗内克的攻击摧毁了这一理论的创造者。

1884年春，康托尔在四十岁时经历了他的第一次精神崩溃，在他长寿的一生随后的岁月中，这种崩溃以不同的强度反复发生，把他从社会上赶进精神病诊所这个避难所。他暴躁的脾气加剧了他的困难。一阵阵深刻的沮丧使他在自己眼里都感到自卑，他开始怀疑他的工作的正确性。在一次神志清醒的间歇期间，他请求哈雷大学的学校当局把他从数学教授席位换到哲学席位上去。他的一些关于正确的无穷理论的最好的工作是在两次发作之间的间歇时完成的。当他从发病中恢复过来时，他注意到他的头脑特别

清楚。

克罗内克或许由于康托尔的悲剧受到了过分严厉的指责；他的攻击只是许多起作用的原因中的一个。没有得到承认，使这个相信他朝着无限的合理理论迈出了第一步——和最后一步——的人产生怨恨，沮丧得使自己患了忧郁症和丧失理性。不过，克罗内克看来的确要为康托尔没有得到他所渴望的柏林大学的职位负主要责任。人们通常认为，一个科学家把他对一个同代人的工作的猛烈攻击讲给学生听，是不够光明正大的。不同见解可以在科学文章中客观地解决。克罗内克在1891年竭尽全力对他在柏林大学的学生们批评康托尔的工作，事情变得很明显，两人无法共事。由于克罗内克已经占有一个位置，康托尔只能扫兴地呆在一边。

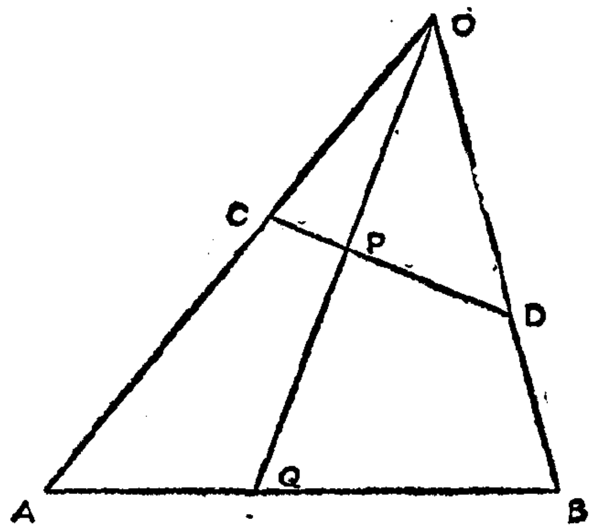
但是，他也并不是没有得到安慰。富于同情心的米塔格-列夫勒不仅在他的杂志(《数学学报》)上发表了康托尔的著作，而且在康托尔与克罗内克的争吵中安慰他，仅仅在一年的时间中，米塔格-列夫勒就从痛苦的康托尔那里收到五十二封信。在那些相信康托尔理论的人当中，和蔼的埃尔米特是最热情的一个。他对新学说热诚的接受，温暖了康托尔谦虚的心："埃尔米特在这封信中，……关于集论这个题目向我倾吐的赞扬，在我眼里是如此之高，如此之有价值，以至除非我遭到指责，说我被它们迷惑了，我是不愿意公布它们的。"

571

随着新世纪的到来，康托尔的工作渐渐开始被人们接受了，认为是对整个数学，特别是对分析学基础的一个重大贡献。但是对于这个理论，不幸的是仍然影响着它的悖论和自相矛盾开始同时出现。这些可能最终是康托尔的理论注定要对数学做出的最大贡献，因为它们就在围绕无穷的逻辑和数学推理的基础中意想不

到地存在，是现在整个演绎推论中批判运动的直接启迪。我们希望从这里能得出一个比康托尔以前时代的数学更丰富、更“真实”——摆脱了不一致——的数学。

康托尔的最惊人的结果是在不可数集论中得到的，不可数集的最简单例子是一段线段上的所有点的集合。在这里只能谈谈他的最简单的结论中的一个。与直观所能预测的相反，两个不等长的线段包含着同样数目的点。记住两个集合包含着同样数目的元素，当而且仅当它们中的元素能够一对一的对应起来时，我们就容易看出康托尔这个结论的合理性。如图放置不等长的线段 AB，CD。线段 OPQ 交 CD 于点 P，交 AB 于 Q；P 和 Q 因此是对应的。当 OPQ 绕 O 旋转时，点 P 在 CD 上移动，而 Q 同时在 AB 上移动，CD 的每一个点有一个且仅有一个 AB 上的点与之“对应”。



可以证明一个更出乎意料的结果。任何线段，不管多么小，都包含着与无限长的直线同样多的点。进一步，线段包含的点，与在整个平面、或整个三维空间、或整个 n 维空间(这里 n 是大于零的任意整数)，或者最后，在可数无穷维空间中的点同样多。

这里，我们还没有试图去定义类或集合。也许(正如罗素在

1912 年认为的）为了对康托尔的理论有一个清楚的认识，或者为了该理论自身保持一致——这对任何数学理论的要求都足够了——下这样的定义是不必要的。然而现在的争论似乎要求给出某种清楚的、自相一致的定义。下面的定义常常被认为是令人满意的。

一个集合是由三个特性表示其特点的：它包含着具有某种确定性质(比如说色度、或体积、或量)的一切东西；没有这个性质的东西都不属于这个集合；集合中的每一个元素可以判别出与集合中的其它东西是相同的还是不同的——简言之，集合中的每一个元素都有一种永远可以辨认的个性。集合本身可以作为一个整体来掌握。对于应用来说，这个定义可能是太严格了，例如，考虑一下在第三个要求下，康托尔的全体超越数的集合会怎么样。

在这一点上，我们可以回顾一下全部数学史——或者由数学大师们在他们纯专业工作中的专论所揭示的同样多的历史部分——并注意在几乎全部数学论著中不断反复出现的两种表达方式。读者们或许会对反复使用诸如“我们能找到一个大于 2 的整数，”或“我们能选择一个小于 n、大于 $n-2$ 的数”这样的话感到不愉快。选择这样的用语不只是老一套的卖弄学问。使用它们是有理由的，细心的作者在肯定“我们能找到，等等”时，是准确地意味着他们所说的意思的。他们的意思是**他们能够做到他们所说的事情**。

573

与此有明显区别的是另一个在数学写作中一再出现的习惯用语“存在”。例如，一些人会说：“存在一个大于 2 的整数，”或者“存在一个小于 n，大于 $n-2$ 的数。”使用这样的习惯用语，肯定表明它的使用者相信克罗内克认为是站不住脚的信念，当然，除非“存在”能够由“构造”证明。对于出现在康托尔理论中的集合（如上面

定义的),存在是不能证明的。

这两种说话方式把数学家分成两类:说"我们能"的人认为(也许是下意识的)数学纯粹是人的发明;说"存在"的人认为数学有它自己的超出人以外的"存在","我们"只能在我们的人生旅途中偶然发现数学的"永恒真理",这很象一个人在一座城中散步,遇到许多街道,而他与这些街道的规划没有任何关系。

神学家们是说"存在"的人;谨慎的怀疑主义者大多数是说"我们"的人。超出人以外的存在的拥护者说"存在无限多的偶数,或无限多的素数,"克罗内克和说"我们"的人说"做出它们来。"

从《新约全书》中一个著名的例子,可以看出这个差别不是微不足道的。基督断言父"存在";腓力要求"将父显给我们看,我们就知足了。"①康托尔的理论几乎完全是在"存在"一边的。有没有可能是康托尔对神学的热情决定了他的忠诚呢?如果是这样的,我们就得解释为什么克罗内克是那样偏执地说"我们"的人,他也是基督教神学的一个行家啊。正如在所有这样的问题中那样,哪一方的攻防手段都能够从随便哪个口袋中偷出来。

考虑集论"存在"的一个惊人的和重要的例子,是由著名的策梅罗公设(1904 年说明的)提供的。"对于每一个其元素是一些集合 P 的集合 M(也就是说 M 是一些集合的一个集合,或一些类的一个类),集合 P 不空且不相交(即没有两个集合包含有共同元素),至少存在一个集合 N,它恰好包含构成 M 的集合 P 的每一个集合中的一个元素。"这个公设与前述集合(或类)定义的比较表明,如果集合 M 包含比如说无穷多个不相交的线段,说"我们"的人不会考虑这个无需证明的公设。然而这个公设看来是相当合理的。证明它的企图都失败了。它在一切与连续有关的问题中都相

574

① 见基督教《圣经·约翰福音》第十四章第八节。——译者

当重要。

说说这个公设是怎样逐渐被用到数学上的，将提出康托尔理论的另一个尚未解决的问题。一个有清楚可数的元素的集合，就象一堵墙上的全部砖头，能够很容易地排出顺序；我们只需要用许多种会自动使人想起的不同方法中的一种，按 1, 2, 3, ……数遍它们。但是我们怎样给直线上所有的点排顺序呢？不能按 1, 2, 3, …… 数遍它们。当我们考虑到在直线上的任意两个点之间"我们能找到"或"存在"直线上的另一个点时，这项工作就显得毫无希望了。如果我们每一次数墙上相邻的两块砖，墙上的另一块砖就出现在它们之间，我们的计算就会有点混乱了。然而直线上的点看来确实有某种顺序；我们能说出一个点是在另一个点的左边或是右边，等等。排列直线上点的顺序的努力没有成功。策梅罗提出了他的公设，作为一种使这个努力容易一些的方法，但是它本身还没有被接受为一个合理的假设，或者能可靠地使用的公设。

康托尔的理论包含着比这里指出的多得多的关于实在无穷和超限(无限)数的"算术"的东西。但是由于这个理论仍然处在有争论的阶段，我们可以放下它，谈谈最后一个谜。"存在"或者我们能"构造"一个集合，它既不同于(在一一对应的专门意义上)全体正有理整数的集合，又不同于直线上所有点的集合吗？答案是不知道。

康托尔于 1918 年 1 月 6 日在哈雷的精神病院去世，时年七十三岁。他最后得到了荣誉和承认，甚至忘记了过去与克罗内克争吵的痛苦。康托尔在克罗内克 1891 年去世前的几年中，与克罗内克至少在表面上是和解了。回想起这件事，对他来说无疑是一种满足。要是康托尔能活到今天，对于使全部数学中的思想更严格的运动，他是有资格感到骄傲的，因为这个运动主要归功于他自己

在更合理的基础上建立分析(和无限)的努力。

回顾为了使实数、连续、极限和无穷这些概念在数学上精确和能一贯使用而进行的长期斗争，我们看到芝诺和欧多克斯在时间上距离维尔斯特拉斯、戴德金、和康托尔，并不象把现代德国和古代希腊分开的二十四、五个世纪所包含的意思那样遥远。无疑，与我们的前辈们相比，我们对于所涉及的那些困难的性质，有更清楚的概念，因为我们看到同样没有解决的问题，在新的面貌和古人从未梦想到的新领域中出现了，但是要说我们已经解决了那些年代古老的困难，那就是十足的谎报事实。然而最后的得分记录了比我们的前辈们能够合法地要求的更大的成绩。我们比他们曾经认为必要的研究得更深入，我们发现一些他们在推理中接受的"规律"——例如亚里士多德逻辑的那些规律——在我们将我们的一些经验联系起来的努力中，由其它一些规律——纯粹的常规——更好地代替了。正如已经说过的，康托尔的革命性工作，给我们现在的活动以最初的动力。但是人们不久就发现——在康托尔去世之前二十一年——他的革命要末是太革命了，要末是不够革命。现在看来是不够革命。

意大利数学家布拉利-福尔蒂在1897年打响了反革命方面的第一枪，他通过康托尔在其无穷集论中所使用的那种类型的推理，提出了明目张胆的反驳。这个特殊的悖论只是几个悖论中的第一个。由于理解它需要很长的解释，我们代之以罗素在1908年的悖论。

我们已提到过弗雷格，他给已知类的基数下了"相似于已知类的所有类的类数"的定义。弗雷格花费了多年的时间，试图把数的数学置于合理的逻辑基础上。他毕生的著作是他的《算术基本法

则》，第一卷发表于1893年，第二卷发表于1903年。在这部著作中使用了集合的概念。也对以前论述算术基础的作者们的明显错误和种种愚蠢，使用了大量挖苦的抨击。第二卷以下面的供认结束：576

> “一个科学家几乎不能碰到比这更难堪的事情了，即正当工作完成时，它的基础垮掉了。当这部著作行将印完时，伯特兰·罗素先生的一封信就使我处于这样的境地。”

罗素把他的“不是它们自身的元素的一切集合的集合”的巧妙悖论寄给了弗雷格。这个集合是自己的元素吗？稍微想一想就能推敲出，不论哪种答案都是错误的。然而弗雷格随意使用了“一切集合的集合。”

为了避免或消除那些象炸弹一般开始在弗雷格-戴德金-康托尔的实数、连续和无限理论之中和之上爆炸的矛盾，提出了许多方法。罗素提出他的“循环论证原理”作为补救办法：“任何涉及到一个集合的所有元素的东西，都一定不是这个集合中的元素”；后来他又提出了“约化公理”，由于这个公理现在实际上被抛弃了，我们没有必要叙述它。有一个时期，这些补救方法是卓有成效的（德国数学家们不这样认为，他们从未轻易接受它们）。渐渐地，随着全部数学推理的批判检查取得了进展，这种药剂便被抛弃了，在开出进一步的灵丹妙药之前，人们开始齐心协力找出使病人在无理数和实数中受苦的究竟是什么。

要了解我们的困难，现在的努力起源于格丁根的戴维·希耳伯特（1862—[1943]）1899年的工作，和阿姆斯特丹的布劳威尔（1881—[1966]）1912年的工作。这两个人和他们的众多追随者有着共同的目标，即把数学推理置于合理的基础上，尽管他们的方法和哲学在几个方面是极端对立的。看来不大可能这两个人都象

各自相信自己是正确的那样完全正确。

希耳伯特向希腊寻找他的数学哲学的起源。他重新开始毕达哥拉斯的一组严格而充分确定的公设的计划，通过严格的演绎推理，从这组公设中必然引起一个数学论点，希耳伯特使数学的公设发展比之希腊人的更精确，并于1899年出版了他关于几何基础的经典著作的第一版。希耳伯特提出的一个要求是，为几何提出的公设将被证明是自相一致的(摆脱了内在的、隐含的矛盾)，而希腊人似乎没有想到过这个要求。为了对几何作出这样一个证明，他指出在几何中由这些公设发展出来的任何矛盾，都暗示着一个算术中的矛盾。这样，问题又回到证明算术的一致性，一直保持到今天。

577

因此我们再次回到请斯芬克斯①告诉我们数是甚么。戴德金和弗雷格两人都逃向无穷——戴德金以他的无穷类定义无理数，弗雷格以他的相似于已知类的所有类的类定义基数——来解释迷惑过毕达哥拉斯的数。希耳伯特也到无穷中去寻找答案，他相信，无穷对于理解有限是必需的。他强烈相信，康托尔体系最终会从它现在在其中碾转不安的炼狱中解放出来。"在我看来，这[康托尔的理论]是数学思想的最令人赞美的果实，确实是人类智力活动的最高成就之一。"但是他承认布拉利-福尔蒂、罗素和其他一些人的悖论还没有得到解决。不过他的信念克服了一切怀疑："没有人能把我们驱逐出康托尔为我们创造的乐园。"

但是在这个兴奋得意的时刻，布劳威尔出现了，他有力的右手握着看上去象是一把燃烧的剑一样的东西。驱逐开始了：扮演亚当的戴德金，和在他旁边假扮成夏娃的康托尔，在这个不妥协的荷

① 希腊神话中带翼狮身女怪。传说她常叫过路人猜谜，猜不出者即被杀害。——译者

兰人的严厉注视下，已经忧心忡忡地在看着大门。① 布劳威尔说，希耳伯特提出的保证免除矛盾的公设法完成了它的使命——没有产生矛盾，但是"用这种方法不会得到任何有价值的东西；一个错误的理论，即使没有因矛盾而告终，也仍然是错误的，正如一种有罪的策略，即使没有受到惩戒法庭的制止，也仍然是有罪的。"

布劳威尔反对他的对手们的"有罪的策略"，根源是一种新的东西——至少在数学上是新的。他反对不加限制地应用亚里士多德的逻辑，特别是在处理无穷集合时，他坚持认为当这样的逻辑用到不能在克罗内克的意义上(必须提供一个过程的规则，使集合中的元素能由它产生出来)确切地构造出来的集合时，必然产生矛盾。"排中"律(一个东西必定有某种性质，或者必定没有那种性质，例如断言一个数是素数或者不是素数一样)只有当用于有限集时才是合理应用的。亚里士多德发明他的逻辑，是作为一组对于有限集运用的规则，把他的方法建立在有限集的人类经验的基础上，没有任何理由认为对于有限适用的逻辑当应用到无限时，会继续产生一致的(无矛盾的)结果。当我们回想起无穷集的真正定义强调无限集的一部分可以包含与整个集元素完全同样多的元素(如我们多次解释的那样)时，这似乎是很合理的，当"部分"意味着一些而不是全体(如在无穷集定义中那样)时，定义所强调的这种情形对有限集永远不会发生。 578

这里我们得到一些人认为是康托尔实际无限理论的麻烦的根源。因为集合的定义(如前所述)，所有有某种性质的东西由它"结合"形成一个"集合"(或"类")，并不适合于作为集合论的基础，这

① 亚当为《圣经》中所说的上帝创造的第一个男人，夏娃是第一个女人，由于蛇的诱惑，夏娃唆使亚当偷吃了天堂中的禁果，两人随即被逐出乐园，见《旧约全书·创世记》第二、三章。——译者

是由于这个定义要末不是构造性的(在克罗内克的意义上)，要末设想了没有人能做出来的构造性。布劳威尔宣称，排中律在这种情形的应用，充其量也只不过是对那样一些命题的启发式的指导，这些命题可能成立，但不是必然成立，即使它们是严格用亚里士多德的逻辑推断出来的，他还说在过去半个世纪中，许多错误的理论(包括康托尔的理论)都是建立在这个脆弱的基础上的。

在数学思维基础上的这样一场革命，不可能不引起异议。反动右翼的粗暴咆哮，加速了布劳威尔朝左翼的激进运动。"韦尔和布劳威尔[布劳威尔是领导者，韦尔是他在反叛中的伙伴]正在做的事情主要是步克罗内克的后尘，"这是希耳伯特的说法，他是现状的维护者。"他们想抛弃不合他们心意的一切，并下一道禁令，试图这样来建立数学。其效果是肢解我们的科学，冒着失去我们大部分最有价值的东西的危险。韦尔和布劳威尔谴责无理数、函数——甚至诸如在数论中的函数，康托尔的超越数等等一般概念，谴责正整数的无限集有最小元素的定理，甚至谴责'排中律'，例如象要末有无限多个素数，要末只有有限的素数这样的论断。这些是他们所禁止的定理和推理模式的例子。我相信，正如克罗内克废除无理数的企图不起作用(韦尔和布劳威尔确实允许我们保留一个残缺的东西)一样，事实会证明，今天他们的努力同样是不起作用的。不！布劳威尔的计划不是一场革命，只是用老方法进行无用的奇袭的重复，但这是以更大的热情进行的，然而完全失败了。今天，这个领域[数学]通过弗雷格、戴德金和康托尔的劳动，彻底装备起来并且加强了。布劳威尔和韦尔的努力注定是毫无结果的。"

579

另一方对此的回答只是耸耸肩，继续其在坚实的基础上重建数学(特别是分析学基础)的伟大而重要的新任务，这个坚实的基础要比从毕达哥拉斯到维尔斯特拉斯的过去两千五百年中人们所

奠定的基础更坚实。

到这些困难都被清除——我们希望如此——之后的一代人那时，数学会是什么样子呢？只有一个预言家或预言家的第七个儿子会把头伸进预言的绞索。但是如果在数学的进程中毕竟有任何连续性——大多数不带偏见的旁观者认为有——那么我们发现未来的数学将比我们或我们的前辈们所知道的数学内容更广泛、更坚实、更丰富。

这个世纪过去的三分之一的争论，已经给数学的广大版图添加了新的领域——包括全新的逻辑，新的领域正在迅速地与旧有的领域合为一体，协调一致。如果我们可以莽撞地冒险预测，那么未来的数学会比现在正有力地重新形成的数学更清新，在各方面更年轻，更接近人类的思想和人类的需要——更能摆脱它对超出人以外的“存在”的合理性的要求。数学的精神长青。正如康托尔所说，“数学的本质在于它的自由”；现在的“革命”只不过是对那自由的另一种主张。

*　　*　　*

遭受挫折和失败，她仍继续工作，
心灵困乏和烦闷，她工作越起劲，
有她不屈不挠的意志支撑：
双手将会制作，头脑将会钻研，
而她的一切悲伤将变为劳动，
直到死亡这友好的敌人，用他的长剑
刺进那强有力的心，结束这场苦涩的斗争。

——詹姆斯·汤姆森

索　引

(所列数字为原书页码,见本书边码)

A

B

C

D

E

H

J

K

L

O

P

Q

R

W

X

Mathematics

"Professor Bell has done his work well.... Any {one} engaged in learning mathematics will profit by reading him, since he humanizes the subject and helps to a realization of the historical environment." —Bertrand Russell

"Extremely harmonious...a first text in the philosophy of mathematics.... Bell's style is very enjoyable." —*The New York Times*

"Professor E.T. Bell has written a fascinating book. The amount of biographical details and of mathematics that he has compressed into a volume of 600 pages is extraordinary...he carries the reader along; he whets the appetite." —*Nature*

Here is the classic, much-read introduction to the craft and history of mathematics by E.T. Bell, a leading figure in mathematics in America for half a century. *Men of Mathematics* accessibly explains the major mathematics, from the geometry of the Greeks through Newton's calculus and on to the laws of probability, symbolic logic, and the fourth dimension. In addition, the book goes beyond pure mathematics to present a series of engrossing biographies of the great mathematicians—an extraordinary number of whom lived bizarre or unusual lives. Finally, *Men of Mathematics* is also a history of ideas, tracing the majestic development of mathematical thought from ancient times to the twentieth century. This enduring work's clear, often humorous way of dealing with complex ideas makes it an ideal book for the non-mathematician.

E. T. Bell (1883–1960) was for many years Professor of Mathematics at the California Institute of Technology. He was President of the Mathematical Association of America, Vice President of the American Association for the Advancement of Science, and a member of the National Academy of Science. He published twelve books.

Cover design by Janet Halvorsen

51700
9 780671 628185
ISBN 0-671-62818-6

A Touchstone Book
Published by Simon & Schuster
New York

U.S. $ 17.00
Can. $ 23.00

10881700